

IPhO 1983

المسائل النظرية والحلول · بوخارست، رومانيا · 5 مسائل نظرية مع حلول كاملة

eulersolve.org/iphO/1983/

المسألة 1: جسيم قافز

يتحرك جسيم على الجزء الموجب من المحور Ox (حالة أحادية البعد) تحت تأثير قوة مركبتها على Ox هي $F_x = F_0$ ، كما هو مبين في الشكل أدناه (بدلالة x). ويوجد عند مبدأ المحور Ox جدار عاكس تمامًا.

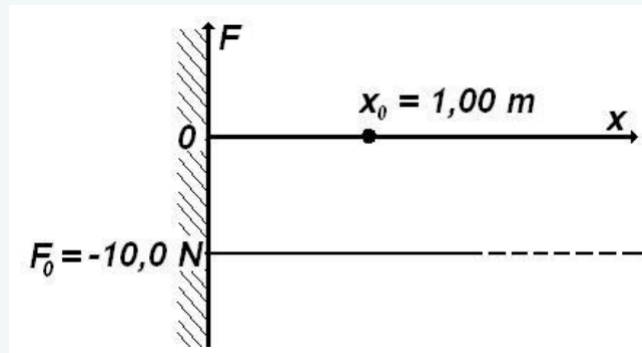
تؤثر قوة احتكاك ذات مقدار ثابت $F_f = 1,00 \text{ N}$ في الجسيم أينما كان موضعه.

ينطلق الجسيم من النقطة $x = x_0 = 1,00 \text{ m}$ بطاقة حركية $E_c = 10,0 \text{ J}$.

a. أوجد طول المسار الذي يقطعه الجسيم قبل أن يتوقف نهائيًا.

b. ارسم رسمًا تخطيطيًا لطاقة الوضع $U(x)$ للجسيم في مجال القوة F_x .

c. ارسم رسمًا نوعيًا يبين اعتماد مقدار سرعة الجسيم على إحداثيه x .



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- a. طول المسار الكلي هو $L = 20.0 \text{ m}$. وموضع السكون النهائي هو الجدار، $x = 0$.
- b. باختيار $U(0) = 0$.

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

يكون منحناها خطأً مستقيمًا يمر بنقطة الأصل وميله 10.0 J m^{-1} .

- **c.** يتكون منحنى مقدار السرعة بدلالة الموضع من فروع جذرية تمثل مرات الحركة المتعاقبة بعيداً عن الجدار ونحوه. وتساوي مسافة كل نقطة انقلاب خارجية متعاقبة $9/11$ من المسافة السابقة؛ وتتناقص مقادير السرعة المتعاقبة عند الجدار بعامل $\sqrt{9/11}$. وتتقارب الفروع إلى $(0, 0) = (x, v)$. إذا كانت الحركة الابتدائية في اتجاه $+x$ ، فإن نقاط الانقلاب الخارجية هي

$$a_n = \frac{21}{11} \left(\frac{9}{11} \right)^n \text{ m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وإذا كانت الحركة الابتدائية نحو الجدار، فاستبدل $21/11$ بـ $19/11$ ، بعد الحركة الابتدائية نحو الجدار.

الحل

نكتب قوة المجال على الصورة $-F$ ، حيث

$$F = 10.0 \text{ N}, \quad f = F_f = 1.00 \text{ N}.$$

يعاكس الاحتكاك الحركة. ومن ثم تكون القوة المحصلة $(F + f)$ - أثناء الحركة بعيداً عن الجدار، و $(F - f)$ - أثناء الحركة نحوه. ويعكس الجدار العاكس تماماً اتجاه السرعة المتجهة دون أن يغير الطاقة الحركية.

