

IPhO 1983

Teorik sorular ve çözümler · Bükreş, Romanya · 5 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1983/

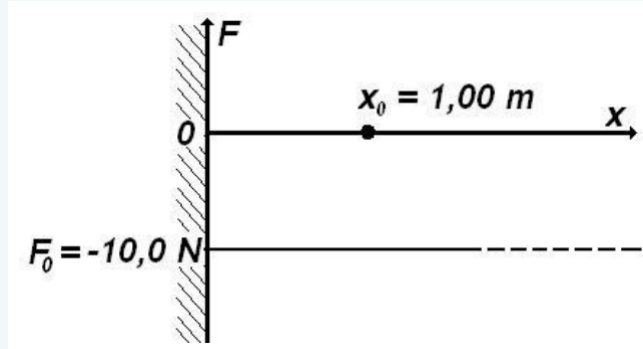
Soru 1: Sıçrayan parçacık

Bir parçacık, aşağıdaki şekilde (x 'in fonksiyonu olarak) gösterildiği gibi, Ox üzerindeki bileşeni $F_x = F_0$ olan bir kuvvetin etkisi altında pozitif Ox eksenı boyunca (tek boyutlu durumda) hareket etmektedir. Ox ekseninin başlangıç noktasına tam yansıtıcı bir duvar yerleştirilmiştir.

Parçacığa, bulunduğu her yerde, büyüklüğü sabit ve $F_f = 1,00 \text{ N}$ olan bir sürtünme kuvveti etki etmektedir.

Parçacık, $x = x_0 = 1,00 \text{ m}$ noktasından $E_c = 10,0 \text{ J}$ kinetik enerjiyle harekete başlamaktadır.

- Parçacığın tamamen durana kadar aldığı toplam yolun uzunluğunu bulun
- F_x kuvvet alanındaki parçacığın $U(x)$ potansiyel enerjisinin grafiğini kabaca çizin.
- Parçacığın süratinin x koordinatına bağlılığını nitel olarak çizin.



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a. Alınan toplam yolun uzunluğu $L = 20,0 \text{ m}$ olur. Son durma konumu duvar, yani $x = 0$ noktasıdır.
- b. $U(0) = 0$ seçilirse,

$$U(x) = (10,0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

Grafiği, başlangıç noktasından geçen ve eğimi $10,0 \text{ J m}^{-1}$ olan bir doğrudur.

- **c.** Sürat–konum grafiği, art arda duvardan uzaklaşma ve duvara yaklaşma hareketlerini temsil eden karekök eğrisi kollarından oluşur. Her bir sonraki dış dönüş uzaklığı, bir öncekinin $9/11$ katıdır; duvardaki ardışık süratler $\sqrt{9/11}$ çarpanıyla azalır. Kollar $(x, v) = (0, 0)$ noktasına yakınsar. Başlangıç hareketi $+x$ yönündeyse dış dönüş noktaları

$$a_n = \frac{21}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olur. Başlangıç hareketi duvara doğruysa, ilk yaklaşma hareketinden sonra $21/11$ yerine $19/11$ kullanın.

Çözüm

Alan kuvvetini $F_x = -F$ biçiminde yazalım; burada

$$F = 10.0 \text{ N}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ N}.$$

Sürtünme harekete karşı koyar. Dolayısıyla net kuvvet, duvardan uzaklaşırken $-(F + f)$, duvara yaklaşırken ise $-(F - f)$ olur. Tam yansıtıcı bir duvar, kinetik enerjiyi değiştirmeden hızın yönünü tersine çevirir.

a. Toplam yol uzunluğu

$F > f$ olduğundan, parçacık herhangi bir $x > 0$ noktasında durgun kalmaz: bir dış dönüş noktasına her ulaştığında duvara doğru geri hareket etmeye başlar.

