

# IPhO 1983

Теоретические задачи и решения · Бухарест, Румыния · 5 теоретических задач с полными решениями

[eulersolve.org/ipho/1983/](http://eulersolve.org/ipho/1983/)

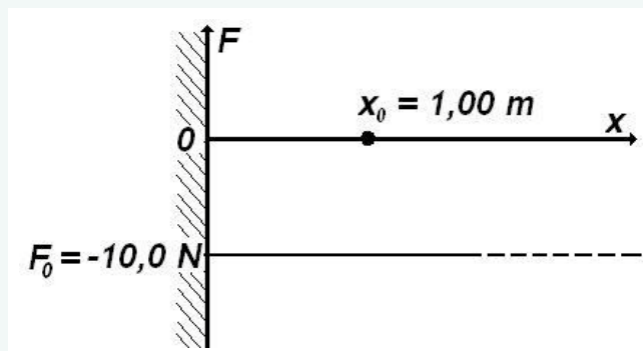
## Задача 1: Прыгающая частица

Частица движется вдоль положительной полуоси  $Ox$  (одномерное движение) под действием силы, проекция которой на  $Ox$  равна  $F_x = F_0$  и показана на рисунке ниже как функция  $x$ . В начале координат оси  $Ox$  расположена идеально отражающая стенка.

В любой точке, где находится частица, на неё действует сила трения постоянного модуля  $F_f = 1,00 \text{ N}$ .

Частица начинает движение из точки  $x = x_0 = 1,00 \text{ m}$ , обладая кинетической энергией  $E_c = 10,0 \text{ J}$ .

- Найдите длину пути, пройденного частицей до окончательной остановки
- Изобразите схематически график потенциальной энергии  $U(x)$  частицы в поле силы  $F_x$ .
- Постройте качественный график зависимости модуля скорости частицы от её координаты  $x$ .



Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- a.** Полная длина пути равна  $L = 20,0 \text{ m}$ . Окончательное положение покоя — у стенки,  $x = 0$ .
- b.** Выбирая  $U(0) = 0$ , получаем

$$U(x) = (10,0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

График представляет собой прямую, проходящую через начало координат, с угловым коэффициентом  $10,0 \text{ J m}^{-1}$ .

- **с.** График зависимости модуля скорости от координаты состоит из ветвей с корневой зависимостью, соответствующих последовательным движениям от стенки и к стенке. Расстояние до каждой следующей дальней точки поворота составляет  $9/11$  предыдущего; модули скорости у стенки при каждом следующем отражении умножаются на  $\sqrt{9/11}$ . Ветви сходятся к точке  $(x, v) = (0, 0)$ . Если начальное движение направлено в сторону  $+x$ , дальние точки поворота имеют координаты

$$a_n = \frac{21}{11} \left( \frac{9}{11} \right)^n \text{ м}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если начальное движение направлено к стенке, после начального участка движения к стенке следует заменить  $21/11$  на  $19/11$ .

## Решение

Запишем силу поля в виде  $F_x = -F$ , где

$$F = 10.0 \text{ Н}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ Н}.$$

Трение направлено против движения. Следовательно, результирующая сила равна  $-(F + f)$  при движении от стенки и  $-(F - f)$  при движении к стенке. Идеально отражающая стенка меняет направление скорости на противоположное, не изменяя кинетическую энергию.

### а. Полная длина пути

Поскольку  $F > f$ , частица не может оставаться в покое ни при каком  $x > 0$ : всякий раз, достигая дальней точки поворота, она начинает двигаться обратно к стенке.

Чтобы определить окончательное положение покоя, рассмотрим точку поворота на расстоянии  $A$  от стенки. При движении к стенке поле совершает работу  $FA$ , а трение — работу  $-fA$ . Поэтому кинетическая энергия при достижении стенки равна

$$K_w = (F - f)A.$$

После отражения эта энергия расходуется на движение от стенки против силы поля и силы трения. Поэтому расстояние до следующей точки поворота  $A'$  удовлетворяет соотношению

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

откуда

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

Расстояния до точек поворота и модули скорости у стенки стремятся к нулю. Следовательно, окончательное положение покоя —  $x_f = 0$ . Кроме того, каждый участок движения между стенкой и точкой поворота занимает время, пропорциональное квадратному корню из расстояния до этой точки; суммы оставшихся промежутков времени представляют собой сходящиеся геометрические ряды. Таким образом, в этой идеализированной модели бесконечно много отражений происходит за конечное время.

