

IPhO 1983

Problemas teóricos y soluciones · Bucarest, Rumanía · 5 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1983/

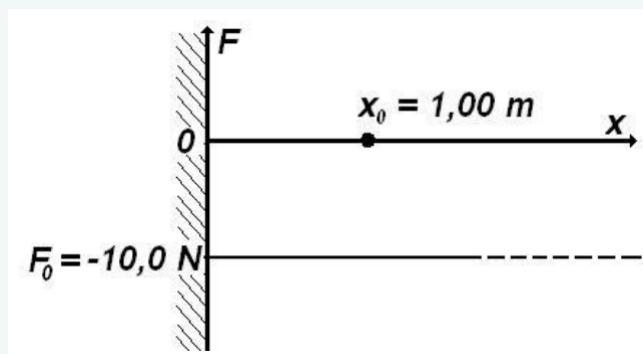
Problema 1: Partícula saltarina

Una partícula se mueve a lo largo del semieje positivo Ox (situación unidimensional) bajo la acción de una fuerza cuya proyección sobre Ox es $F_x = F_0$, tal como se representa en la figura siguiente (en función de x). En el origen del eje Ox hay una pared perfectamente reflectante.

Una fuerza de rozamiento de módulo constante $F_f = 1,00 \text{ N}$ actúa en cualquier posición en la que se encuentre la partícula.

La partícula parte del punto $x = x_0 = 1,00 \text{ m}$ con una energía cinética $E_c = 10,0 \text{ J}$.

- Halle la longitud del recorrido de la partícula antes de que se detenga definitivamente
- Esboce la energía potencial $U(x)$ de la partícula en el campo de fuerzas F_x .
- Represente cualitativamente la rapidez de la partícula en función de su coordenada x .



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a.** La longitud total del recorrido es $L = 20,0 \text{ m}$. La posición final de reposo es la pared, $x = 0$.
- b.** Eligiendo $U(0) = 0$,

$$U(x) = (10,0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

Su gráfica es una recta que pasa por el origen con pendiente $10,0 \text{ J m}^{-1}$.

- **c.** La gráfica de rapidez frente a posición consta de ramas de raíz cuadrada que representan los sucesivos trayectos de alejamiento y acercamiento a la pared. Cada distancia de retorno exterior es $9/11$ veces la anterior; las rapidezces sucesivas en la pared disminuyen por un factor $\sqrt{9/11}$. Las ramas convergen a $(x, v) = (0, 0)$. Para un movimiento inicial hacia $+x$, los puntos de retorno exteriores son

$$a_n = \frac{21}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si el movimiento inicial es hacia la pared, sustituya $21/11$ por $19/11$, después del trayecto inicial de acercamiento.

Solución

Escribamos la fuerza del campo como $F_x = -F$, donde

$$F = 10.0 \text{ N}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ N}.$$

El rozamiento se opone al movimiento. Por consiguiente, la fuerza neta es $-(F + f)$ durante el movimiento de alejamiento y $-(F - f)$ durante el movimiento de acercamiento. Una pared perfectamente reflectante invierte la velocidad sin cambiar la energía cinética.

a. Longitud total del recorrido

Como $F > f$, la partícula no puede permanecer en reposo en ningún punto $x > 0$: cada vez que alcanza un punto de retorno exterior, comienza a moverse de nuevo hacia la pared.

Para establecer la posición final de reposo, consideremos un punto de retorno a una distancia A de la pared. Durante el trayecto de acercamiento, el campo realiza un trabajo FA y el rozamiento realiza un trabajo $-fA$. Por tanto, la energía cinética al llegar a la pared es

$$K_w = (F - f)A.$$

Después de la reflexión, esta energía se emplea en alejarse de la pared contra la acción tanto del campo como del rozamiento. Por ello, la siguiente distancia de retorno A' satisface

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

de modo que

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

Las distancias de retorno y las rapidezces en la pared tienden a cero. Por tanto, la posición final de reposo es $x_f = 0$. Además, cada medio trayecto dura un tiempo proporcional a la raíz cuadrada de su distancia de retorno; los tiempos restantes forman sumas geométricas convergentes. Así, en este modelo idealizado, un número infinito de reflexiones se acumula en un tiempo finito.

