

IPhO 1983

Theorieaufgaben und Lösungen · Bukarest, Rumänien · 5 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/1983/

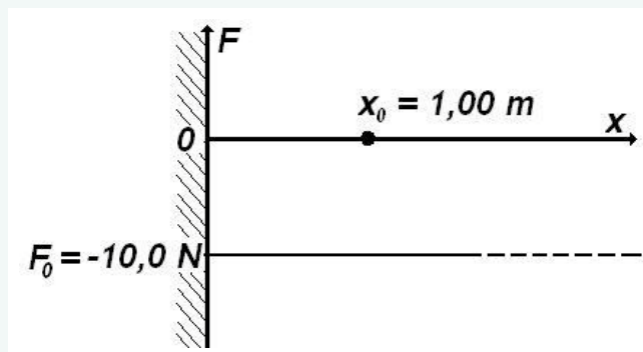
Aufgabe 1: Springendes Teilchen

Ein Teilchen bewegt sich entlang der positiven Achse Ox (eindimensionale Situation) unter dem Einfluss einer Kraft, deren Komponente entlang Ox $F_x = F_0$ beträgt und in der folgenden Abbildung (als Funktion von x) dargestellt ist. Am Ursprung der Achse Ox befindet sich eine vollkommen reflektierende Wand.

Überall, wo sich das Teilchen befindet, wirkt eine Reibungskraft mit dem konstanten Betrag $F_f = 1,00 \text{ N}$.

Das Teilchen startet am Punkt $x = x_0 = 1,00 \text{ m}$ mit der kinetischen Energie $E_c = 10,0 \text{ J}$.

- Bestimmen Sie die Länge des Weges, den das Teilchen zurücklegt, bevor es endgültig zum Stillstand kommt
- Skizzieren Sie die potenzielle Energie $U(x)$ des Teilchens im Kraftfeld F_x .
- Zeichnen Sie qualitativ den Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion seiner Koordinate x .



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a.** Die gesamte Weglänge beträgt $L = 20,0 \text{ m}$. Die endgültige Ruhelage befindet sich an der Wand, bei $x = 0$.
- b.** Mit der Wahl $U(0) = 0$ gilt

$$U(x) = (10,0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung $10,0 \text{ J m}^{-1}$.

- **c.** Der Graph des Geschwindigkeitsbetrags in Abhängigkeit vom Ort besteht aus Wurzelkurvenästen, die aufeinanderfolgende Bewegungen nach außen und nach innen darstellen. Jeder nachfolgende Abstand des äußeren Umkehrpunkts von der Wand beträgt das $9/11$ -Fache des vorhergehenden; die aufeinanderfolgenden Geschwindigkeitsbeträge an der Wand nehmen jeweils um den Faktor $\sqrt{9/11}$ ab. Die Äste konvergieren gegen $(x, v) = (0, 0)$. Bei einer anfänglichen Bewegung in Richtung $+x$ liegen die äußeren Umkehrpunkte bei

$$a_n = \frac{21}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wenn die anfängliche Bewegung zur Wand hin gerichtet ist, ist nach der anfänglichen Bewegung nach innen $21/11$ durch $19/11$ zu ersetzen.

Lösung

Wir schreiben die Feldkraft als $F_x = -F$, wobei

$$F = 10.0 \text{ N}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ N}.$$

Die Reibung wirkt der Bewegung entgegen. Folglich beträgt die resultierende Kraft bei der Bewegung nach außen $-(F + f)$ und bei der Bewegung nach innen $-(F - f)$. Eine vollkommen reflektierende Wand kehrt die Geschwindigkeit um, ohne die kinetische Energie zu ändern.

a. Gesamte Weglänge

Da $F > f$ gilt, kann das Teilchen an keinem Ort $x > 0$ in Ruhe bleiben: Sobald es einen äußeren Umkehrpunkt erreicht, setzt es sich wieder in Richtung der Wand in Bewegung.