Теперь применим теорему об изменении кинетической энергии ко всему движению. Полная работа постоянной силы поля зависит только от начальной и конечной точек:

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ Н})(-1.00 \text{ м}) = 10.0 \text{ Дж}.$$

Трение совершает работу  $-fL$ , а упругие отражения не приводят к потерям кинетической энергии. Следовательно,

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

Поэтому

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

Этот результат не зависит от начального направления движения.

## б. Потенциальная энергия

Потенциальная энергия, связанная с полем, удовлетворяет соотношению

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

Поскольку  $F_x = -F$ ,

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

При  $U(0) = 0$  получаем

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

График представляет собой возрастающую прямую, проходящую через  $(0, 0)$  и точки

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

и

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J}).$$

Стенка ограничивает доступную область условием  $x \geq 0$ . Трение является диссипативной силой и не учитывается в этой потенциальной энергии.

## с. Модуль скорости как функция координаты

Пусть масса частицы равна  $m$ , а её начальный модуль скорости определим как

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Поскольку масса не задана,  $v_0$  удобно использовать в качестве масштаба по вертикальной оси.

Сначала предположим, что начальная скорость направлена в сторону  $+x$ . На начальном участке движения от стенки теорема об изменении кинетической энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

Следовательно, первая точка поворота имеет координату

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

Используя отношение, найденное в пункте а, получаем координаты всех последующих точек поворота:

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

При движении от стенки, заканчивающемся в точке  $a_n$ , оставшаяся кинетическая энергия равна работе, необходимой для достижения этой точки поворота:

$$v_{\rightarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F+f)}{m}(a_n - x)}.$$

При  $n = 0$  частица проходит только участок  $x_0 \leq x \leq a_0$ . При  $n \geq 1$  она проходит весь интервал  $0 \leq x \leq a_n$ .

При движении к стенке из точки  $a_n$  модуль результирующей силы, направленной к стенке, равен  $F - f$ , что даёт

$$v_{\leftarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F-f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

Оба выражения обозначают **модуль скорости**, поэтому оба неотрицательны.

У стенки ветвь движения к стенке из точки  $a_n$  непрерывно по модулю скорости соединяется со следующей ветвью движения от стенки:

$$v_{w,n} = \sqrt{\frac{2(F-f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F+f)a_{n+1}}{m}}.$$

Таким образом,

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

Качественный график можно построить следующим образом:

- Начните в точке  $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$ . Следуйте по убывающей корневой кривой, выпуклой вверх, до точки  $(1.91 \text{ m}, 0)$ .
- Возвращайтесь по ветви движения к стенке, перемещаясь на графике влево и вверх, до точки

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31v_0).$$

- После отражения следуйте по следующей ветви движения от стенки до точки

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

- Повторяйте построение с последовательно уменьшающимися расстояниями до точек поворота. Каждая ветвь имеет вертикальную касательную в своей дальней точке поворота. При одном и том же расстоянии до точки поворота ветвь движения от стенки лежит выше ветви движения к стенке.
- Последовательность сходится к конечной точке  $(0, 0)$ .

В общем случае одной и той же координате соответствуют несколько значений модуля скорости при разных прохождениях; поэтому полный график не является графиком однозначной функции  $x$ .

Если же начальная скорость направлена **к стенке**, начальная ветвь имеет вид

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_c + (F - f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

При первом столкновении со стенкой кинетическая энергия равна

$$E_c + (F - f)x_0 = 19.0 \text{ Дж},$$

поэтому модуль скорости равен  $\sqrt{1.90} v_0$ . После этого отражения точки поворота имеют координаты

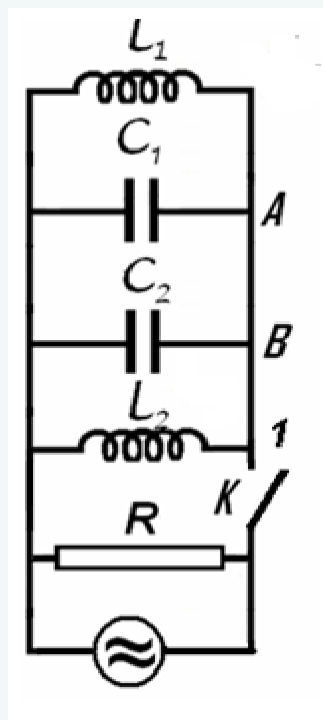
$$b_n = \frac{19}{11} \left( \frac{9}{11} \right)^n \text{ м}.$$

Те же формулы для ветвей движения от стенки и к стенке применимы при замене  $a_n$  на  $b_n$ .

