

IPhO 1983

理论题与解答 · 罗马尼亚布加勒斯特 · 5 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipro/1983/

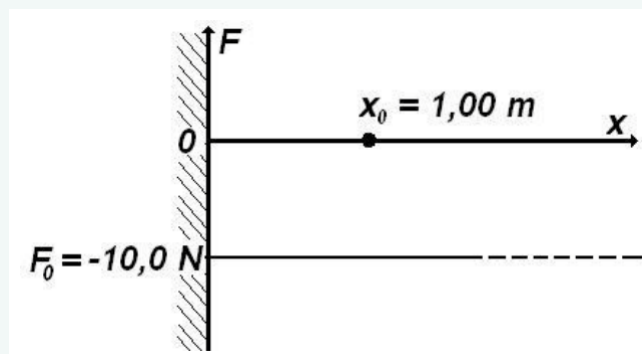
题目 1：跳跃的粒子

一个粒子在一个力的作用下沿正半轴 Ox 运动（一维情形），该力在 Ox 轴上的投影为 $F_x = F_0$ ，如下图所示（表示为 x 的函数）。在 Ox 轴的原点处放置了一面完全反射壁。

无论粒子位于何处，都受到大小恒为 $F_f = 1,00\text{ N}$ 的摩擦力作用。

粒子从 $x = x_0 = 1,00\text{ m}$ 处出发，初动能为 $E_c = 10,0\text{ J}$ 。

- 求粒子最终停止前所经过的路程
- 画出粒子在力场 F_x 中的势能 $U(x)$ 的示意图。
- 定性画出粒子速率随其坐标 x 变化的关系图。



题目译自官方英文原文。

答案

- a. 总路程为 $L = 20,0\text{ m}$ 。最终静止位置在壁面处，即 $x = 0$ 。
- b. 取 $U(0) = 0$ ，则

$$U(x) = (10,0\text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

其图像是一条过原点的直线，斜率为 $10,0\text{ J m}^{-1}$ 。

- c. 速率—位置图由若干平方根曲线分支组成，分别表示粒子逐次向外和向内运动的过程。每次外侧转向点到壁面的距离都是前一次的 $9/11$ ；相邻两次到达壁面时的速率之比为 $\sqrt{9/11}$ 。这些分支收敛于 $(x, v) = (0, 0)$ 。若初始运动方向为 $+x$ 方向，则外侧转向点为

$$a_n = \frac{21}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

若初始运动方向朝向壁面，则在最初的向内运动之后，将 $21/11$ 替换为 $19/11$ 。

解答

将力场作用力写为 $F_x = -F$ ，其中

$$F = 10.0 \text{ N}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ N}.$$

摩擦力与运动方向相反。因此，向外运动时的合力为 $-(F + f)$ ，向内运动时的合力为 $-(F - f)$ 。完全反射壁使速度反向，但不改变动能。

a. 总路程

由于 $F > f$ ，粒子不可能在任何 $x > 0$ 的位置保持静止：每当它到达外侧转向点时，都会开始向壁面返回。

为确定最终静止位置，考虑一个距壁面为 A 的转向点。在向内运动的过程中，力场作用力做功 FA ，摩擦力做功 $-fA$ 。因此，到达壁面时的动能为

$$K_w = (F - f)A.$$

反射后，这部分能量用于克服力场作用力和摩擦力向外运动。因此，下一次转向点到壁面的距离 A' 满足

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

所以

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

转向点到壁面的距离以及到达壁面时的速率都趋于零。因此，最终静止位置为 $x_f = 0$ 。此外，每个单程所需的时间都与相应转向点到壁面距离的平方根成正比；余下各段运动的时间构成收敛的等比级数。因此，在这一理想化模型中，无穷多次反射在有限时间内累积发生。

现在对整个运动过程应用动能定理。恒定的力场作用力所做的总功只取决于起点和终点：

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ N})(-1.00 \text{ m}) = 10.0 \text{ J}.$$