Apliquemos ahora el teorema del trabajo y la energía cinética al movimiento completo. El trabajo total del campo constante depende únicamente de los puntos inicial y final:

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ N})(-1.00 \text{ m}) = 10.0 \text{ J}.$$

El rozamiento realiza un trabajo $-fL$, mientras que las reflexiones elásticas no causan pérdida de energía cinética. Por tanto,

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

En consecuencia,

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

Este resultado es independiente del sentido inicial del movimiento.

b. Energía potencial

La energía potencial asociada al campo satisface

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

Como $F_x = -F$,

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

Con $U(0) = 0$,

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

El esbozo es una recta creciente que pasa por $(0, 0)$ y por los puntos

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

y

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J}).$$

La pared restringe la región accesible a $x \geq 0$. El rozamiento es disipativo y no se incluye en este potencial.

c. Rapidez en función de la posición

Sea m la masa de la partícula, y definamos su rapidez inicial mediante

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Como no se proporciona la masa, v_0 ofrece una escala vertical conveniente.

Supongamos primero que la velocidad inicial apunta hacia $+x$. En el trayecto inicial de alejamiento, el teorema del trabajo y la energía cinética da

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

Por consiguiente, el primer punto de retorno es

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

Utilizando la razón hallada en el apartado a, todos los puntos de retorno posteriores son

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

Para un trayecto de alejamiento que termina en a_n , la energía cinética restante es igual al trabajo necesario para alcanzar ese punto de retorno:

$$v_{\rightarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F+f)}{m}(a_n - x)}.$$

Para $n = 0$, solo se recorre $x_0 \leq x \leq a_0$. Para $n \geq 1$, se recorre el intervalo completo $0 \leq x \leq a_n$.

En el trayecto de acercamiento desde a_n , la fuerza neta hacia la pared tiene módulo $F - f$, lo que da

$$v_{\leftarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F-f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

Ambas expresiones representan la **rapidez**, por lo que ambas son no negativas.

En la pared, la rama de acercamiento desde a_n se une a la siguiente rama de alejamiento de forma continua en la rapidez:

$$v_{w,n} = \sqrt{\frac{2(F-f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F+f)a_{n+1}}{m}}.$$

Por tanto,

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

El esbozo cualitativo puede construirse de la siguiente manera:

- Comience en $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$. Siga una curva de raíz cuadrada decreciente y cóncava hacia abajo hasta $(1.91 \text{ m}, 0)$.
- Regrese por la rama de acercamiento, desplazándose hacia la izquierda y hacia arriba en la gráfica, hasta

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31 v_0).$$

- Después de la reflexión, siga la siguiente rama de alejamiento hasta

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

- Repita con distancias de retorno cada vez menores. Cada rama tiene una tangente vertical en su punto de retorno exterior. Para una misma distancia de retorno, la rama de alejamiento se sitúa por encima de la rama de acercamiento.
- La sucesión converge al punto final $(0, 0)$.

En general, hay varias rapideces en una misma posición, correspondientes a distintos pasos por ella; por tanto, la gráfica completa no es una función unívoca de x .

Si, en cambio, la velocidad inicial apunta **hacia la pared**, la rama inicial es

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_c + (F-f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

En el primer encuentro con la pared, la energía cinética es

$$E_c + (F-f)x_0 = 19.0 \text{ J},$$

por lo que su rapidez es $\sqrt{1.90} v_0$. Después de esta reflexión, los puntos de retorno son

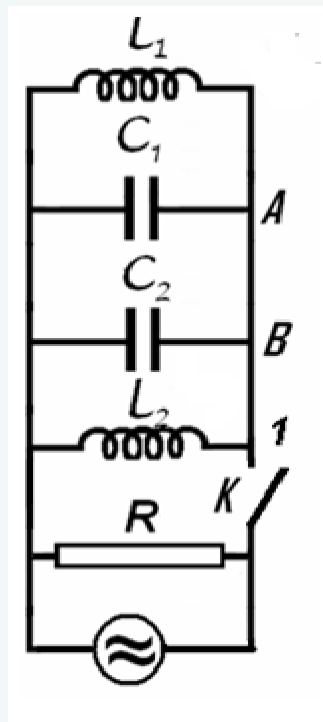
$$b_n = \frac{19}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m.}$$

Se aplican las mismas fórmulas para las ramas de alejamiento y acercamiento, sustituyendo a_n por b_n .