a. طول المسار الكلي

بما أن $F > f$ ، فلا يمكن للجسيم أن يبقى ساكناً عند أي $x > 0$: فكلما بلغ نقطة انقلاب خارجية، بدأ بالعودة نحو الجدار. لتحديد موضع السكون النهائي، نعتبر نقطة انقلاب تبعد مسافة A عن الجدار. أثناء الرحلة نحو الجدار، يبذل المجال شغلاً FA ، ويبذل الاحتكاك شغلاً $-fA$. ومن ثم تكون الطاقة الحركية عند بلوغ الجدار

$$K_w = (F - f)A.$$

بعد الانعكاس، تُستهلك هذه الطاقة في الحركة بعيداً عن الجدار ضد كل من المجال والاحتكاك. ولذلك تحقق مسافة الانقلاب التالية A' العلاقة

$$(F + f)A' = (F - f)A,$$

ومن ثم

$$\frac{A'}{A} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{9}{11} < 1.$$

تؤول مسافات الانقلاب ومقادير السرعة عند الجدار إلى الصفر. ولذلك يكون موضع السكون النهائي $x_f = 0$. وعلاوة على ذلك، يستغرق كل نصف رحلة زمناً يتناسب مع الجذر التربيعي لمسافة الانقلاب الخاصة به؛ وتشكل الأزمنة المتبقية مجاميع هندسية متقاربة. وهكذا، في هذا النموذج المثالي، يتراكم عدد لا نهائي من الانعكاسات خلال زمن محدود.

نطبق الآن مبرهنة الشغل والطاقة على الحركة بأكملها. لا يعتمد الشغل الكلي للمجال الثابت إلا على موضعي البداية والنهاية:

$$W_x = F_x(x_f - x_0) = (-10.0 \text{ N})(-1.00 \text{ m}) = 10.0 \text{ J}.$$

يبذل الاحتكاك شغلاً $-fL$ ، بينما لا تتسبب الانعكاسات المرنة في أي فقد للطاقة الحركية. ومن ثم

$$0 - E_c = W_x - fL.$$

وعليه

$$L = \frac{E_c + Fx_0}{f} = \frac{10.0 \text{ J} + 10.0 \text{ J}}{1.00 \text{ N}} = 20.0 \text{ m}.$$

لا تعتمد هذه النتيجة على الاتجاه الابتدائي للحركة.

b. طاقة الوضع

تخضع طاقة الوضع المرتبطة بالمجال للعلاقة

$$F_x = -\frac{dU}{dx}.$$

بما أن $F_x = -F$

$$\frac{dU}{dx} = F, \quad U(x) = Fx + C.$$

وباختيار $U(0) = 0$

$$U(x) = (10.0 \text{ N})x, \quad x \geq 0.$$

الرسم التخطيطي خط مستقيم صاعد يمر بالنقطة $(0, 0)$ ، ويمر بالنقطتين

$$(x, U) = (1.00 \text{ m}, 10.0 \text{ J})$$

و

$$(x, U) = (2.00 \text{ m}, 20.0 \text{ J}).$$

يقصر الجدار المنطقة المتاحة للحركة على $x \geq 0$. والاحتكاك قوة مبددة للطاقة، ولا يدخل في طاقة الوضع هذه.

c. مقدار السرعة بدلالة الموضع

لتكن كتلة الجسم m ، ولنعرّف مقدار سرعته الابتدائية بالعلاقة

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

بما أن الكتلة غير معطاة، فلن v_0 يوفر مقياساً مناسباً للمحور الرأسي.

نأخذ أولاً السرعة المتجهة الابتدائية في اتجاه $+x$. في الحركة الابتدائية بعيداً عن الجدار، تعطي مبرهنة الشغل والطاقة

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_c - (F + f)(x - x_0).$$

وعليه تكون نقطة الانقلاب الأولى

$$a_0 = x_0 + \frac{E_c}{F + f} = 1.00 \text{ m} + \frac{10.0 \text{ J}}{11.0 \text{ N}} = \frac{21}{11} \text{ m} \approx 1.91 \text{ m}.$$

باستخدام النسبة التي أوجدناها في الجزء a، تكون جميع نقاط الانقلاب اللاحقة

$$a_n = a_0 r^n, \quad r = \frac{9}{11}.$$

في حركة بعيداً عن الجدار تنتهي عند a_n ، تساوي الطاقة الحركية المتبقية الشغل اللازم للوصول إلى نقطة الانقلاب تلك:

$$v_{\rightarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F + f)}{m}(a_n - x)}.$$

عندما $n = 0$ ، يُقطع المجال $a_0 \leq x \leq x_0$ فقط. وعندما $n \geq 1$ ، يُقطع المجال الكامل $0 \leq x \leq a_n$.