摩擦力做功 $-fL$ ，而弹性反射不造成动能损失。因此

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

所以

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

这一结果与初始运动方向无关。

b. 势能

与该力场对应的势能满足

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

由于 $F_x = -F$, 有

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

取 $U(0) = 0$, 得

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

其示意图是一条通过 $(0, 0)$ 的上升直线, 并经过

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

和

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J}).$$

壁面将粒子可到达的区域限制为 $x \geq 0$ 。摩擦力是耗散力, 不包含在这一势能中。

c. 速率与位置的关系

设粒子的质量为 m , 并将其初速率定义为

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

由于题目没有给出质量, 采用 v_0 作为纵轴的标度较为方便。

先考虑初速度指向 $+x$ 方向的情况。在最初向外运动的过程中, 由动能定理得

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

因此, 第一个转向点为

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

利用 a 部分求得的比值, 所有后续转向点为

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

对于终止于 a_n 的一次向外运动, 剩余动能等于到达该转向点所需克服阻力做的功:

$$v_{\rightarrow, n}(x) = \sqrt{\frac{2(F + f)}{m}(a_n - x)}.$$

当 $n = 0$ 时, 粒子只经过 $x_0 \leq x \leq a_0$ 这一段。当 $n \geq 1$ 时, 粒子经过整个区间 $0 \leq x \leq a_n$ 。

从 a_n 向内运动时, 指向壁面的合力大小为 $F - f$, 因此

$$v_{\leftarrow, n}(x) = \sqrt{\frac{2(F - f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

这两个表达式表示的都是速率, 因此均为非负值。

在壁面处, 从 a_n 出发的向内运动分支与下一个向外运动分支的速率连续衔接:

$$v_{w, n} = \sqrt{\frac{2(F - f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F + f)a_{n+1}}{m}}.$$

因此

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

可以按以下步骤绘制定性示意图：

- 从 $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$ 出发，沿一条递减且凹向下的平方根曲线到达 $(1.91 \text{ m}, 0)$ 。
- 沿向内运动分支返回，在图上向左上方移动，到达

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31 v_0).$$

- 反射后，沿下一个向外运动分支到达

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

- 重复上述过程，转向点到壁面的距离逐次减小。每个分支在其外侧转向点处都有一条竖直切线。对于相同的转向距离，向外运动分支位于向内运动分支的上方。
- 这一序列收敛于最终点 $(0, 0)$ 。

同一位置通常对应多个速率，分别属于不同次的运动过程；因此，完整图像并不是 x 的单值函数。

若初速度改为**指向壁面**，则最初的分支为

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} [E_c + (F - f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

第一次到达壁面时的动能为

$$E_c + (F - f)x_0 = 19.0 \text{ J},$$

所以此时的速率为 $\sqrt{1.90} v_0$ 。这次反射之后，转向点为

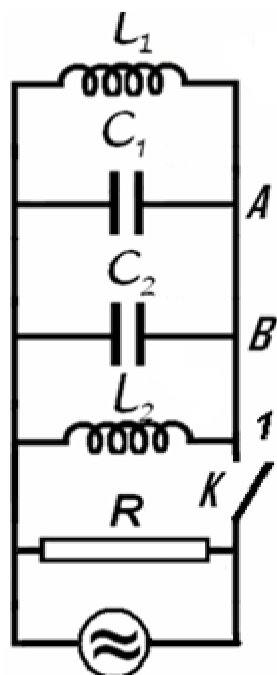
$$b_n = \frac{19}{11} \left(\frac{9}{11}\right)^n \text{ m}.$$