Решение проверено по официальному решению.

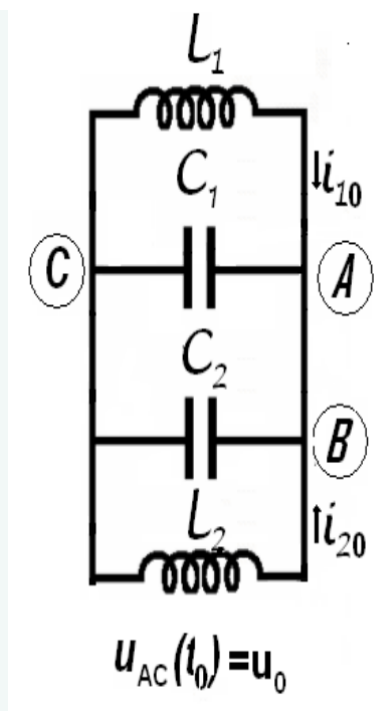
## Задача 2: Другой вид колебаний

Рассмотрим электрическую цепь, изображённую на рисунке, в которой  $L_1 = 10 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 20 \text{ мГн}$ ,  $C_1 = 10 \text{ нФ}$ ,  $C_2 = 5 \text{ нФ}$  и  $R = 100 \text{ к}\Omega$ . При замкнутом ключе  $K$  цепь подключена к источнику переменного тока. Сила тока, поступающего от источника, постоянна, а его частоту можно изменять.



**а.** Найдите отношение частоты  $f_m$ , при которой активная мощность в цепи достигает максимального значения  $P_m$ , к разности  $\Delta f = f_+ - f_-$  частот  $f_+$  и  $f_-$ , при которых активная мощность в цепи равна половине максимальной мощности  $P_m$ .

Теперь ключ  $K$  разомкнут. В момент  $t_0$  непосредственно после размыкания ключа силы токов в катушках  $L_1$  и  $L_2$  равны  $i_{01} = 0,1 \text{ А}$  и  $i_{02} = 0,2 \text{ А}$  (направления токов показаны на рисунке); в тот же момент разность потенциалов на конденсаторе ёмкостью  $C_1$  составляет  $u_0 = 40 \text{ В}$ :



- b. Вычислите частоту электромагнитных колебаний в контуре  $L_1 C_1 C_2 L_2$ ;
- c. Определите силу электрического тока в проводнике  $AB$ ;
- d. Вычислите амплитуду колебаний силы электрического тока в катушке  $L_1$ .

Пренебрегите взаимной индукцией катушек и электрическим сопротивлением проводников. Пренебрегите быстрыми переходными процессами, возникающими при замыкании или размыкании ключа.

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- a.  $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$ , при этом  $f_m = 15.9 \text{ kHz}$  и  $\Delta f = 106 \text{ Hz}$ .
- b.  $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$ , что соответствует  $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$ .
- c.  $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$ , ток постоянен и направлен от  $B$  к  $A$ .
- d.  $I_{1, \text{osc}} = 0.204 \text{ A}$ . Ток колеблется около среднего значения  $-0.100 \text{ A}$ , если указанное направление начального тока принять за положительное.

## Решение

**a. Цепь с внешним источником: резонанс и ширина полосы на уровне половинной мощности**

При замкнутом ключе  $K$  оба конденсатора, обе катушки индуктивности и резистор соединены параллельно. Их эквивалентные ёмкость и индуктивность равны

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ нФ}, \quad L = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ мН}.$$

В формуле для индуктивности учтено заданное условием отсутствие взаимной индукции.