Son durma konumunu belirlemek için duvardan A uzaklıktaki bir dönüş noktasını ele alalım. Duvara yaklaşma hareketi sırasında alanın yaptığı iş FA , sürtünmenin yaptığı iş ise $-fA$ olur. Böylece duvara ulaşıldığında kinetik enerji

$$K_w = (F - f)A.$$

olur. Yansımadan sonra bu enerji, hem alana hem de sürtünmeye karşı duvardan uzaklaşmak için harcanır. Bu nedenle bir sonraki dönüş uzaklığı A' ,

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

bağıntısını sağlar; dolayısıyla

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

Dönüş uzaklıkları ve duvardaki süratler sıfıra yaklaşır. Bu nedenle son durma konumu $x_f = 0$ olur.

Ayrıca, her yarım yolculuğun süresi, ilgili dönüş uzaklığının kareköküyle orantılıdır; kalan süreler yakınsak geometrik toplamlar oluşturur. Dolayısıyla bu idealleştirilmiş modelde sonsuz sayıda yansıma sonlu bir süre içinde gerçekleşir.

Şimdi iş–enerji teoremini hareketin tamamına uygulayalım. Sabit alanın yaptığı toplam iş yalnızca başlangıç ve bitiş noktalarına bağlıdır:

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ N})(-1.00 \text{ m}) = 10.0 \text{ J}.$$

Sürtünme $-fL$ kadar iş yaparken, esnek yansımalar kinetik enerji kaybına neden olmaz. Bu yüzden

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

Böylece

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

Bu sonuç, başlangıçtaki hareket yönünden bağımsızdır.

b. Potansiyel enerji

Alanla ilişkili potansiyel enerji

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

bağıntısını sağlar. $F_x = -F$ olduğundan,

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

$U(0) = 0$ seçimiyle,

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

Grafik, $(0, 0)$ noktasından geçen, yükselen bir doğru olup

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

ve

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J}).$$

noktalarından geçer. Duvar, erişilebilir bölgeyi $x \geq 0$ ile sınırlar. Sürtünme enerji kaybına yol açar ve bu potansiyele dahil edilmez.

c. Konumun fonksiyonu olarak sürat

Parçacığın kütlesi m olsun ve başlangıç süratini

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

ile tanımlayalım. Kütle verilmediği için v_0 , düşey ekseninde uygun bir ölçek sağlar.

Önce başlangıç hızının $+x$ yönünde olduğunu kabul edelim. İlk uzaklaşma hareketinde iş-enerji teoremi

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla ilk dönüş noktası

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

olur.

a kısmında bulunan oran kullanıldığında sonraki tüm dönüş noktaları

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

ile verilir.

a_n noktasında sona eren bir uzaklaşma hareketi için kalan kinetik enerji, bu dönüş noktasına ulaşmak için gereken işe eşittir:

$$v_{\rightarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F+f)}{m}(a_n - x)}.$$

$n = 0$ için yalnızca $x_0 \leq x \leq a_0$ aralığı kat edilir. $n \geq 1$ için $0 \leq x \leq a_n$ aralığının tamamı kat edilir.

a_n noktasından duvara yaklaşma hareketinde, duvara doğru olan net kuvvetin büyüklüğü $F - f$ olur ve buradan

$$v_{\leftarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F-f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

elde edilir. Her iki ifade de **sürati** belirtir; dolayısıyla ikisi de negatif değildir.

Duvarda, a_n noktasından gelen yaklaşma kolu, sürat bakımından süreklilik gösterecek biçimde bir sonraki uzaklaşma koluyla birleşir:

$$v_{w,n} = \sqrt{\frac{2(F-f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F+f)a_{n+1}}{m}}.$$

Böylece

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

Nitel grafik şu şekilde çizilebilir:

- $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$ noktasından başlayın. Azalan, aşağı doğru içbükey bir karekök eğrisini izleyerek $(1.91 \text{ m}, 0)$ noktasına gidin.
- Yaklaşma kolu boyunca geri dönerek grafikte sola ve yukarı doğru ilerleyin ve

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31v_0).$$

noktasına ulaşın.

- Yansımadan sonra bir sonraki uzaklaşma kolunu izleyerek

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

noktasına gidin.