将 a_n 替换为 b_n 后，同样的向外和向内运动分支公式仍然适用。

解答已与官方解答核对。

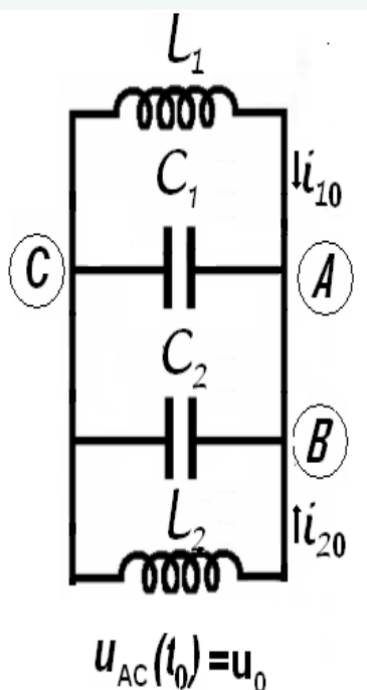
题目 2：不同类型的振荡

考虑图示电路，其中 $L_1 = 10 \text{ mH}$ 、 $L_2 = 20 \text{ mH}$ 、 $C_1 = 10 \text{ nF}$ 、 $C_2 = 5 \text{ nF}$ ，且 $R = 100 \text{ k}\Omega$ 。闭合开关 K 后，电路与交流电源相连接。电源提供的电流强度保持不变，而电流的频率可以改变。



- a. 求使电路中的有功功率达到最大值 P_m 的频率 f_m 与频率差 $\Delta f = f_+ - f_-$ 的比值，其中 f_+ 和 f_- 为使电路中的有功功率等于最大功率 P_m 一半的两个频率。

现在断开开关 K 。在开关刚断开后的瞬间 t_0 ，线圈 L_1 和 L_2 中的电流强度分别为 $i_{01} = 0,1 A$ 和 $i_{02} = 0,2 A$ （电流方向如图所示）；在同一瞬间，电容为 C_1 的电容器两端的电势差为 $u_0 = 40 V$ ：



- b. 计算 $L_1 C_1 C_2 L_2$ 电路中电磁振荡的频率；
- c. 确定导线 AB 中的电流强度；
- d. 计算线圈 L_1 中电流强度的振荡振幅。

忽略线圈之间的互感和导线的电阻。忽略开关闭合或断开时发生的快速暂态过程。

答案

- a. $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$, 其中 $f_m = 15.9 \text{ kHz}$, $\Delta f = 106 \text{ Hz}$ 。
- b. $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$, 对应的角频率为 $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$ 。
- c. $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$, 为恒定电流, 方向从 B 到 A 。
- d. $I_{1,\text{osc}} = 0.204 \text{ A}$ 。以图示初始电流方向为正方向, 电流围绕平均值 -0.100 A 振荡。

解答

a. 受迫振荡电路：谐振与半功率带宽

当 K 闭合时, 两个电容器、两个电感器和电阻均并联连接。它们的等效电容和等效电感为

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ nF}, \quad L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ mH}.$$

上述电感公式利用了题设中不存在互感的条件。

设 I 为电源电流的恒定有效值, 且 $\omega = 2\pi f$ 。电路的导纳为

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

只有 R 消耗有功功率。由于电压有效值为 $I/|Y|$, 有

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

当导纳的无功部分为零时, 功率达到最大值:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

因此,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

在任一半功率频率处,

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

两个正解为

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

因此, 它们之差恰好为

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

这里不需要采用窄带近似。

代入数值得

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2,$$

所以

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Hz},$$

且

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Hz}.$$

因此, 所求比值为

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

b. 自由电磁振荡

开关断开后, 电阻和电源不再对 LC 电路产生负载作用。在题设的理想化条件下, 电路中的振荡是无阻尼的。

定义

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

并将两个电感电流 i_1, i_2 的正方向均取为从左侧母线流向右侧母线。这与图示初始方向一致, 因此

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

由电感的电压关系得

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

从右向左流过电容器的总电流为 $C\dot{u}$ 。因此, 由基尔霍夫电流定律得

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

对时间求导, 得

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

即

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

所以

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

为求解其余各问, 先求出初始时刻电压对时间的导数:

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

令 $\theta = \omega_0(t - t_0)$, 则电压为

$$u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}.$$

c. 导线 AB 中的电流

设 j 为 AB 中的电流，以从 A 到 B 为正方向。在 A 点，流入的电感电流分流至 C_1 和 AB ：

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

其对时间的导数为

$$\dot{j} = -\frac{u}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left(C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