Пусть  $I$  — постоянное действующее значение тока источника и  $\omega = 2\pi f$ . Комплексная проводимость цепи равна

$$Y = \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Активная мощность выделяется только на  $R$ . Поскольку действующее значение напряжения равно  $I/|Y|$ ,

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

Максимум достигается, когда реактивная составляющая проводимости обращается в нуль:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

На каждой из двух частот, соответствующих половинной мощности,

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

Два положительных решения имеют вид

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

Поэтому их разность в точности равна

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Узкополосное приближение не требуется.

Численно получаем

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ с}^2,$$

так что

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Гц},$$

а

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Гц}.$$

Таким образом, искомое отношение равно

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

## б. Свободные электромагнитные колебания

После размыкания ключа резистор и источник больше не нагружают LC-контур. При принятых идеализациях колебания в нём являются незатухающими.

Определим

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

и примем направления токов в обеих катушках  $i_1, i_2$  от левой шины к правой за положительные.

Они совпадают с указанными начальными направлениями, поэтому

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

Соотношения между напряжением и током для катушек дают

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

Суммарный ток через конденсаторы справа налево равен  $C\dot{u}$ . Поэтому по первому закону Кирхгофа

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

Дифференцируя, получаем

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

или

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

Отсюда

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

Для решения оставшихся пунктов найдём начальную производную напряжения:

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

Обозначив  $\theta = \omega_0(t - t_0)$ , получаем для напряжения

$$\boxed{u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}}.$$

## с. Ток в проводнике AB

Пусть  $j$  — ток в  $AB$ , положительный в направлении от  $A$  к  $B$ . В узле  $A$  входящий ток катушки разветвляется между  $C_1$  и  $AB$ :

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

Его производная равна

$$\dot{j} = -\frac{\dot{u}}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left( C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

Для заданных элементов

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

Из этого следует

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

и, следовательно,

$$\dot{j} = 0.$$

Таким образом, ток в  $AB$  постоянен, несмотря на колебания напряжения на конденсаторах и токов в катушках.

Его значение следует из начальных условий:

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

Отрицательный знак означает, что ток направлен противоположно выбранному положительному направлению:

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A, от } B \text{ к } A.$$

#### d. Амплитуда колебаний тока в $L_1$

Используя  $i_1 = j + C_1 \dot{u}$  и полученные выше результаты, находим

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A}. \end{aligned}$$

Для колебательного слагаемого  $a \cos \theta + b \sin \theta$  амплитуда равна  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Поэтому

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

Постоянное слагаемое соответствует незатухающему циркулирующему току, поддерживаемому идеальными катушками индуктивности. Таким образом,  $0.204 \text{ A}$  — амплитуда относительно среднего значения  $-0.100 \text{ A}$ ; ток с учётом знака изменяется приблизительно от  $-0.304 \text{ A}$  до  $+0.104 \text{ A}$ .

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

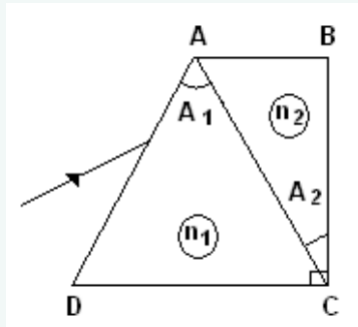
## Задача 3: Призмы

Две призмы, обладающие дисперсией и имеющие преломляющие углы  $\hat{A}_1 = 60^\circ$  и  $\hat{A}_2 = 30^\circ$ , склеены, как показано на рисунке ниже ( $\hat{C} = 90^\circ$ ). Зависимости показателей преломления призм от длины волны задаются соотношениями

$$\begin{aligned} n_1(\lambda) &= a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}; \\ n_2(\lambda) &= a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

где

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- Определите длину волны  $\lambda_0$  падающего излучения, которое проходит через призмы без преломления на грани  $AC$  при любом угле падения; определите соответствующие показатели преломления призм.
- Постройте ход лучей в системе призм для трёх различных излучений  $\lambda_{red}$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{violet}$  падающих на систему под одним и тем же углом.
- Определите угол наименьшего отклонения в системе для луча с длиной волны  $\lambda_0$ .
- Вычислите длину волны луча, который входит в систему и выходит из неё по направлениям, параллельным  $DC$ .