- Giderek küçülen dönüş uzaklıklarıyla bunu tekrarlayın. Her kolun dış dönüş noktasındaki teğeti düşeydir. Aynı dönüş uzaklığı için uzaklaşma kolu, yaklaşma kolunun üzerinde yer alır.
- Bu dizi, son nokta olan $(0, 0)$ 'a yakınsar.

Aynı konumda genellikle farklı geçişlere karşılık gelen birden fazla sürat vardır; bu nedenle grafiğin tamamı, x 'in tek değerli bir fonksiyonu değildir.

Başlangıç hızı bunun yerine **duvara doğru** yönelmişse başlangıç kolu

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_c + (F-f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

olur. Duvarla ilk karşılaşmadaki kinetik enerjisi

$$E_c + (F-f)x_0 = 19.0 \text{ J},$$

olduğundan, sürati $\sqrt{1.90} v_0$ olur. Bu yansımadan sonra dönüş noktaları

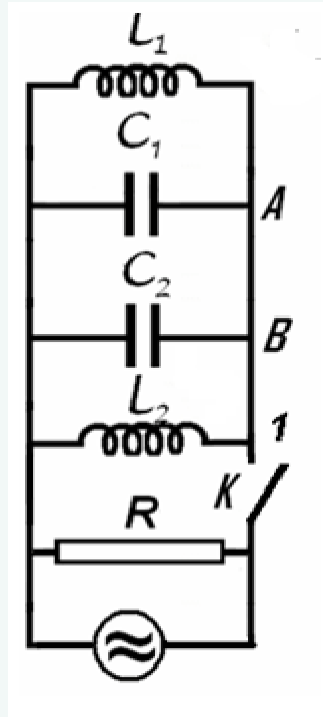
$$b_n = \frac{19}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m.}$$

ile verilir. Aynı uzaklaşma ve yaklaşma kolu formülleri, a_n yerine b_n konularak geçerliliğini korur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

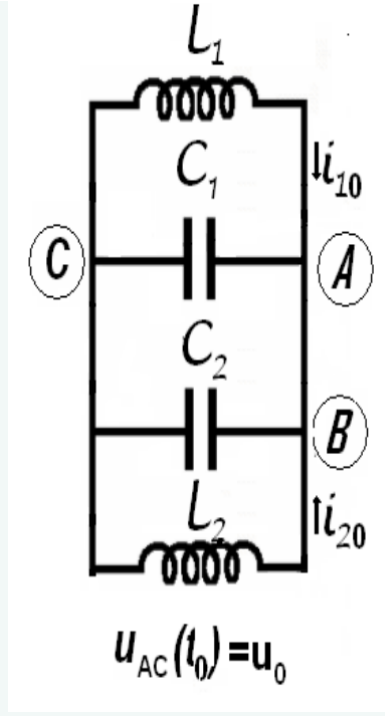
Soru 2: Farklı bir salınım türü

Şekildeki elektrik devresini ele alalım; bu devrede $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$ ve $R = 100 \text{ k}\Omega$ değerlerindedir. K anahtarı kapalıyken devre bir alternatif akım kaynağına bağlıdır. Kaynağın sağladığı akımın şiddeti sabittir, frekansı ise değiştirilebilir.



a. Devredeki aktif gücün en büyük değeri P_m 'ye ulaştığı f_m frekansının, devredeki aktif gücün en büyük güç P_m 'nin yarısı olduğu f_+ ve f_- frekansları arasındaki $\Delta f = f_+ - f_-$ farkına oranını bulunuz.

Şimdi K anahtarı açılıyor. Anahtarın açılmasından hemen sonraki t_0 anında, L_1 ve L_2 bobinlerindeki akımların şiddetleri $i_{01} = 0,1 \text{ A}$ ve $i_{02} = 0,2 \text{ A}$ 'dir (akımlar şekilde gösterilen yönlerde akar); aynı anda, sığası C_1 olan kondansatörün uçları arasındaki potansiyel farkı $u_0 = 40 \text{ V}$ 'tur:



b. $L_1 C_1 C_2 L_2$ devresindeki elektromanyetik salınımın frekansını hesaplayınız;

c. AB iletkenindeki elektrik akımının şiddetini belirleyiniz;

d. L_1 bobinindeki elektrik akımının şiddetinin salınım genliğini hesaplayınız.