对于给定的元件，

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

由此可得

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

因而

$$\dot{j} = 0.$$

因此，尽管电容器两端的电压和线圈中的电流都在振荡， AB 中的电流仍保持恒定。

由初始条件可求得其值：

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

负号表示实际方向与所选参考方向相反：

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A, 从 } B \text{ 到 } A.$$

d. L_1 中电流的振荡振幅

利用 $i_1 = j + C_1 \dot{u}$ 及上述结果，得

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A}. \end{aligned}$$

对于振荡项 $a \cos \theta + b \sin \theta$ ，其振幅为 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 。因此，

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

常数项表示由理想电感维持的持续环流。因此，0.204 A 是相对于平均值 -0.100 A 的振幅；带符号的电流值约在 -0.304 A 到 $+0.104 \text{ A}$ 之间变化。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：棱镜

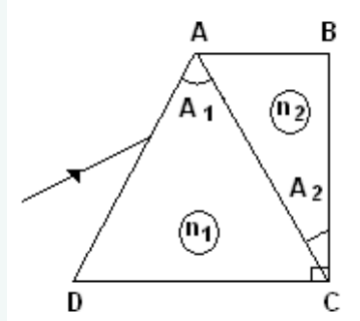
两个色散棱镜的顶角分别为 $\hat{A}_1 = 60^\circ$ 和 $\hat{A}_2 = 30^\circ$ ，如下面的图所示胶合在一起 ($\hat{C} = 90^\circ$)。两棱镜的折射率随波长变化的关系为

$$n_1(\lambda) = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2};$$

$$n_2(\lambda) = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$$

其中

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- 求入射光的波长 λ_0 ，使其以任意入射角通过棱镜时，在 AC 面上均不发生折射偏转；并求两棱镜对应的折射率。
- 画出波长分别为 $\lambda_{red}, \lambda_0, \lambda_{violet}$ 的三种光以相同角度入射该棱镜系统时，在系统中的光路。
- 求波长为 λ_0 的光线在该系统中的最小偏向角。
- 计算入射方向和出射方向均平行于 DC 的光线的波长。

题目译自官方英文原文。

答案

- a. $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ ，对应的折射率为 $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$ 。
- b. 在 AC 面上，红光向法线偏折， λ_0 的光沿直线传播，紫光则偏离法线。对于同一水平入射光束，出射光线从上到下依次为红光、 λ_0 的光、紫光，向下的偏折程度依次增大。
- c. $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$ 。
- d. $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$ ，位于红外波段。

解答

我们采用几何光学和斯涅尔定律，将周围空气的折射率取为 1，并忽略胶合剂的任何光学效应。全程不使用小角度近似。

由几何关系可得

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

因此，以平行于 DC 的向右方向为基准：

- AD 面指向棱镜内部的法线向下倾斜 30° ；
- AC 面由棱镜 1 指向棱镜 2 的法线向上倾斜 30° ；
- BC 面指向棱镜外部的法线沿水平方向。

a. 在 AC 面上不发生折射偏转的波长

在公共界面上，斯涅尔定律为

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

要使传播方向保持不变，必须有 $t = i$ 。要求这一条件对所有入射角都成立，而不仅仅是在垂直入射时成立，便得到

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

于是

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

因此

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

波长取正值，得

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

对应的折射率为

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

b. 光路

两棱镜的折射率都随波长增大而减小。因此，在入射面 AD 上，紫光向法线偏折的程度比 λ_0 的光更大，而红光的偏折程度更小。

在公共界面上，相关的折射率差为

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

由于

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

在 AC 面上的折射情况如下：

光	折射率比较	在 AC 面上的传播情况
红光	$n_1 < n_2$	向法线偏折
λ_0	$n_1 = n_2$	沿直线传播
紫光	$n_1 > n_2$	偏离法线