La solución se comprobó con la solución oficial.

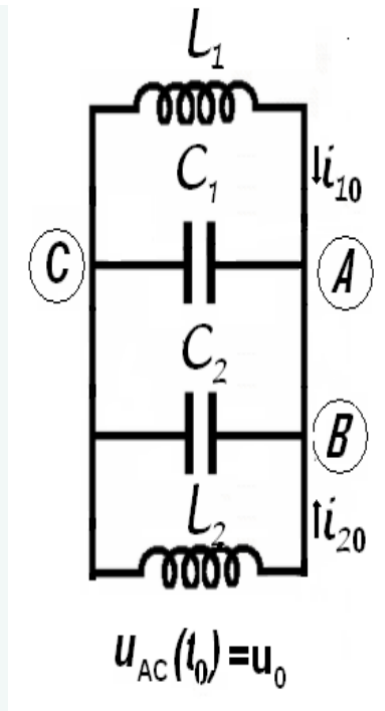
Problema 2: Un tipo diferente de oscilación

Consideremos el circuito eléctrico de la figura, para el cual $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$ y $R = 100 \text{ k}\Omega$. Con el interruptor K cerrado, el circuito está conectado a una fuente de corriente alterna. La corriente suministrada por la fuente tiene una intensidad constante, mientras que su frecuencia puede variarse.



a. Halle el cociente entre la frecuencia f_m para la cual la potencia activa en el circuito alcanza su valor máximo P_m y la diferencia de frecuencias $\Delta f = f_+ - f_-$, donde f_+ y f_- son las frecuencias para las cuales la potencia activa en el circuito es la mitad de la potencia máxima P_m .

Ahora se abre el interruptor K . En el instante t_0 , inmediatamente después de abrir el interruptor, las intensidades de las corrientes en las bobinas L_1 y L_2 son $i_{01} = 0,1 \text{ A}$ e $i_{02} = 0,2 \text{ A}$ (las corrientes circulan como se indica en la figura); en ese mismo instante, la diferencia de potencial en el condensador de capacidad C_1 es $u_0 = 40 \text{ V}$:



- b. Calcule la frecuencia de oscilación electromagnética en el circuito $L_1 C_1 C_2 L_2$;
- c. Determine la intensidad de la corriente eléctrica en el conductor AB ;
- d. Calcule la amplitud de la oscilación de la intensidad de la corriente eléctrica en la bobina L_1 .

Desprecie la inducción mutua entre las bobinas y la resistencia eléctrica de los conductores. Desprecie los fenómenos transitorios rápidos que se producen al cerrar o abrir el interruptor.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a. $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$, con $f_m = 15.9 \text{ kHz}$ y $\Delta f = 106 \text{ Hz}$.
- b. $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$, correspondiente a $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$.
- c. $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$, constante y dirigida **de B a A**.
- d. $I_{1,\text{osc}} = 0.204 \text{ A}$. La corriente oscila alrededor de un valor medio de -0.100 A , tomando como positivo el sentido indicado de la corriente inicial.

Solución

a. Circuito forzado: resonancia y ancho de banda a media potencia

Con K cerrado, los dos condensadores, las dos bobinas y la resistencia están conectados en paralelo. Su capacidad y su inductancia equivalentes son

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ nF}, \quad L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ mH}.$$

La fórmula de la inductancia utiliza la ausencia de inducción mutua estipulada en el enunciado.