Bobinlerin karşılıklı indüksiyonunu ve iletkenlerin elektriksel direncini ihmal ediniz. Anahtar kapatılırken veya açılırken meydana gelen hızlı geçiş olaylarını ihmal ediniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a. $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$; burada $f_m = 15.9 \text{ kHz}$ ve $\Delta f = 106 \text{ Hz}$ 'dir.
- b. $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$; buna karşılık gelen açısal frekans $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$ 'dir.
- c. $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$, sabittir ve B 'den A 'ya yönelmiştir.
- d. $I_{1,osc} = 0.204 \text{ A}$. Gösterilen başlangıç akımı yönü pozitif alındığında akım, -0.100 A ortalama değeri etrafında salınır.

Çözüm

a. Zorlanmış devre: rezonans ve yarı güç bant genişliği

K kapalıyken her iki kondansatör, her iki bobin ve direnç paralel bağlıdır. Eşdeğer sığa ve indüktansları

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ nF}, \quad L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ mH}.$$

olarak bulunur. İndüktans formülünde, karşılıklı indüksiyonun bulunmadığı yönündeki varsayım kullanılmıştır.

Kaynak akımının sabit etkin değeri I ve $\omega = 2\pi f$ olsun. Devrenin admitansı

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

şeklindedir. Yalnızca R aktif güç harcar. Gerilimin etkin değeri $I/|Y|$ olduğundan,

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

En büyük değer, admitansın reaktif kısmı sıfır olduğunda elde edilir:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

Dolayısıyla,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

Yarı güç frekanslarının her birinde,

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

İki pozitif çözüm

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

şeklindedir. Bu nedenle aralarındaki fark tam olarak

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

olur. Dar bant yaklaşımına gerek yoktur.

Sayısal olarak,

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2,$$

olduğundan

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Hz},$$

ve

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Hz}.$$

Böylece istenen oran

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

olarak bulunur.

b. Serbest elektromanyetik salınım

Anahtar açıldıktan sonra direnç ve kaynak artık LC devresini yüklemeyi. Belirtilen idealleştirmeler altında devrenin salınımı sönümsüzdür.

Gerilimi

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

olarak tanımlayalım ve her iki bobin akımı i_1, i_2 için soldaki iletken hattın sağdaki iletken hatta doğru olan yönü pozitif alalım. Bu yönler gösterilen başlangıç yönleriyle aynıdır; dolayısıyla

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

Bobinlerin gerilim bağıntıları

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

sonucunu verir. Sağdan sola doğru toplam kondansatör akımı $C\dot{u}$ 'dur. Bu nedenle Kirchhoff'un akım yasası

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

sonucunu verir. Türev alındığında,

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

veya

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

elde edilir. Böylece

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

Kalan kısımlarda kullanılacak olan gerilimin başlangıçtaki türevi

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

şeklindedir. $\theta = \omega_0(t - t_0)$ yazılırsa gerilim

$$\boxed{u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}}.$$

olarak bulunur.

c. AB iletkenindeki akım

AB 'deki akım j olsun ve A 'dan B 'ye doğru olan yön pozitif alınsın. A noktasında, gelen bobin akımı C_1 ile AB arasında bölünür:

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

Bu akımın türevi

$$\dot{j} = -\frac{\dot{u}}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left(C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

şeklindedir.

Verilen devre elemanları için,

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

Buradan

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

ve dolayısıyla

$$\dot{j} = 0.$$

elde edilir. Böylece kondansatör gerilimi ve bobin akımları salınmasına rağmen AB 'deki akım sabittir.