为准确地用文字描述光路图，可以取同一水平入射光束，其在 AD 面上的入射角为 30° 。选择足够高的入射点，使三条光线都能到达 BC 面。

- 在 AD 面上，三条光线均向下偏折，靠近指向棱镜内部的法线。在棱镜 1 内，红光在上， λ_0 的光居中，紫光在下。
- 在 AC 面上，画出其法线，方向为水平向上倾斜 30° 。红光向上转向这条法线， λ_0 的光保持直线传播，紫光则进一步向下偏折，远离法线。
- 在 BC 面上，法线沿水平方向。这些可见光线进入空气时均进一步向下偏折，远离这条法线。

因此，出射光线的排列为红光在 λ_0 的光上方，紫光在下方，且紫光的总偏向角最大。

c. λ_0 的光的最小偏向角

对于这一波长，两棱镜的折射率均为 $n = 1.5$ ，因此内部界面 AC 不产生光学效应。入射面 AD 和出射面 BC 相当于一个棱镜的两个折射面，其等效顶角为

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

设 i, e 为外部的入射角和出射角， r, r' 为相应的内部角度。由棱镜的几何关系和斯涅尔定律可得

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

因此

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

当光路对称时，偏向角取得最小值，此时

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

例如，对上式求导得

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

该导数在 $r = \alpha/2$ 处为零，并在该处由负变正。

于是

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

并且

$$\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ.$$

d. 入射光线与出射光线平行

入射光线沿水平方向，因此它在 AD 面上的入射角为 30° 。若该处的折射角为 r ，则由斯涅尔定律得

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

出射光线也必须沿水平方向。由于 BC 面竖直，光线垂直于 BC 面出射。根据斯涅尔定律，棱镜 2 内的光线也必须沿水平方向传播。

棱镜 1 内的光线与水平方向成 $r - 30^\circ$ 角。因此，它在 AC 面上的入射角为

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

棱镜 2 内的水平光线与 AC 面的法线成 30° 角。因此

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

展开式 (2)，并利用式 (1)，得

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

平方并化简，得

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

引入正的无量纲量

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

则

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

代入式 (3), 得

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

即

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

只有正根具有物理意义:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

因此

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

所以

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

作为检验, 这一波长对应

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

且 $r \approx 25.2527^\circ$ 。此时在 AC 面上的入射角为 34.7473° , 折射角恰为 30° ; 随后光线垂直入射 BC 面, 并沿水平方向出射。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处, 均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 4: 康普顿散射

一个波长为 λ_i 的光子被一个运动的自由电子散射。散射后, 该电子停止运动, 产生的波长为 λ_0 的光子沿与入射光子方向成 $\theta = 60^\circ$ 角的方向射出, 随后又被第二个静止的自由电子散射。在第二次散射过程中, 产生一个波长为 $\lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的光子, 其出射方向与波长为 λ_0 的光子的方向成 $\theta = 60^\circ$ 角。求第一个电子在相互作用前的德布罗意波长。已知下列常量:

$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ – 普朗克常量

$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ – 电子质量

$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ – 真空中的光速

本题的目的是计算第一个电子的速率、动量和波长。

用下列符号描述各光子:

表 4.1

	初始光子	第一次散射后的光子	最终光子
动量	$\vec{p}_i$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_f$
能量	E_i	E_0	E_f
波长	λ_i	λ_i	λ_f

用下列符号描述各电子：

表 4.2

	碰撞前的第一个电子	碰撞后的第一个电子	碰撞前的第二个电子	碰撞后的第二个电子
动量	$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$
能量	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
速度	$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 IV (7 分) — 第一个电子的初始速率、动量大小和德布罗意波长分别为

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{\text{dB}} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

中间光子的波长为 $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$, 且 $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

解答

题目 IV。所给题干中没有编号的小问。

对每次碰撞应用能量守恒和动量守恒。对于光子，

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

而电子满足

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

我们首先使用精确的相对论关系式。

由第二次散射确定 λ_0 。

第二个电子初始时静止，因此

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

入射光子与出射光子的方向夹角为 θ ，因此

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

代入电子的能量—动量关系式，得到

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0E_f \cos \theta.$$

消去相同项后,

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0E_f(1 - \cos \theta).$$

两边除以 E_0E_f , 并代入 $E = hc/\lambda$, 得到康普顿波长位移:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