Sea I el valor eficaz constante de la corriente de la fuente y sea $\omega = 2\pi f$. La admitancia del circuito es

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Solo R disipa potencia activa. Como el valor eficaz de la tensión es $I/|Y|$,

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

El máximo se alcanza cuando se anula la parte reactiva de la admitancia:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

En cualquiera de las dos frecuencias de media potencia,

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

Las dos soluciones positivas son

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

Por tanto, su diferencia es exactamente

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

No se necesita ninguna aproximación de banda estrecha.

Numéricamente,

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2,$$

por lo que

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Hz},$$

y

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Hz}.$$

Así, el cociente solicitado es

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

b. Oscilación electromagnética libre

Tras abrir el interruptor, la resistencia y la fuente dejan de cargar el circuito LC. Bajo las idealizaciones indicadas, su oscilación no está amortiguada.

Definamos

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

y tomemos como positivo para ambas corrientes de las bobinas i_1, i_2 el sentido del conductor lateral izquierdo al derecho. Estos sentidos coinciden con los sentidos iniciales indicados, de modo que

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

Las relaciones entre tensión y corriente en las bobinas dan

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

La corriente total por los condensadores de derecha a izquierda es $C\dot{u}$. Por tanto, la ley de corrientes de Kirchhoff da

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

Derivando,

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

o bien

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

Para los apartados restantes, la derivada inicial de la tensión es

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

Escribiendo $\theta = \omega_0(t - t_0)$, la tensión es, por tanto,

$$\boxed{u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}}.$$

c. Corriente en el conductor AB

Sea j la corriente en AB , positiva de A a B . En A , la corriente que llega de la bobina se reparte entre C_1 y AB :

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

Su derivada es

$$\dot{j} = -\frac{u}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left(C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

Para los componentes dados,

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

Esto implica

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

y, en consecuencia,

$$\dot{j} = 0.$$

Así, la corriente en AB es constante a pesar de que la tensión en los condensadores y las corrientes en las bobinas oscilan.

Su valor se obtiene a partir de las condiciones iniciales:

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

El signo negativo indica el sentido opuesto al sentido de referencia elegido:

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A, de } B \text{ a } A.$$

d. Amplitud de oscilación de la corriente en L_1

Utilizando $i_1 = j + C_1 \dot{u}$ y los resultados anteriores,

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A}. \end{aligned}$$

Para un término oscilatorio $a \cos \theta + b \sin \theta$, la amplitud es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por tanto,

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

El término constante representa una corriente circulante persistente sostenida por las bobinas ideales. Así, 0.204 A es la amplitud respecto al valor medio -0.100 A ; la corriente con signo varía aproximadamente entre -0.304 A y $+0.104 \text{ A}$.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Prismas

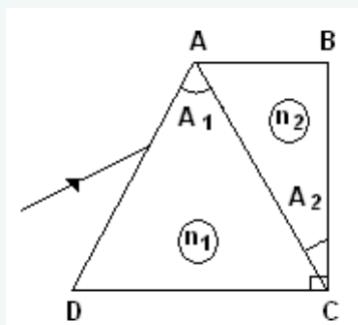
Dos prismas dispersivos con ángulos de vértice $\hat{A}_1 = 60^\circ$ y $\hat{A}_2 = 30^\circ$ están pegados como se muestra en la figura siguiente ($\hat{C} = 90^\circ$). La dependencia de los índices de refracción de los prismas con la longitud de onda viene dada por las relaciones

$$n_1(\lambda) = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2};$$

$$n_2(\lambda) = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$$

donde

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- a. Determine la longitud de onda λ_0 de la radiación incidente que atraviesa los prismas sin refractarse en la cara AC para cualquier ángulo de incidencia; determine los índices de refracción correspondientes de los prismas.
- b. Dibuje la trayectoria de los rayos en el sistema de prismas para tres radiaciones distintas λ_{red} , λ_0 , λ_{violet} que inciden sobre el sistema con el mismo ángulo.
- c. Determine el ángulo de desviación mínima en el sistema para un rayo de longitud de onda λ_0 .
- d. Calcule la longitud de onda del rayo que entra en el sistema y sale de él en direcciones paralelas a DC .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a. $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, con $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$.
- b. En AC , el rojo se desvía hacia la normal, λ_0 continúa en línea recta y el violeta se desvía alejándose de la normal. Para un haz incidente horizontal común, los rayos emergentes se ordenan **rojo**, λ_0 , **violeta** de arriba abajo, con una desviación hacia abajo cada vez mayor.
- c. $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$.
- d. $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$, en el infrarrojo.