Akımın değeri başlangıç koşullarından bulunur:

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

Eksi işareti, akımın seçilen referans yönünün tersine aktığını gösterir:

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A, başlangıç: } B \text{ bitiş: } A.$$

d. L_1 'deki akımın salınım genliği

$i_1 = j + C_1 \dot{u}$ ve yukarıdaki sonuçlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A}. \end{aligned}$$

$a \cos \theta + b \sin \theta$ biçimindeki bir salınım teriminin genliği $\sqrt{a^2 + b^2}$ 'dir. Dolayısıyla,

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

Sabit terim, ideal bobinler sayesinde devrede sürekli dolaşan bir akımı temsil eder. Dolayısıyla 0.204 A , -0.100 A ortalama değeri etrafındaki salınımın genliğidir; işaretli akım değeri yaklaşık -0.304 A ile $+0.104 \text{ A}$ arasında değişir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

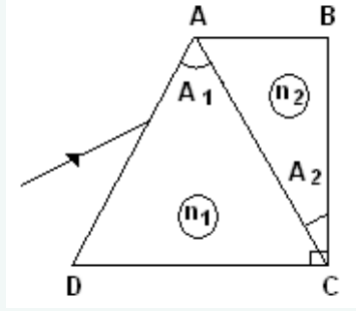
Soru 3: Prizmalar

Tepe açıları $\hat{A}_1 = 60^\circ$ ve $\hat{A}_2 = 30^\circ$ olan, ışığı renklerine ayıran iki prizma, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi birbirine yapıştırılmıştır ($\hat{C} = 90^\circ$). Prizmaların kırılma indislerinin dalga boyuna bağılılığı şu bağıntılarla verilmektedir:

$$\begin{aligned} n_1(\lambda) &= a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}; \\ n_2(\lambda) &= a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

burada

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- Herhangi bir gelme açısında AC yüzeyinde kırılmadan prizmalardan geçen ışının λ_0 dalga boyunu belirleyiniz; prizmaların bu dalga boyuna karşılık gelen kırılma indislerini belirleyiniz.
- Sisteme aynı açıyla gelen λ_{red} , λ_0 , λ_{violet} dalga boylarındaki üç farklı ışınım için ışınların prizma sisteminde izlediği yolları çiziniz.
- Dalga boyu λ_0 olan bir ışın için sistemdeki en küçük sapma açısını belirleyiniz.
- Sisteme DC 'ye paralel doğrultuda girip sistemden yine DC 'ye paralel doğrultuda çıkan ışının dalga boyunu hesaplayınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a. $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, bu dalga boyunda $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$.
- b. AC yüzeyinde kırmızı ışın normale yaklaşarak kırılır, λ_0 doğrultusunu değiştirmeden ilerler ve mor ışın normalden uzaklaşarak kırılır. Yatay doğrultuda gelen ortak bir ışık demeti için çıkan ışınlar, aşağı yönlü sapmaları artacak biçimde, yukarıdan aşağıya **kırmızı**, λ_0 , **mor** olarak sıralanır.
- c. $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$.
- d. $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$, kızılötesi bölgededir.

Çözüm

Çevredeki havanın kırılma indisini 1 alıp yapıştırıcının tüm optik etkilerini ihmal ederek geometrik optiği ve Snell yasasını kullanıyoruz. Küçük açı yaklaşımı kullanılmamaktadır.

Geometriden

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

elde edilir. Dolayısıyla, DC 'ye paralel ve sağa doğru olan yön referans alındığında:

- AD 'nin içeriye yönelen normal 30° aşağıya yönelir;
- AC 'nin prizma 1'den prizma 2'ye yönelen normal 30° yukarıya yönelir;
- BC 'nin dışarıya yönelen normal yataydır.

a. AC 'de kırılmanın olmadığı dalga boyu

Ortak yüzeyde Snell yasası

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

şeklindedir. Doğrultunun değişmemesi için $t = i$ olmalıdır. Bunun yalnızca dik gelme durumunda değil, her gelme açısında sağlanmasını istemek

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

koşulunu verir. Böylece

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

ve dolayısıyla

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

Pozitif dalga boyunu alırsak,

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

Bu dalga boyuna karşılık gelen indisler

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

olur.

b. Işın yolları

Her iki indis de dalga boyu arttıkça azalır. Bu nedenle, giriş yüzeyi AD 'de mor ışın normale λ_0 'dan daha fazla yaklaşarak kırılırken kırmızı ışın daha az yaklaşarak kırılır.