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- a.**  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ , при этом  $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$ .
- b.** На грани  $AC$  красный луч отклоняется к нормали, луч с длиной волны  $\lambda_0$  продолжает идти прямо, а фиолетовый отклоняется от нормали. Для общего горизонтального падающего пучка выходящие лучи располагаются сверху вниз в порядке **красный**,  $\lambda_0$ , **фиолетовый**, причём отклонение вниз возрастает.
- c.**  $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$ .
- d.**  $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$ , в инфракрасной области.

## Решение

Используем геометрическую оптику и закон Снеллиуса, принимая показатель преломления окружающего воздуха равным 1 и пренебрегая любым оптическим влиянием клея. Приближение малых углов не используется.

Из геометрии следует

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

Следовательно, относительно направления вправо, параллельного  $DC$ :

- нормаль к  $AD$ , направленная внутрь призмы, наклонена на  $30^\circ$  вниз;
- нормаль к  $AC$ , направленная из призмы 1 в призму 2, наклонена на  $30^\circ$  вверх;
- внешняя нормаль к  $BC$  горизонтальна.

### а. Длина волны, при которой отсутствует преломление на $AC$

На общей грани закон Снеллиуса имеет вид

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

Чтобы направление оставалось неизменным, необходимо  $t = i$ . Требование выполнения этого условия при любом угле падения, а не только при нормальном падении, даёт

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

Таким образом,

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

и поэтому

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

Выбирая положительное значение длины волны, получаем

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

Соответствующие показатели преломления равны

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

### б. Ход лучей

Оба показателя преломления уменьшаются с увеличением длины волны. Поэтому на входной грани  $AD$  фиолетовый луч отклоняется к нормали сильнее, чем луч с длиной волны  $\lambda_0$ , а красный — слабее.

На общей грани определяющую роль играет разность показателей преломления

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

Поскольку

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

преломление на  $AC$  происходит следующим образом:

| Излучение   | Сравнение показателей преломления | Поведение на $AC$      |
|-------------|-----------------------------------|------------------------|
| Красное     | $n_1 < n_2$                       | Отклоняется к нормали  |
| $\lambda_0$ | $n_1 = n_2$                       | Продолжает идти прямо  |
| Фиолетовое  | $n_1 > n_2$                       | Отклоняется от нормали |

Для точного словесного описания построения можно взять общий горизонтальный падающий пучок, угол падения которого на  $AD$  равен  $30^\circ$ . Выберем точку его входа достаточно высоко, чтобы все три луча достигали  $BC$ .

1. На  $AD$  все три луча отклоняются вниз к нормали, направленной внутрь призмы. Внутри призмы 1 красный луч идёт сверху, луч с длиной волны  $\lambda_0$  — посередине, а фиолетовый — снизу.

2. На  $AC$  проведём нормаль под углом  $30^\circ$  вверх от горизонтали. Красный луч поворачивает вверх к этой нормали, луч с длиной волны  $\lambda_0$  продолжает идти прямо, а фиолетовый поворачивает ещё дальше вниз, удаляясь от нормали.
3. На  $BC$  нормаль горизонтальна. При переходе в воздух лучи видимого излучения отклоняются ещё дальше вниз, удаляясь от этой нормали.

Таким образом, выходящие лучи располагаются в порядке **красный выше  $\lambda_0$ , а фиолетовый ниже**, причём фиолетовый луч имеет наибольшее полное отклонение.

### с. Наименьшее отклонение для $\lambda_0$

Для этой длины волны обе призмы имеют показатель преломления  $n = 1.5$ , поэтому внутренняя грань  $AC$  не оказывает оптического влияния. Входная и выходная грани  $AD$  и  $BC$  действуют как грани одной призмы с эффективным преломляющим углом

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

Пусть  $i, e$  — внешние углы падения и выхода, а  $r, r'$  — соответствующие внутренние углы. Из геометрии призмы и закона Снеллиуса следует

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

Минимум достигается при симметричном ходе луча,

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

Например, дифференцируя предыдущее выражение, получаем

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

Эта производная обращается в нуль при  $r = \alpha/2$  и в этой точке меняет знак с отрицательного на положительный.