Um die endgültige Ruhelage zu bestimmen, betrachten wir einen Umkehrpunkt im Abstand A von der Wand. Während der Bewegung nach innen verrichtet das Feld die Arbeit FA und die Reibung die Arbeit $-fA$. Somit beträgt die kinetische Energie beim Erreichen der Wand

$$K_w = (F - f)A.$$

Nach der Reflexion wird diese Energie bei der Bewegung nach außen gegen das Feld und die Reibung aufgebraucht. Der nächste Umkehrabstand A' erfüllt daher

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

also

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

Die Umkehrabstände und die Geschwindigkeitsbeträge an der Wand streben gegen null. Die endgültige Ruhelage ist daher $x_f = 0$. Außerdem benötigt jede halbe Hin- und Herbewegung eine Zeit, die proportional zur Quadratwurzel ihres Umkehrabstands ist; die verbleibenden Zeiten bilden konvergente geometrische Summen. Somit häufen sich in diesem idealisierten Modell unendlich viele Reflexionen innerhalb einer endlichen Zeit.

Nun wenden wir den Arbeit-Energie-Satz auf die gesamte Bewegung an. Die gesamte Arbeit des konstanten Feldes hängt nur von den Endpunkten ab:

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ N})(-1.00 \text{ m}) = 10.0 \text{ J}.$$

Die Reibung verrichtet die Arbeit $-fL$, während die elastischen Reflexionen keinen Verlust an kinetischer Energie verursachen. Daher gilt

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

Somit ergibt sich

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der anfänglichen Bewegungsrichtung.

b. Potenzielle Energie

Die zum Feld gehörende potenzielle Energie erfüllt

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

Da $F_x = -F$ gilt, folgt

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

Mit $U(0) = 0$ ergibt sich

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

Die Skizze ist eine ansteigende Gerade durch $(0, 0)$, die durch

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

und

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J})$$

verläuft. Die Wand beschränkt den zugänglichen Bereich auf $x \geq 0$. Die Reibung ist dissipativ und wird in diesem Potenzial nicht berücksichtigt.

c. Geschwindigkeitsbetrag als Funktion des Ortes

Die Masse des Teilchens sei m , und wir definieren seinen anfänglichen Geschwindigkeitsbetrag durch

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Da keine Masse angegeben ist, bietet v_0 einen zweckmäßigen Maßstab für die vertikale Achse.

Zunächst sei die Anfangsgeschwindigkeit in Richtung $+x$ gerichtet. Für die anfängliche Bewegung nach außen liefert der Arbeit-Energie-Satz

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

Der erste Umkehrpunkt liegt folglich bei

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

Mit dem in Teil a gefundenen Verhältnis ergeben sich alle nachfolgenden Umkehrpunkte zu

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

Bei einer Bewegung nach außen, die bei a_n endet, ist die verbleibende kinetische Energie gleich der Arbeit, die zum Erreichen dieses Umkehrpunkts erforderlich ist:

$$v_{\rightarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F+f)}{m}(a_n - x)}.$$

Für $n = 0$ wird nur $x_0 \leq x \leq a_0$ durchlaufen. Für $n \geq 1$ wird das gesamte Intervall $0 \leq x \leq a_n$ durchlaufen.

Bei der Bewegung von a_n nach innen hat die resultierende Kraft zur Wand hin den Betrag $F - f$, woraus folgt:

$$v_{\leftarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F-f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

Beide Ausdrücke bezeichnen den **Geschwindigkeitsbetrag**, sind also beide nichtnegativ.

An der Wand schließt der nächste nach außen gerichtete Ast hinsichtlich des Geschwindigkeitsbetrags stetig an den von a_n nach innen gerichteten Ast an:

$$v_{w,n} = \sqrt{\frac{2(F-f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F+f)a_{n+1}}{m}}.$$

Somit gilt

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

Die qualitative Skizze lässt sich wie folgt konstruieren:

- Beginnen Sie bei $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$. Folgen Sie einer fallenden, nach unten gekrümmten Wurzelkurve bis $(1.91 \text{ m}, 0)$.
- Kehren Sie entlang des nach innen gerichteten Astes zurück, wobei Sie sich im Graphen nach links und oben bewegen, bis

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31 v_0).$$

- Folgen Sie nach der Reflexion dem nächsten nach außen gerichteten Ast bis

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

- Wiederholen Sie dies mit zunehmend kleineren Umkehrabständen. Jeder Ast besitzt an seinem äußeren Umkehrpunkt eine vertikale Tangente. Bei gleichem Umkehrabstand liegt der nach außen gerichtete Ast oberhalb des nach innen gerichteten Astes.
- Die Folge konvergiert gegen den Endpunkt $(0, 0)$.