أثناء الحركة نحو الجدار انطلاقاً من a_n ، يكون مقدار القوة المحصلة المتجهة نحو الجدار $F - f$ ، مما يعطي

$$v_{\leftarrow,n}(x) = \sqrt{\frac{2(F - f)}{m}(a_n - x)}, \quad 0 \leq x \leq a_n.$$

يمثل كلا التعبيرين مقدار السرعة، ولذلك فكلاهما غير سالب.

عند الجدار، يتصل فرع الحركة نحوه انطلاقاً من a_n بفرع الحركة التالي بعيداً عنه اتصالاً مستمراً من حيث مقدار السرعة:

$$v_{w,n} = \sqrt{\frac{2(F - f)a_n}{m}} = \sqrt{\frac{2(F + f)a_{n+1}}{m}}.$$

ومن ثم

$$\frac{v_{w,n+1}}{v_{w,n}} = \sqrt{\frac{9}{11}}.$$

يمكن إنشاء الرسم النوعي كما يأتي:

- ابدأ عند $(x, v) = (1.00 \text{ m}, v_0)$. اتبع منحنى جذر تربيعي متناقصاً ومقعرًا إلى أسفل حتى $(1.91 \text{ m}, 0)$.
- عدّ على امتداد فرع الحركة نحو الجدار، متجهًا إلى اليسار وإلى أعلى على الرسم، حتى

$$(x, v) = \left(0, \sqrt{\frac{189}{110}} v_0\right) \approx (0, 1.31 v_0).$$

- بعد الانعكاس، اتبع فرع الحركة التالي بعيدًا عن الجدار حتى

$$(x, v) = (a_1, 0), \quad a_1 = \frac{189}{121} \text{ m} \approx 1.56 \text{ m}.$$

- كرر ذلك مع مسافات انقلاب تتناقص تبعًا. لكل فرع مماس رأسي عند نقطة انقلابه الخارجية. وعند تساوي مسافة الانقلاب، يقع فرع الحركة بعيدًا عن الجدار فوق فرع الحركة نحوه.
- يتقارب هذا التتابع إلى النقطة النهائية $(0, 0)$.

توجد عمومًا عدة مقادير للسرعة عند الموضع نفسه، تقابل مرات مرور مختلفة؛ ولذلك لا يمثل الرسم الكامل دالة وحيدة القيمة في x .

أما إذا كانت السرعة المتجهة الابتدائية نحو الجدار، فإن الفرع الابتدائي هو

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_c + (F - f)(x_0 - x)]}, \quad 0 \leq x \leq x_0.$$

عند الوصول إلى الجدار للمرة الأولى، تكون الطاقة الحركية

$$E_c + (F - f)x_0 = 19.0 \text{ J},$$

ومن ثم يكون مقدار السرعة $\sqrt{1.90} v_0$. وبعد هذا الانعكاس، تكون نقاط الانقلاب

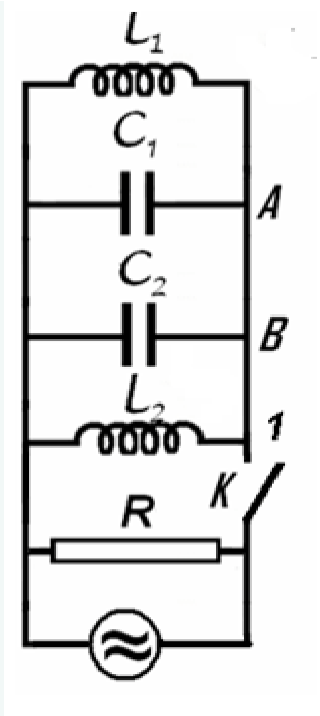
$$b_n = \frac{19}{11} \left(\frac{9}{11}\right)^n \text{ m}.$$

تنطبق الصيغ نفسها لفرعي الحركة بعيدًا عن الجدار ونحوه، مع استبدال a_n بـ b_n .