Таким образом,

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

и

$$\boxed{\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ}.$$

### d. Параллельные падающий и выходящий лучи

Падающий луч горизонтален, поэтому угол его падения на  $AD$  равен  $30^\circ$ . Если угол преломления на этой грани равен  $r$ , то по закону Снеллиуса

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Выходящий луч также должен быть горизонтальным. Поскольку  $BC$  вертикальна, луч выходит перпендикулярно  $BC$ . Тогда из закона Снеллиуса следует, что луч внутри призмы 2 тоже должен быть горизонтальным.

Луч в призме 1 распространяется под углом  $r - 30^\circ$  к горизонтали. Следовательно, угол его падения на  $AC$  равен

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

Горизонтальный луч в призме 2 составляет угол  $30^\circ$  с нормалью к  $AC$ . Поэтому

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

Раскрывая синус разности в уравнении (2) и используя уравнение (1), получаем

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Возведение в квадрат и упрощение дают

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

Введём положительную безразмерную величину

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

Подстановка в уравнение (3) даёт

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

или

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

Физический смысл имеет только положительный корень:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

Следовательно,

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

так что

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

Для проверки отметим, что при этой длине волны

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

и  $r \approx 25.2527^\circ$ . Тогда угол падения на  $AC$  равен  $34.7473^\circ$ , а угол преломления — в точности  $30^\circ$ ; затем луч достигает  $BC$  по нормали и выходит горизонтально.

## Задача 4: Комптоновское рассеяние

Фотон с длиной волны  $\lambda_i$  рассеивается на движущемся свободном электроне. В результате электрон останавливается, а образовавшийся фотон с длиной волны  $\lambda_0$ , рассеянный под углом  $\theta = 60^\circ$  к направлению падающего фотона, вновь рассеивается на втором свободном электроне, находящемся в покое. При этом втором рассеянии фотон с длиной волны  $\lambda_f = 1,25 \times 10^{-10} \text{ m}$  вылетает под углом  $\theta = 60^\circ$  к направлению фотона с длиной волны  $\lambda_0$ . Найдите длину волны де Бройля первого электрона до взаимодействия. Известны следующие постоянные:

$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  - постоянная Планка

$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  - масса электрона

$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$  - скорость света в вакууме

Цель задачи — вычислить скорость, импульс и длину волны первого электрона.

Для описания фотонов используются следующие обозначения:

Таблица 4.1

|             | начальный фотон | фотон после первого рассеяния | конечный фотон |
|-------------|-----------------|-------------------------------|----------------|
| импульс     | $\vec{p}_i$     | $\vec{p}_0$                   | $\vec{p}_f$    |
| энергия     | $E_i$           | $E_0$                         | $E_f$          |
| длина волны | $\lambda_i$     | $\lambda_i$                   | $\lambda_f$    |

Для описания электронов используются следующие обозначения

Таблица 4.2

|          | первый электрон до столкновения | первый электрон после столкновения | второй электрон до столкновения | второй электрон после столкновения |
|----------|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| импульс  | $\vec{p}_{1e}$                  | 0                                  | 0                               | $\vec{p}_{2e}$                     |
| энергия  | $E_{1e}$                        | $E_{0e}$                           | $E_{0e}$                        | $E_{2e}$                           |
| скорость | $\vec{v}_{1e}$                  | 0                                  | 0                               | $\vec{v}_{2e}$                     |

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **Задача IV (7 баллов)** — Начальная скорость, модуль импульса и длина волны де Бройля первого электрона равны

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Длина волны промежуточного фотона равна  $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$ , а  $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

## Решение

**Задача IV.** В приведённом условии нет нумерованных подпунктов.

Применим законы сохранения энергии и импульса к каждому столкновению. Для фотона

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

а для электрона выполняется соотношение

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

Сначала воспользуемся точными релятивистскими соотношениями.

**Второе рассеяние позволяет определить  $\lambda_0$ .**

Второй электрон первоначально покоится, поэтому

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

Угол между направлениями падающего и рассеянного фотонов равен  $\theta$ , откуда

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Подставляя в соотношение между энергией и импульсом электрона, получаем

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

После сокращения одинаковых слагаемых

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0 E_f (1 - \cos \theta).$$

Разделив на  $E_0 E_f$  и подставив  $E = hc/\lambda$ , получаем комптоновский сдвиг:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

При заданных значениях постоянных

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Поскольку  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

и, следовательно,

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

**Первое рассеяние позволяет определить  $\lambda_i$ .**

После столкновения первый электрон останавливается. Поэтому

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

Следовательно,

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

и

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta.$$

Вновь используя соотношение между энергией и импульсом электрона,

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta,$$

после упрощения получаем

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0 E_i (1 - \cos \theta).$$

Отсюда

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

В этом столкновении энергия фотона увеличивается, поэтому его длина волны уменьшается.