Im Allgemeinen gibt es am selben Ort mehrere Geschwindigkeitsbeträge, die verschiedenen Durchläufen entsprechen; der vollständige Graph stellt daher keine eindeutige Funktion von x dar.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit stattdessen **zur Wand hin** gerichtet ist, lautet der anfängliche Ast

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_c + (F-f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

Beim ersten Auftreffen auf die Wand beträgt die kinetische Energie

$$E_c + (F - f)x_0 = 19.0 \text{ J},$$

also beträgt der Geschwindigkeitsbetrag $\sqrt{1.90} v_0$. Nach dieser Reflexion liegen die Umkehrpunkte bei

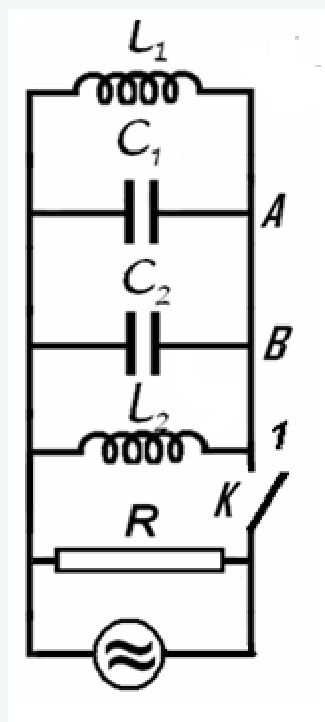
$$b_n = \frac{19}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}.$$

Dieselben Formeln für die nach außen und nach innen gerichteten Äste gelten, wenn a_n durch b_n ersetzt wird.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

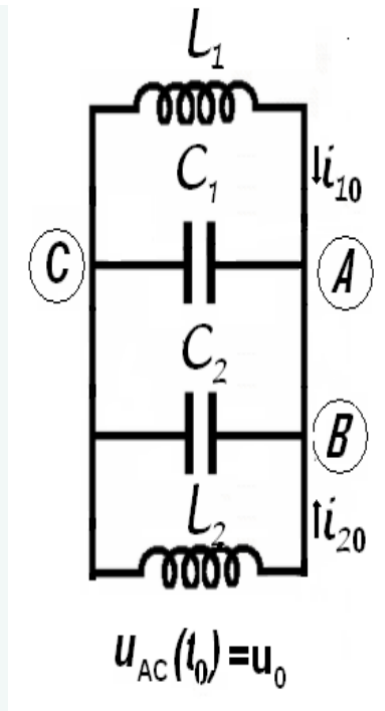
Aufgabe 2: Eine andere Art von Schwingung

Wir betrachten den elektrischen Stromkreis in der Abbildung, für den $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$ und $R = 100 \text{ k}\Omega$ gelten. Bei geschlossenem Schalter K ist der Stromkreis an eine Wechselstromquelle angeschlossen. Der von der Quelle gelieferte Strom hat eine konstante Stromstärke, während seine Frequenz verändert werden kann.



a. Bestimmen Sie das Verhältnis der Frequenz f_m , bei der die Wirkleistung im Stromkreis ihren Maximalwert P_m erreicht, zur Frequenzdifferenz $\Delta f = f_+ - f_-$ der Frequenzen f_+ und f_- , bei denen die Wirkleistung im Stromkreis die Hälfte der maximalen Leistung P_m beträgt.