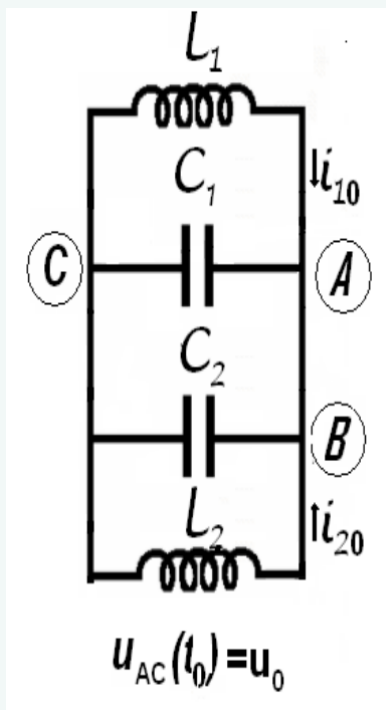
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: نوع مختلف من الاهتزاز

لننظر في الدارة الكهربائية المبينة في الشكل، حيث $L_1 = 10 \text{ mH}$ و $L_2 = 20 \text{ mH}$ و $C_1 = 10 \text{ nF}$ و $C_2 = 5 \text{ nF}$ و $R = 100 \text{ k}\Omega$. عند إغلاق المفتاح K ، تُوصَل الدارة بمصدر تيار متناوب. تكون شدة التيار الذي يزوده المصدر ثابتة، في حين يمكن تغيير تردد التيار.



a. أوجد النسبة بين التردد f_m ، الذي تبلغ عنده القدرة الفعالة في الدارة قيمتها العظمى P_m ، وفرق التردد $\Delta f = f_+ - f_-$ ، حيث f_+ و f_- هما الترددان اللذان تكون عندهما القدرة الفعالة في الدارة نصف القدرة العظمى P_m . يُفتح الآن المفتاح K . عند اللحظة t_0 التي تلي فتح المفتاح مباشرة، تكون شدتا التيارين في الملفين L_1 و L_2 هما $i_{01} = 0,1 A$ و $i_{02} = 0,2 A$ على الترتيب (يسري التياران كما هو مبين في الشكل)؛ وعند اللحظة نفسها، يكون فرق الجهد بين طرفي المكثف ذي السعة C_1 هو $u_0 = 40 V$:



b. احسب تردد الاهتزاز الكهرومغناطيسي في الدارة $L_1 C_1 C_2 L_2$ ؛

c. حدد شدة التيار الكهربائي في الموصل AB ؛

d. احسب سعة اهتزاز شدة التيار الكهربائي في الملف L_1 .

أهم الحث المتبادل بين الملفين والمقاومة الكهربائية للموصلات. وأهم الظواهر العابرة السريعة التي تحدث عند إغلاق المفتاح أو فتحه.
نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- a. • $\frac{f_m}{\Delta f} = 150$ ، حيث $f_m = 15.9 \text{ kHz}$ و $\Delta f = 106 \text{ Hz}$.
- b. • $f_0 = 15.9 \text{ kHz}$ ، وهو ما يقابل $\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$.
- c. • $I_{AB} = 0.100 \text{ A}$ ، وهو ثابت ويتجه من B إلى A .
- d. • $I_{1,osc} = 0.204 \text{ A}$. يتذبذب التيار حول قيمة متوسطة مقدارها -0.100 A ، مع اتخاذ اتجاه التيار الابتدائي المبين اتجاهًا موجبًا.