Ortak yüzeyde, ilgili indis farkı

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

şeklindedir.

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

olduğundan, AC 'deki kırılmalar şöyledir:

Işınım	İndislerin karşılaştırılması	AC 'deki davranışı
Kırmızı	$n_1 < n_2$	Normale yaklaşarak kırılır
λ_0	$n_1 = n_2$	Doğrultusunu değiştirmeden ilerler
Mor	$n_1 > n_2$	Normalden uzaklaşarak kırılır

Işın yollarını kesin biçimde sözle betimlemek için AD 'deki gelme açısı 30° olan, yatay doğrultuda gelen ortak bir ışık demeti kullanılabilir. Giriş noktasını, üç ışının da BC 'ye ulaşabileceği kadar yüksekte seçiniz.

- AD 'de üç ışın da içeriye yönelen normale yaklaşarak aşağıya doğru kırılır. Prizma 1 içinde kırmızı ışın üstte, λ_0 ortada ve mor ışın alttadır.
- AC 'de normali yatayın 30° yukarısına yönelmiş olarak çiziniz. Kırmızı ışın bu normale yaklaşarak yukarıya döner, λ_0 doğrultusunu değiştirmez ve mor ışın normalden uzaklaşarak daha da aşağıya döner.

3. BC 'de normal yataydır. Görünür ışınlar havaya geçerken bu normalden uzaklaşarak daha da aşağıya doğru kırılır.

Dolayısıyla çıkıştaki sıralamada **kırmızı λ_0 'ın üstünde, mor ise altındadır** ve en büyük toplam sapma mor ışında görülür.

c. λ_0 için en küçük sapma

Bu dalga boyunda her iki prizmanın indisi de $n = 1.5$ olduğundan iç yüzey AC 'nin optik bir etkisi yoktur. Giriş ve çıkış yüzeyleri AD ile BC , etkin tepe açısı

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

olan tek bir prizmanın yüzeyleri gibi davranır.

Dış ortamdaki gelme ve çıkış açıları i, e , bunlara karşılık gelen iç açılar ise r, r' olsun. Prizmanın geometrisi ve Snell yasası

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

bağıntılarını verir. Dolayısıyla

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

En küçük sapma, simetrik ışın yolu için gerçekleşir:

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

Örneğin, önceki ifadenin türevi alınırsa

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

elde edilir. Bu türev $r = \alpha/2$ 'de sıfır olur ve burada negatiften pozitifte geçer.

Böylece

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

ve

$$\boxed{\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ}.$$

d. Gelen ve çıkan ışınların paralel olması

Gelen ışın yatay olduğundan AD 'deki gelme açısı 30° 'dir. Buradaki kırılma açısı r ise Snell yasası

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

bağıntısını verir.

Çıkan ışın da yatay olmalıdır. BC düşey olduğundan çıkış BC 'ye diktir. Bu durumda Snell yasası, prizma 2 içindeki ışının da yatay olmasını gerektirir.

Prizma 1 içindeki ışın, yatayla $r - 30^\circ$ açı yaparak ilerler. Dolayısıyla AC 'deki gelme açısı

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

olur. Prizma 2 içindeki yatay ışın, AC 'nin normaliyle 30° açı yapar. Bu nedenle

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

Denklem (2)'yi açıp denklem (1)'i kullanırsak,

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Karesini alıp sadeleştirince

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

elde edilir.

Pozitif ve boyutsuz

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

niceliğini tanımlayalım. Bu durumda

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

Denklem (3)'te yerine koymak

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

ya da

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

sonucunu verir. Yalnızca pozitif kök fiziksel olarak anlamlıdır:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

Dolayısıyla

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

böylece

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

Kontrol amacıyla, bu dalga boyu için

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

ve $r \approx 25.2527^\circ$ elde edilir. Bu durumda AC' 'deki gelme açısı 34.7473° olur ve kırılma açısı tam olarak 30° 'dir; ışın daha sonra BC' 'ye dik olarak ulaşır ve yatay olarak çıkar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 4: Compton saçılması