Поскольку оба угла рассеяния равны, уменьшение длины волны при первом столкновении равно её увеличению при втором:

$$\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

**Начальная скорость электрона.**

Вся начальная кинетическая энергия первого электрона передаётся фотону:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

Численно

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

Записывая  $E_{1e} = \gamma mc^2$ , имеем

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

Следовательно,

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

так что

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Поскольку  $v_{1e}/c \approx 0.0194$ , нерелятивистское приближение  $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$  также было бы достаточно точным при заданной точности исходных данных.

### Начальный импульс электрона.

Закон сохранения импульса позволяет определить его направление и модуль из соотношений

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_0 - \vec{p}_i,$$

$$p_{1e} = h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}.$$

Подставляя длины волн, получаем

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

что согласуется с  $p_{1e} = \gamma m v_{1e}$ . Таким образом,

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

### Начальная длина волны де Бройля электрона.

Соотношение де Бройля имеет вид

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

Эквивалентная запись с учётом  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ :

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

или

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 5: Логотип IPhO

Логотип Международной физической олимпиады представлен на рисунке ниже.

На рисунке показано явление искривления траектории струи текучей среды при обтекании цилиндрической поверхности. Траектория струи проходит не по ожидаемой штриховой линии, а по сплошной линии в виде дуги окружности.

Дайте качественное объяснение этого явления (впервые наблюдавшегося румынским инженером Анри Коандэ в 1936 году).

*Эта задача не будет учитываться в общем зачёте олимпиады. Лучшее решение будет отмечено специальным призом.*



Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **Задача V.** Это **эффект Коандэ**. Струя увлекает окружающую текучую среду, а цилиндр ограничивает приток среды взамен той, которая увлекается из пространства между струёй и поверхностью. Возникающее вследствие этого понижение давления со стороны цилиндра создаёт силу, направленную к нему и изгибающую струю вокруг цилиндра.

## Решение

### Задача V.

Рассмотрим струю, проходящую рядом с цилиндром приблизительно по касательной к его поверхности. В области показанного на рисунке изгиба пренебрежём силой тяжести.

За счёт вязких касательных напряжений, а при турбулентном течении — также за счёт турбулентного перемешивания, струя передаёт импульс окружающей текучей среде и увлекает часть её с собой. Этот процесс называется **вовлечением**. В свободную струю, находящуюся в симметричном окружении, среда может поступать с обеих сторон, поэтому вовлечение не создаёт преимущественного направления бокового отклонения.

Наличие рядом цилиндра меняет ситуацию. Среда между струёй и цилиндром вовлекается в струю, но твёрдая поверхность ограничивает приток среды ей на смену. В результате со стороны цилиндра образуется область пониженного давления. Более высокое давление с открытой стороны прижимает струю к цилиндру.

Когда струя следует вдоль искривлённой поверхности, перепад давления поперёк струи обеспечивает центростремительное ускорение, необходимое для поддержания её криволинейной траектории. Чтобы выразить это количественно, обозначим через  $r$  расстояние от оси цилиндра, через  $v$  — местную тангенциальную скорость, а через  $\rho$  — плотность текучей среды. Для течения, локально направленного по окружности, пренебрегая вязкими силами в уравнении баланса импульса по нормали к траектории в основной части струи, получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{следовательно} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

Таким образом, давление возрастает по мере удаления от цилиндра: сила давления направлена к нему, как и требуется для поворота струи.

Например, для тонкой струи толщиной  $h \ll R$ , с приблизительно постоянной плотностью и характерной скоростью в основной части струи  $U$ , необходимый перепад давления имеет порядок

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

где  $R$  — радиус цилиндра.

Вовлечение окружающей среды создаёт асимметричное поле давления, и это поле давления изгибает струю. Струя остаётся прикреплённой к поверхности, пока течение способно поддерживать перепад давления, необходимый при данной кривизне; если это становится невозможным, струя отрывается от поверхности.

---

Решение проверено по официальному решению.