Der Schalter K wird nun geöffnet. Zum Zeitpunkt t_0 unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters sind die Stromstärken in den Spulen L_1 und L_2 gleich $i_{01} = 0,1 \text{ A}$ und $i_{02} = 0,2 \text{ A}$ (die Ströme fließen wie in der Abbildung angegeben); zum selben Zeitpunkt beträgt die Spannung am Kondensator mit der Kapazität C_1 genau $u_0 = 40 \text{ V}$:



- b. Berechnen Sie die Frequenz der elektromagnetischen Schwingung im Stromkreis $L_1 C_1 C_2 L_2$;
- c. Bestimmen Sie die elektrische Stromstärke im Leiter AB ;
- d. Berechnen Sie die Schwingungsamplitude der elektrischen Stromstärke in der Spule L_1 .

Vernachlässigen Sie die gegenseitige Induktion der Spulen und den elektrischen Widerstand der Leiter. Vernachlässigen Sie die schnellen Übergangsvorgänge beim Schließen oder Öffnen des Schalters.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a. $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$, mit $f_m = 15.9 \text{ kHz}$ und $\Delta f = 106 \text{ Hz}$.
- b. $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$, entsprechend $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$.
- c. $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$, konstant und **von B nach A** gerichtet.
- d. $I_{1,\text{osc}} = 0.204 \text{ A}$. Die Stromstärke schwingt um einen Mittelwert von -0.100 A , wobei die angegebene Richtung des Anfangsstroms als positiv gewählt wird.

Lösung

a. Angeregter Stromkreis: Resonanz und Halbwertsbreite der Leistung

Bei geschlossenem K sind beide Kondensatoren, beide Spulen und der Widerstand parallel geschaltet. Ihre Ersatzkapazität und Ersatzinduktivität betragen

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ nF}, \quad L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ mH}.$$

Die Formel für die Induktivität setzt voraus, dass gemäß der Aufgabenstellung keine gegenseitige Induktion vorliegt.

Es seien I der konstante Effektivwert des Quellenstroms und $\omega = 2\pi f$. Die Admittanz des Stromkreises ist

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Nur in R wird Wirkleistung umgesetzt. Da der Effektivwert der Spannung $I/|Y|$ beträgt, gilt

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

Das Maximum tritt auf, wenn der Blindanteil der Admittanz verschwindet:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

Folglich gilt

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

Bei jeder der beiden Frequenzen mit halber Maximalleistung gilt

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

Die beiden positiven Lösungen lauten

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

Ihre Differenz beträgt daher exakt

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Eine Schmalbandnäherung ist nicht erforderlich.

Numerisch ergibt sich

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2,$$

also

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Hz},$$

und

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Hz}.$$

Damit ist das gesuchte Verhältnis

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

b. Freie elektromagnetische Schwingung

Nach dem Öffnen des Schalters belasten der Widerstand und die Quelle den LC-Kreis nicht mehr. Unter den angegebenen idealisierenden Annahmen ist seine Schwingung ungedämpft.

Wir definieren

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

und wählen für beide Spulenströme i_1, i_2 die Richtung von der linken zur rechten Sammelleitung als positiv. Diese Richtungen stimmen mit den angegebenen Anfangsrichtungen überein, sodass

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

Die Spannungsgleichungen der Spulen liefern

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

Der gesamte Kondensatorstrom von rechts nach links beträgt $C\dot{u}$. Die Kirchhoffsche Knotenregel ergibt daher

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

Durch Differenzieren folgt

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

oder

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

Für die verbleibenden Teilaufgaben benötigen wir die anfängliche zeitliche Ableitung der Spannung:

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

Mit $\theta = \omega_0(t - t_0)$ lautet die Spannung daher

$$\boxed{u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}}.$$

c. Strom im Leiter AB

Es sei j die Stromstärke in AB , positiv von A nach B . Bei A teilt sich der zufließende Spulenstrom auf C_1 und AB auf:

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

Seine zeitliche Ableitung ist

$$\dot{j} = -\frac{u}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left(C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

Für die gegebenen Bauteile gilt

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

Daraus folgt

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

und somit

$$\dot{j} = 0.$$

Die Stromstärke in AB ist also trotz der schwingenden Kondensatorspannung und Spulenströme konstant.