Solución

Utilizamos la óptica geométrica y la ley de Snell, tomando como 1 el índice de refracción del aire circundante y despreciando cualquier efecto óptico del adhesivo. No se utiliza ninguna aproximación de ángulos pequeños.

La geometría da

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

Por consiguiente, tomando como referencia la dirección hacia la derecha paralela a DC :

- la normal a AD orientada hacia el interior apunta 30° hacia abajo;
- la normal a AC , dirigida del prisma 1 al prisma 2, apunta 30° hacia arriba;
- la normal a BC orientada hacia el exterior es horizontal.

a. Longitud de onda sin refracción en AC

En la cara común, la ley de Snell es

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

Para que la dirección no cambie, debe cumplirse $t = i$. Exigir que esto se cumpla para todos los ángulos de incidencia, y no solo para la incidencia normal, da

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

Así,

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

y, por tanto,

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

Tomando la longitud de onda positiva,

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

Los índices correspondientes son

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

b. Trayectorias de los rayos

Ambos índices disminuyen al aumentar la longitud de onda. Por ello, en la cara de entrada AD , el violeta se desvía hacia la normal más que λ_0 , mientras que el rojo se desvía menos.

En la cara común, la diferencia de índices relevante es

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

Puesto que

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

las refracciones en AC son:

Radiación	Comparación de índices	Comportamiento en AC
Rojo	$n_1 < n_2$	Se desvía hacia la normal
λ_0	$n_1 = n_2$	Continúa en línea recta
Violeta	$n_1 > n_2$	Se desvía alejándose de la normal

Para describir con precisión el trazado, se puede utilizar un haz incidente horizontal común, cuyo ángulo de incidencia en AD es 30° . Elija su punto de entrada lo suficientemente alto para que los tres rayos alcancen BC .

1. En AD , los tres rayos se desvían hacia abajo, acercándose a la normal orientada hacia el interior. Dentro del prisma 1, el rojo es el rayo superior, λ_0 el intermedio y el violeta el inferior.
2. En AC , dibuje la normal apuntando 30° por encima de la horizontal. El rojo gira hacia arriba, acercándose a esta normal, λ_0 sigue en línea recta y el violeta gira aún más hacia abajo, alejándose de la normal.
3. En BC , la normal es horizontal. Los rayos visibles se desvían aún más hacia abajo al pasar al aire, alejándose de esta normal.

Por tanto, el orden de los rayos emergentes es **rojo por encima de λ_0 , con el violeta por debajo**, y el violeta presenta la mayor desviación total.

c. Desviación mínima para λ_0

Para esta longitud de onda, ambos prismas tienen índice $n = 1.5$, por lo que la cara interna AC no tiene ningún efecto óptico. Las caras de entrada y salida AD y BC actúan como las caras de un único prisma con un ángulo de vértice efectivo

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

Sean i, e los ángulos externos de incidencia y emergencia, y r, r' los ángulos internos correspondientes. La geometría del prisma y la ley de Snell dan

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

El mínimo se alcanza para la trayectoria simétrica,

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

Por ejemplo, al derivar la expresión anterior se obtiene

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

Esta derivada se anula en $r = \alpha/2$ y pasa de negativa a positiva en ese punto.

Así,

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

y

$$\boxed{\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ}.$$

d. Rayos incidente y emergente paralelos

El rayo incidente es horizontal, de modo que su ángulo de incidencia en AD es 30° . Si su ángulo de refracción allí es r , la ley de Snell da

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

El rayo emergente también debe ser horizontal. Como BC es vertical, la emergencia es normal a BC . La ley de Snell exige entonces que el rayo dentro del prisma 2 también sea horizontal.