利用给定的常量,

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

由于 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

因此

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

由第一次散射确定 λ_i 。

第一个电子在碰撞后静止。因此

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

于是,

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

且

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0E_i \cos \theta.$$

再次使用电子的能量-动量关系式,

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0E_i \cos \theta,$$

化简得

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0E_i(1 - \cos \theta).$$

所以

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

光子在这次碰撞中获得能量, 因此其波长减小。由于两次散射的散射角相等, 第一次碰撞中的波长减小量等于第二次碰撞中的波长增加量:

$$\boxed{\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}.}$$

电子的初始速率。

第一个电子的初始动能全部转移给光子:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

数值上,

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

写成 $E_{1e} = \gamma mc^2$ ，则有

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

因此

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

所以

$$\boxed{v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.}$$

由于 $v_{1e}/c \approx 0.0194$ ，在所给数据的精度下，使用非相对论近似 $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$ 也足够准确。

电子的初始动量。

由动量守恒，可通过下列关系确定其动量的方向和大小：

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1e} &= \vec{p}_0 - \vec{p}_i, \\ p_{1e} &= h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}. \end{aligned}$$

代入各波长，得到

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

这与 $p_{1e} = \gamma mv_{1e}$ 一致。因此

$$\boxed{p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.}$$

电子的初始德布罗意波长。

德布罗意关系式为

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

等价地，利用 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，有

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

因此

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

即

$$\boxed{\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.}$$

解答已与官方解答核对。

题目 5: IPhO 的标志

国际物理奥林匹克竞赛的标志如下图所示。

图中展示了流体射流的轨迹沿圆柱面弯曲的现象。流体的轨迹并非预期的虚线，而是图中的圆弧实线。

请定性解释这一现象（该现象由罗马尼亚工程师亨利·科恩达于 1936 年首次观察到）。

本题不计入奥林匹克竞赛的总分。最佳解答将获得特别奖。



题目译自官方英文原文。

答案

- **题目 V.** 这是**科恩达效应**。射流卷吸周围的流体，而圆柱体限制了流体的补充，使射流与表面之间被卷吸走的流体难以得到补充。由此在靠近圆柱体的一侧形成较低的压强，产生指向内侧的力，使射流绕着圆柱体弯曲。

解答

题目 V.

考虑一股近似沿切向从圆柱体旁流过的射流。在图示的弯曲区域内，我们忽略重力。

通过黏性剪切作用——如果流动是湍流，还包括湍流混合作用——射流将动量传递给周围的流体，并带动其中一部分流体一起流动。这一过程称为**卷吸**。对于周围环境在其他方面对称的自由射流，流体可以从两侧流入，因此卷吸不会使射流优先向某一侧偏转。

附近的圆柱体改变了这一情况。射流与圆柱体之间的流体被卷吸进入射流，但固体表面限制了补充流体的流入。因此，在靠近圆柱体的一侧形成了低压区。外露一侧较高的压强便将射流推向圆柱体。

一旦射流沿曲面流动，射流两侧的压强差就会提供维持其弯曲轨迹所需的向心加速度。为定量表述这一点，令 r 表示到圆柱体轴线的距离， v 为局部切向速率， ρ 为流体密度。对于局部呈圆周运动的流动，在射流主体内部的法向动量平衡中忽略黏性力，可得

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{因此} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

因此，压强随到圆柱体的距离增大而增大：压力指向内侧，恰好满足使射流转弯的要求。

例如，对于厚度为 $h \ll R$ 、密度近似恒定、主体流动的代表性速率为 U 的薄射流，所需压强差的量级为

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

其中， R 为圆柱体的半径。

卷吸建立了不对称的压强场，而这一压强场使射流弯曲。只要流动能够维持曲率所要求的压强差，射流就会保持附着；如果不能，射流便会与表面分离。

解答已与官方解答核对。