Ihr Wert folgt aus den Anfangsbedingungen:

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

Das negative Vorzeichen kehrt die gewählte Bezugsrichtung um:

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A, von } B \text{ nach } A.$$

d. Schwingungsamplitude der Stromstärke in L_1

Mit $i_1 = j + C_1 \dot{u}$ und den obigen Ergebnissen folgt

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A.} \end{aligned}$$

Für einen schwingenden Term $a \cos \theta + b \sin \theta$ beträgt die Amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$. Daher gilt

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

Der konstante Term beschreibt einen dauerhaften Kreisstrom, der von den idealen Spulen aufrechterhalten wird. Somit ist 0.204 A die Amplitude um den Mittelwert -0.100 A ; die vorzeichenbehaftete Stromstärke reicht von ungefähr -0.304 A bis $+0.104 \text{ A}$.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

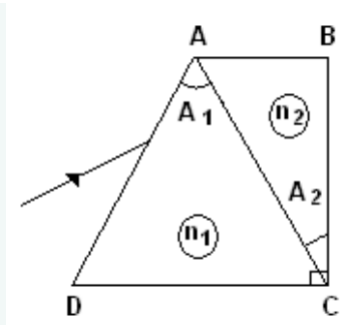
Aufgabe 3: Prismen

Zwei dispergierende Prismen mit den brechenden Winkeln $\hat{A}_1 = 60^\circ$ und $\hat{A}_2 = 30^\circ$ sind wie in der folgenden Abbildung miteinander verklebt ($\hat{C} = 90^\circ$). Die Abhängigkeiten der Brechungsindizes der Prismen von der Wellenlänge sind durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} n_1(\lambda) &= a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}; \\ n_2(\lambda) &= a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

gegeben, wobei

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- Bestimmen Sie die Wellenlänge λ_0 der einfallenden Strahlung, die bei jedem Einfallswinkel ohne Brechung an der Fläche AC durch die Prismen hindurchtritt; bestimmen Sie die zugehörigen Brechungsindizes der Prismen.
- Zeichnen Sie den Strahlengang im Prismensystem für drei verschiedene Strahlungen λ_{red} , λ_0 , λ_{violet} , die unter demselben Winkel auf das System einfallen.
- Bestimmen Sie den minimalen Ablenkwinkel im System für einen Strahl mit der Wellenlänge λ_0 .
- Berechnen Sie die Wellenlänge des Strahls, der in Richtungen parallel zu DC in das System eintritt und aus ihm austritt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a. $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, mit $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$.
- b. An AC wird Rot zum Lot hin gebrochen, λ_0 setzt seinen Weg geradlinig fort, und Violett wird vom Lot weg gebrochen. Bei einem gemeinsamen horizontalen einfallenden Strahl sind die austretenden Strahlen von oben nach unten in der Reihenfolge **Rot**, λ_0 , **Violett** angeordnet, mit zunehmender Ablenkung nach unten.
- c. $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$.
- d. $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$, im Infrarotbereich.

Lösung

Wir verwenden die geometrische Optik und das Snelliussche Brechungsgesetz, setzen den Brechungsindex der umgebenden Luft gleich 1 und vernachlässigen jegliche optische Wirkung des Klebstoffs. Es wird keine Kleinwinkelnäherung verwendet.

Aus der Geometrie folgt

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

Bezogen auf die nach rechts gerichtete, zu DC parallele Richtung gilt somit:

- Die nach innen gerichtete Normale auf AD zeigt unter einem Winkel von 30° nach unten;
- die von Prisma 1 in Prisma 2 gerichtete Normale auf AC zeigt unter einem Winkel von 30° nach oben;
- die nach außen gerichtete Normale auf BC ist horizontal.

a. Wellenlänge ohne Brechung an AC

An der gemeinsamen Grenzfläche lautet das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

Damit die Richtung unverändert bleibt, muss $t = i$ gelten. Fordert man dies für jeden Einfallswinkel und nicht nur für senkrechten Einfall, ergibt sich

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

Somit gilt

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

und daher

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

Für die positive Wellenlänge erhält man

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

Die zugehörigen Brechungsindizes sind

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

b. Strahlengänge

Beide Brechungsindizes nehmen mit zunehmender Wellenlänge ab. Daher wird Violett an der Eintrittsfläche AD stärker zum Lot hin gebrochen als λ_0 , während Rot schwächer gebrochen wird.