El rayo en el prisma 1 se propaga formando un ángulo $r - 30^\circ$ con la horizontal. Por consiguiente, su ángulo de incidencia en AC es

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

El rayo horizontal en el prisma 2 forma 30° con la normal a AC . Por ello,

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

Desarrollando la ecuación (2) y utilizando la ecuación (1),

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Al elevar al cuadrado y simplificar se obtiene

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

Introduzcamos la magnitud positiva y adimensional

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

Entonces

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

La sustitución en la ecuación (3) da

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

o bien

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

Solo la raíz positiva tiene sentido físico:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

Por tanto,

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

de modo que

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

Como comprobación, esta longitud de onda da

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

y $r \approx 25.2527^\circ$. El ángulo de incidencia en AC es entonces 34.7473° , y el ángulo de refracción es exactamente 30° ; a continuación, el rayo alcanza BC perpendicularmente y sale horizontalmente.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 4: Dispersión Compton

Un fotón de longitud de onda λ_i es dispersado por un electrón libre en movimiento. Como resultado, el electrón se detiene y el fotón resultante, de longitud de onda λ_0 , dispersado con un ángulo $\theta = 60^\circ$ respecto a la dirección del fotón incidente, vuelve a ser dispersado por un segundo electrón libre en reposo. En este segundo proceso de dispersión, emerge un fotón de longitud de onda $\lambda_f = 1,25 \times 10^{-10} \text{ m}$ con un ángulo $\theta = 60^\circ$ respecto a la dirección del fotón de longitud de onda λ_0 . Halle la longitud de onda de de Broglie del primer electrón antes de la interacción. Se conocen las siguientes constantes:

$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ - constante de Planck
 $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ - masa del electrón
 $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ - velocidad de la luz en el vacío

El objetivo del problema es calcular los valores de la rapidez, la cantidad de movimiento y la longitud de onda del primer electrón.

Para caracterizar los fotones se utiliza la siguiente notación:

Tabla 4.1

	fotón inicial	fotón después de la primera dispersión	fotón final
cantidad de movimiento	$\vec{p}_i$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_f$
energía	E_i	E_0	E_f
longitud de onda	λ_i	λ_i	λ_f

Para caracterizar los electrones se utiliza

Tabla 4.2

	primer electrón antes de la colisión	primer electrón después de la colisión	segundo electrón antes de la colisión	segundo electrón después de la colisión
cantidad de movimiento	$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$
energía	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
velocidad	$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- Problema IV (7 puntos)** — La rapidez inicial, el módulo de la cantidad de movimiento inicial y la longitud de onda de de Broglie inicial del primer electrón son

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

La longitud de onda del fotón intermedio es $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$, y
 $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Solución

Problema IV. El enunciado proporcionado no contiene apartados numerados.

Aplicamos la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento a cada colisión. Para un fotón,

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

mientras que un electrón satisface

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

Inicialmente utilizamos relaciones relativistas exactas.

La segunda dispersión determina λ_0 .

El segundo electrón está inicialmente en reposo, por lo que

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

El ángulo entre los fotones incidente y saliente es θ , de modo que

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Al sustituir en la relación entre la energía y la cantidad de movimiento del electrón, se obtiene

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Tras cancelar términos,

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0 E_f (1 - \cos \theta).$$

Dividiendo por $E_0 E_f$ y sustituyendo $E = hc/\lambda$, obtenemos el desplazamiento Compton:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Con las constantes dadas,

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

y, por tanto,

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

La primera dispersión determina λ_i .

El primer electrón queda en reposo después de la colisión. Por tanto,

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

En consecuencia,

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

y

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta.$$

Utilizando de nuevo la relación entre la energía y la cantidad de movimiento del electrón,

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta,$$

que se simplifica a

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0 E_i (1 - \cos \theta).$$

Por consiguiente,

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

El fotón gana energía en esta colisión, por lo que su longitud de onda disminuye. Como ambos ángulos de dispersión son iguales, la disminución en la primera colisión es igual al aumento en la segunda:

$$\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

Rapidez inicial del electrón.