Dalga boyu λ_i olan bir foton, hareket hâlindeki serbest bir elektron tarafından saçılır. Bunun sonucunda elektron durur ve gelen fotonun doğrultusuna göre $\theta = 60^\circ$ açıyla saçılan, dalga boyu λ_0 olan foton, durgun ikinci bir serbest elektron tarafından yeniden saçılır. Bu ikinci saçılma

sürecinde, dalga boyu $\lambda_f = 1,25 \times 10^{-10} \text{ m}$ olan bir foton, dalga boyu λ_0 olan fotonun doğrultusuna göre $\theta = 60^\circ$ açıyla ortaya çıkar. İlk elektronun etkileşimden önceki de Broglie dalga boyunu bulunuz. Aşağıdaki sabitler bilinmektedir:

$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ - Planck sabiti

$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ - elektronun kütlesi

$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ - ışığın boşluktaki hızı

Sorunun amacı, ilk elektronun hız, momentum ve dalga boyu değerlerini hesaplamaktır.

Fotonları tanımlamak için aşağıdaki gösterimler kullanılmaktadır:

Tablo 4.1

	başlangıçtaki foton	ilk saçılmadan sonraki foton	son foton
momentum	$\vec{p}_i$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_f$
enerji	E_i	E_0	E_f
dalga boyu	λ_i	λ_i	λ_f

Elektronları tanımlamak için aşağıdaki gösterimler kullanılır:

Tablo 4.2

	çarpışmadan önceki ilk elektron	çarpışmadan sonraki ilk elektron	çarpışmadan önceki ikinci elektron	çarpışmadan sonraki ikinci elektron
momentum	$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$
enerji	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
hız	$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- Soru IV (7 puan)** — İlk elektronun başlangıçtaki sürati, momentum büyüklüğü ve de Broglie dalga boyu şöyledir:

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

İki saçılma arasındaki fotonun dalga boyu $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$ olup $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ olur.

Çözüm

Soru IV. Verilen soru metninde numaralandırılmış alt kısımlar yoktur.

Her çarpışmaya enerji ve momentumun korunumu yasalarını uyguluyoruz. Bir foton için

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

iken, bir elektron

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

bağıntısını sağlar. Başlangıçta tam görelilik bağıntılarını kullanırız.

İkinci saçılma λ_0 değerini belirler.

İkinci elektron başlangıçta durgundur; dolayısıyla

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

Gelen ve saçılan fotonlar arasındaki açı θ olduğundan

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Bu ifade elektronun enerji-momentum bağıntısında yerine konulduğunda

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

elde edilir. Terimler sadeleştirildikten sonra

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0 E_f (1 - \cos \theta).$$

Her iki tarafı $E_0 E_f$ ile bölüp $E = hc/\lambda$ ifadesini yerine koyarak Compton kaymasını elde ederiz:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Verilen sabitlerle

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

ve dolayısıyla

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

İlk saçılma λ_i değerini belirler.

İlk elektron çarpışmadan sonra durur. Dolayısıyla

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

Bunun sonucunda

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

ve

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta.$$

Elektronun enerji-momentum bağıntısını yeniden kullanarak

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta,$$

elde ederiz; bu ifade sadeleştirilince

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0 E_i (1 - \cos \theta).$$

Böylece

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

Foton bu çarpışmada enerji kazanır, dolayısıyla dalga boyu azalır. Her iki saçılma açısı eşit olduğundan, ilk çarpışmadaki azalma ikinci çarpışmadaki artışa eşittir:

$$\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

Elektronun başlangıçtaki sürati.

İlk elektronun başlangıçtaki kinetik enerjisinin tamamı fotona aktarılır:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

Sayısal olarak

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J.}$$

$E_{1e} = \gamma mc^2$ yazarak

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

buluruz. Dolayısıyla

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

yani

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

$v_{1e}/c \approx 0.0194$ olduğundan, görelilik dışı $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$ yaklaşımı da verilen verilerin hassasiyetinde yeterli olurdu.

Elektronun başlangıçtaki momentumu.