An der gemeinsamen Grenzfläche ist die maßgebliche Differenz der Brechungsindizes

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

Da

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

ergeben sich an AC folgende Brechungen:

Strahlung	Vergleich der Brechungsindizes	Verhalten an AC
Rot	$n_1 < n_2$	Wird zum Lot hin gebrochen
λ_0	$n_1 = n_2$	Setzt seinen Weg geradlinig fort
Violett	$n_1 > n_2$	Wird vom Lot weg gebrochen

Für eine genaue Beschreibung der Skizze kann man einen gemeinsamen horizontalen einfallenden Strahl verwenden, dessen Einfallswinkel an AD 30° beträgt. Wählen Sie seinen Eintrittspunkt so hoch, dass alle drei Strahlen BC erreichen.

1. An AD werden alle drei Strahlen nach unten zur nach innen gerichteten Normalen hin gebrochen. Im Inneren von Prisma 1 ist Rot der obere Strahl, λ_0 der mittlere und Violett der untere.

2. Zeichnen Sie an AC die Normale so ein, dass sie 30° oberhalb der Horizontalen zeigt. Rot wird nach oben zu dieser Normale hin abgelenkt, λ_0 verläuft weiterhin geradlinig, und Violett wird weiter nach unten von der Normale weg abgelenkt.
3. An BC ist die Normale horizontal. Beim Übergang in die Luft werden die sichtbaren Strahlen weiter nach unten, von dieser Normale weg, gebrochen.

Die Reihenfolge beim Austritt ist daher **Rot oberhalb von λ_0 , Violett darunter**, und Violett weist die größte Gesamtablenkung auf.

c. Minimale Ablenkung für λ_0

Bei dieser Wellenlänge haben beide Prismen den Brechungsindex $n = 1.5$, sodass die innere Grenzfläche AC keine optische Wirkung hat. Die Eintritts- und Austrittsflächen AD und BC wirken wie die Flächen eines einzigen Prismas mit dem effektiven brechenden Winkel

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

Es seien i, e die äußeren Einfallswinkel und r, r' die entsprechenden inneren Winkel. Aus der Prismengeometrie und dem Snelliusschen Brechungsgesetz folgt

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

Das Minimum tritt beim symmetrischen Strahlengang auf,

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

Beispielsweise ergibt die Ableitung des vorstehenden Ausdrucks

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

Diese verschwindet bei $r = \alpha/2$ und wechselt dort von negativen zu positiven Werten.

Somit gilt

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

und

$$\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ.$$

d. Parallele einfallende und austretende Strahlen

Der einfallende Strahl ist horizontal, sein Einfallswinkel an AD beträgt also 30° . Ist sein Brechungswinkel dort r , so ergibt das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Der austretende Strahl muss ebenfalls horizontal sein. Da BC vertikal ist, erfolgt der Austritt senkrecht zu BC . Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz muss dann auch der Strahl im Inneren von Prisma 2 horizontal verlaufen.

Der Strahl in Prisma 1 verläuft unter dem Winkel $r - 30^\circ$ zur Horizontalen. Sein Einfallswinkel an AC ist folglich

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

Der horizontale Strahl in Prisma 2 bildet mit dem Lot auf AC einen Winkel von 30° . Daher gilt

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

Durch Anwendung des Additionstheorems auf Gleichung (2) und Verwendung von Gleichung (1) erhält man

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Quadrieren und Vereinfachen ergibt

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

Wir führen die positive, dimensionslose Größe

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}$$

ein. Dann gilt

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

Einsetzen in Gleichung (3) liefert

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

oder

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

Nur die positive Lösung ist physikalisch sinnvoll:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

Daher ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

also

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

Zur Kontrolle erhält man bei dieser Wellenlänge

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

und $r \approx 25.2527^\circ$. Der Einfallswinkel an AC beträgt dann 34.7473° , woraus sich durch Brechung ein Winkel von genau 30° ergibt; der Strahl trifft anschließend senkrecht auf BC und tritt horizontal aus.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 4: Compton-Streuung