Toda la energía cinética inicial del primer electrón se transfiere al fotón:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

Numéricamente,

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J.}$$

Escribiendo $E_{1e} = \gamma mc^2$, tenemos

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

Por tanto,

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

de modo que

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Como $v_{1e}/c \approx 0.0194$, la aproximación no relativista $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$ también sería adecuada para la precisión de los datos proporcionados.

Cantidad de movimiento inicial del electrón.

La conservación de la cantidad de movimiento proporciona su dirección y su módulo mediante

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_0 - \vec{p}_i,$$

$$p_{1e} = h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}.$$

Sustituyendo las longitudes de onda,

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

en concordancia con $p_{1e} = \gamma mv_{1e}$. Por tanto,

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Longitud de onda de de Broglie inicial del electrón.

La relación de de Broglie es

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

De forma equivalente, utilizando $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

Por tanto,

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

o bien

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 5: El logotipo de la IPhO

El logotipo de la Olimpiada Internacional de Física se representa en la figura siguiente.

La figura muestra el fenómeno de la curvatura de la trayectoria de un chorro de fluido alrededor de una superficie cilíndrica. La trayectoria del fluido no sigue la línea discontinua esperada, sino la línea continua circular.

Explique cualitativamente este fenómeno (observado por primera vez por el ingeniero rumano Henry Coanda en 1936).

Este problema no se tendrá en cuenta en la puntuación general de la Olimpiada. La mejor solución recibirá un premio especial.



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema V.** Se trata del **efecto Coandă**. El chorro arrastra el fluido circundante, y el cilindro limita la reposición del fluido arrastrado desde el espacio entre el chorro y la superficie. La menor presión resultante en el lado del cilindro produce una fuerza hacia el interior, que curva el chorro alrededor del cilindro.

Solución

Problema V.

Consideremos un chorro que pasa junto al cilindro en una dirección aproximadamente tangencial. Despreciamos la gravedad en la región de la curvatura ilustrada.

Mediante esfuerzos cortantes viscosos —y mezcla turbulenta si el flujo es turbulento—, el chorro transfiere cantidad de movimiento al fluido circundante y arrastra parte de él. Este proceso se denomina **arrastre**. En un chorro libre cuyo entorno es, por lo demás, simétrico, el fluido puede entrar por ambos lados, de modo que el arrastre no produce una desviación lateral preferente.

La proximidad del cilindro cambia esta situación. El fluido situado entre el chorro y el cilindro es arrastrado hacia el chorro, pero la superficie sólida limita el suministro de fluido de reposición. En consecuencia, se forma una región de presión reducida en el lado del cilindro. La mayor presión en el lado expuesto empuja entonces el chorro hacia el cilindro.

Una vez que el chorro sigue la superficie curva, una diferencia de presión entre sus lados proporciona la aceleración centrípeta necesaria para mantener su trayectoria curva. Para expresar esto cuantitativamente, sean r la distancia al eje del cilindro, v la rapidez tangencial local y ρ la densidad del fluido. Para un flujo localmente circular, despreciando las fuerzas viscosas en el balance de cantidad de movimiento en la dirección normal dentro del seno del chorro,

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{por tanto} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

Así, la presión aumenta al alejarse del cilindro: la fuerza de presión apunta hacia el interior, exactamente como se requiere para desviar el chorro.

Por ejemplo, para un chorro delgado de espesor $h \ll R$, densidad aproximadamente constante y rapidez representativa en su seno U , la diferencia de presión necesaria es del orden de

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

donde R es el radio del cilindro.

El arrastre establece el campo de presión asimétrico, y ese campo de presión curva el chorro. El chorro permanece adherido mientras el flujo pueda mantener la diferencia de presión requerida por la curvatura; si no puede hacerlo, el chorro se separa de la superficie.

La solución se comprobó con la solución oficial.