Momentumun korunumu, momentumun yönünü ve büyüklüğünü şu bağıntılarla verir:

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_0 - \vec{p}_i,$$
$$p_{1e} = h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}.$$

Dalga boylarını yerine koyarak

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

buluruz; bu sonuç $p_{1e} = \gamma mv_{1e}$ ile uyumludur. Böylece

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Elektronun başlangıçtaki de Broglie dalga boyu.

de Broglie bağıntısı şöyledir:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

Eşdeğer olarak, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ kullanılarak

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

Dolayısıyla

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

ya da

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 5: IPhO'nun logosu

Uluslararası Fizik Olimpiyatı'nın logosu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

Şekil, bir akışkan jetinin yörüngesinin silindirik bir yüzeyin biçimini izleyerek bükülmesi olgusunu göstermektedir. Akışkanın yörüngesi, beklenen kesikli çizgi gibi değil, dairesel sürekli çizgi gibidir. Bu olguyu (ilk kez Rumen mühendis Henry Coanda tarafından 1936 yılında gözlemlenmiştir) nitel olarak açıklayınız.

Bu soru Olimpiyat'ın genel puanlamasına dahil edilmeyecektir. En iyi çözüme özel bir ödül verilecektir.



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru V.** Bu, **Coandă etkisidir**. Jet, çevresindeki akışkanı sürükler ve silindir, jet ile yüzey arasındaki boşluktan sürüklenen akışkanın yerine yeni akışkan gelmesini kısıtlar. Bunun sonucunda silindir tarafında oluşan daha düşük basınç, içeriye doğru bir kuvvet oluşturarak jeti silindirin çevresinde bükler.

Çözüm

Soru V.

Silindirin yanından yaklaşık olarak teğet doğrultuda geçen bir jeti ele alalım. Şekilde gösterilen bükülmenin bulunduğu bölgede yerçekimini ihmal ediyoruz.

Viskoz kayma yoluyla —ve akış türbülanslıysa türbülanslı karışma yoluyla— jet, çevresindeki akışkana momentum aktarır ve bu akışkanın bir kısmını beraberinde taşır. Bu sürece **sürüklenme** denir. Diğer yönlerden simetrik bir çevrede bulunan serbest bir jete her iki taraftan da akışkan girebilir; dolayısıyla sürüklenme, belirli bir yana doğru tercihli bir sapma oluşturmaz.

Yakındaki silindir bu durumu değiştirir. Jet ile silindir arasındaki akışkan jetin içine sürüklenir, ancak katı yüzey, onun yerini alacak akışkanın gelişini kısıtlar. Bunun sonucunda silindir tarafında düşük basınçlı bir bölge oluşur. Dışa açık taraftaki daha yüksek basınç da jeti silindire doğru iter.

Jet eğri yüzeyi izlemeye başladığında, jetin iki tarafı arasındaki basınç farkı, eğri yörüngesini koruması için gereken merkezci ivmeyi sağlar. Bunu nicel olarak ifade etmek için, r silindir ekseninden uzaklığı, v yerel teğetsel sürati ve ρ akışkan yoğunluğunu gösterebilir. Yerel olarak dairesel olan bir akış için, jetin iç kesimindeki normal doğrultudaki momentum dengesinde viskoz kuvvetler ihmal edildiğinde,

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{dolayısıyla} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

Böylece basınç silindirden uzaklaştıkça artar: basınç kuvveti, jeti döndürmek için tam da gerektiği gibi, içeriye doğru yönelir.

Örneğin, kalınlığı $h \ll R$ olan, yoğunluğu yaklaşık olarak sabit ve iç kesimindeki akışı temsil eden sürati U olan ince bir jet için gerekli basınç farkı şu mertebededir:

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

burada R silindirin yarıçapıdır.

Sürüklenme, asimetric basınç alanını oluşturur ve bu basınç alanı jeti bükür. Akış, eğriliğin gerektirdiği basınç farkını koruyabildiği sürece jet yüzeye tutunmayı sürdürür; koruyamazsa jet yüzeyden ayrılır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.