Ein Photon der Wellenlänge λ_i wird an einem bewegten, freien Elektron gestreut. Dabei kommt das Elektron zum Stillstand, und das entstandene Photon der Wellenlänge λ_0 , das unter einem Winkel von $\theta = 60^\circ$ zur Richtung des einfallenden Photons gestreut wurde, wird erneut an einem zweiten freien, ruhenden Elektron gestreut. Bei diesem zweiten Streuprozess tritt ein Photon mit der Wellenlänge $\lambda_f = 1,25 \times 10^{-10} \text{ m}$ unter einem Winkel von $\theta = 60^\circ$ zur Richtung des Photons der Wellenlänge λ_0 aus. Bestimmen Sie die De-Broglie-Wellenlänge des ersten Elektrons vor der Wechselwirkung. Die folgenden Konstanten sind bekannt:

$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ - Plancksches Wirkungsquantum

$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ - Masse des Elektrons

$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ - Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Ziel der Aufgabe ist es, die Werte der Geschwindigkeit, des Impulses und der Wellenlänge des ersten Elektrons zu berechnen.

Zur Beschreibung der Photonen werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

Tabelle 4.1

	einfallendes Photon	Photon – nach der ersten Streuung	auslaufendes Photon
Impuls	$\vec{p}_i$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_f$
Energie	E_i	E_0	E_f
Wellenlänge	λ_i	λ_0	λ_f

Zur Beschreibung der Elektronen verwendet man

Tabelle 4.2

	erstes Elektron vor dem Stoß	erstes Elektron nach dem Stoß	zweites Elektron vor dem Stoß	zweites Elektron nach dem Stoß
Impuls	$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$
Energie	E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}
Geschwindigkeit	$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe IV (7 Punkte)** — Die Anfangsgeschwindigkeit, der Betrag des Anfangsimpulses und die anfängliche De-Broglie-Wellenlänge des ersten Elektrons sind

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Die Wellenlänge des Photons zwischen den beiden Streuprozessen beträgt $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$, und es gilt $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Lösung

Aufgabe IV. Die vorliegende Aufgabenstellung enthält keine nummerierten Teilaufgaben.

Wir wenden auf jeden Stoß die Energie- und Impulserhaltung an. Für ein Photon gilt

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

während für ein Elektron gilt:

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

Wir verwenden zunächst die exakten relativistischen Beziehungen.

Die zweite Streuung bestimmt λ_0 .

Das zweite Elektron ruht anfangs, daher gilt

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

Der Winkel zwischen dem einfallenden und dem auslaufenden Photon beträgt θ , sodass

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Einsetzen in die Energie-Impuls-Beziehung des Elektrons ergibt

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

Nach dem Kürzen gleicher Terme folgt

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0 E_f (1 - \cos \theta).$$

Durch Division durch $E_0 E_f$ und Einsetzen von $E = hc/\lambda$ erhalten wir die Compton-Verschiebung:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Mit den gegebenen Konstanten gilt

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Wegen $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

und daher

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Die erste Streuung bestimmt λ_i .

Das erste Elektron kommt nach dem Stoß zum Stillstand. Somit gilt

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

Folglich ist

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

und

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta.$$

Erneute Anwendung der Energie-Impuls-Beziehung des Elektrons liefert

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta,$$

was sich vereinfacht zu

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0 E_i (1 - \cos \theta).$$

Damit gilt

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Das Photon gewinnt bei diesem Stoß Energie, sodass seine Wellenlänge abnimmt. Da beide Streuwinkel gleich sind, ist die Abnahme beim ersten Stoß gleich der Zunahme beim zweiten:

$$\boxed{\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}.}$$

Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons.

Die gesamte anfängliche kinetische Energie des ersten Elektrons wird auf das Photon übertragen:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

Numerisch ergibt sich

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

Mit $E_{1e} = \gamma mc^2$ erhalten wir

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

Daher ist

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

also

$$\boxed{v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.}$$

Da $v_{1e}/c \approx 0.0194$ gilt, wäre auch die nichtrelativistische Näherung $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$ bei der Genauigkeit der gegebenen Daten ausreichend.

Anfangsimpuls des Elektrons.

Aus der Impulserhaltung ergeben sich seine Richtung und sein Betrag durch

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_0 - \vec{p}_i,$$
$$p_{1e} = h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}.$$

Einsetzen der Wellenlängen ergibt

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

in Übereinstimmung mit $p_{1e} = \gamma m v_{1e}$. Somit gilt

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Anfängliche De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons.

Die De-Broglie-Beziehung lautet

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

Mit $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ lässt sie sich gleichwertig schreiben als

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

Daher ist

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

oder

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 5: Das Logo der IPhO

Das Logo der Internationalen Physik-Olympiade ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Die Abbildung zeigt das Phänomen, dass sich die Bahn eines Fluidstrahls entlang einer zylindrischen Oberfläche krümmt. Die Bahn des Fluids folgt nicht der erwarteten gestrichelten Linie, sondern der durchgezogenen Kreislinie. Erklären Sie dieses Phänomen qualitativ (es wurde erstmals 1936 vom rumänischen Ingenieur Henry Coanda beobachtet).

Diese Aufgabe wird bei der Gesamtwertung der Olympiade nicht berücksichtigt. Die beste Lösung wird mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe V.** Dies ist der **Coandă-Effekt**. Der Strahl reißt umgebendes Fluid mit, und der Zylinder behindert das Nachströmen von Fluid als Ersatz für das aus dem Zwischenraum zwischen Strahl und Oberfläche mitgerissene Fluid. Der dadurch entstehende niedrigere Druck auf der Zylinderseite erzeugt eine nach innen gerichtete Kraft, die den Strahl um den Zylinder herum ablenkt.

Lösung

Aufgabe V.

Wir betrachten einen Strahl, der annähernd tangential am Zylinder vorbeiströmt. Im Bereich der dargestellten Krümmung vernachlässigen wir die Schwerkraft.

Durch viskose Scherkräfte – und bei turbulenter Strömung auch durch turbulente Durchmischung – überträgt der Strahl Impuls auf das umgebende Fluid und reißt einen Teil davon mit. Dieser Vorgang wird als **Mitreißen** bezeichnet. Bei einem freien Strahl in ansonsten symmetrischer Umgebung kann Fluid von beiden Seiten nachströmen, sodass das Mitreißen keine bevorzugte seitliche Ablenkung hervorruft.

Der nahe gelegene Zylinder verändert diese Situation. Fluid zwischen dem Strahl und dem Zylinder wird in den Strahl mitgerissen, doch die feste Oberfläche behindert das Nachströmen von Ersatzfluid. Dadurch bildet sich auf der Zylinderseite ein Bereich mit vermindertem Druck. Der höhere Druck auf der freien Seite drückt den Strahl dann zum Zylinder hin.

Sobald der Strahl der gekrümmten Oberfläche folgt, liefert eine Druckdifferenz quer zum Strahl die Zentripetalbeschleunigung, die zur Aufrechterhaltung seiner gekrümmten Bahn erforderlich ist. Um dies quantitativ auszudrücken, sei r der Abstand von der Zylinderachse, v die lokale Tangentialgeschwindigkeit und ρ die Dichte des Fluids. Für eine lokal kreisförmige Strömung gilt unter Vernachlässigung viskoser Kräfte in der Impulsbilanz senkrecht zur Strömungsrichtung im Inneren des Strahls:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

Der Druck nimmt somit mit zunehmendem Abstand vom Zylinder zu: Die Druckkraft ist nach innen gerichtet, genau wie es für die Ablenkung des Strahls erforderlich ist.

Für einen dünnen Strahl mit der Dicke $h \ll R$, annähernd konstanter Dichte und einer repräsentativen Strömungsgeschwindigkeit U im Strahlinneren ist die erforderliche Druckdifferenz beispielsweise von der Größenordnung

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

wobei R der Zylinderradius ist.

Das Mitreißen erzeugt das asymmetrische Druckfeld, und dieses Druckfeld krümmt den Strahl. Der Strahl bleibt an der Oberfläche anliegend, solange die Strömung die durch die Krümmung erforderliche Druckdifferenz aufrechterhalten kann; ist dies nicht möglich, löst sich der Strahl von der Oberfläche ab.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.