الحل

a. الدارة ذات الاهتزاز القسري: الرنين وعرض نطاق نصف القدرة

عند إغلاق K ، يكون المكثفان والملفان والمقاومة موصولة جميعًا على التوازي. وتكون السعة المكافئة والمحاثة المكافئة كما يلي:

$$C = C_1 + C_2 = 15 \text{ nF}, \quad L = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 6.6667 \text{ mH}.$$

تستند صيغة المحاثة إلى الافتراض المنصوص عليه بعدم وجود حث متبادل.

لتكن I القيمة الفعالة الثابتة لتيار المصدر، ولتكن $\omega = 2\pi f$. تكون المطاوعة الكهربائية للدائرة:

$$Y = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

المقاومة R وحدها هي التي تبذل القدرة الفعالة. وبما أن القيمة الفعالة للجهد هي $I/|Y|$ ، فإن:

$$P(\omega) = \frac{I^2}{R|Y|^2} = \frac{I^2 R}{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

تبلغ القدرة قيمتها العظمى عندما ينعقد الجزء التفاعلي من المطاوعة:

$$\omega_m C - \frac{1}{\omega_m L} = 0.$$

ومن ثم:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad P_m = I^2 R.$$

عند أي من ترددي نصف القدرة:

$$P = \frac{P_m}{2} \implies \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = \frac{1}{R}.$$

الحلان الموجبان هما:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_m^2 + \frac{1}{4R^2 C^2}} \pm \frac{1}{2RC}.$$

ولذلك يكون الفرق بينهما، على نحو دقيق:

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}, \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

لا حاجة إلى استخدام تقريب النطاق الضيق.
عدديًا:

$$LC = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2,$$

ومن ثم:

$$f_m = \frac{10^5}{2\pi} = 1.59155 \times 10^4 \text{ Hz},$$

وكذلك:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi(10^5)(15 \times 10^{-9})} = 106.103 \text{ Hz}.$$

إذن النسبة المطلوبة هي:

$$\boxed{\frac{f_m}{\Delta f} = \omega_m RC = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 150}.$$

b. الاهتزاز الكهرومغناطيسي الحر

بعد فتح المفتاح، لا تعود المقاومة والمصدر يشكلان حملاً على دائرة LC. وفي ظل الافتراضات المثالية المذكورة، يكون اهتزازها غير مخمد.
نعرف:

$$u(t) = V_A - V_C = V_B - V_C,$$

ونتخذ الاتجاه من السلك الأيسر إلى السلك الأيمن اتجاهًا موجبًا لكلا تيارَي الملفين i_1, i_2 . يتفق هذان الاتجاهان مع الاتجاهين الابتدائيين المبيينين، ولذلك:

$$i_1(t_0) = 0.1 \text{ A}, \quad i_2(t_0) = 0.2 \text{ A}, \quad u(t_0) = 40 \text{ V}.$$

تعطي علاقات الجهد في الملفين:

$$L_1 \dot{i}_1 = -u, \quad L_2 \dot{i}_2 = -u.$$

التيار الكلي في المكثفين من اليمين إلى اليسار هو $C\dot{u}$. ولذلك يعطي قانون كيرشوف للتيار:

$$C\dot{u} = i_1 + i_2.$$

بالتفاضل:

$$C\ddot{u} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u,$$

أو:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = \frac{1}{LC}.$$

وعليه:

$$\boxed{\omega_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.9 \text{ kHz}}.$$

لاستخدامها في الأجزاء المتبقية، تكون القيمة الابتدائية لمشتقة الجهد:

$$\dot{u}(t_0) = \frac{i_{01} + i_{02}}{C} = \frac{0.3}{15 \times 10^{-9}} = 2.00 \times 10^7 \text{ V s}^{-1}.$$

بوضع $\theta = \omega_0(t - t_0)$ ، يكون الجهد إذن:

$$u(t) = (40 \cos \theta + 200 \sin \theta) \text{ V}.$$

c. التيار في الموصل AB

ليكن j التيار في AB ، مع اتخاذ الاتجاه من A إلى B اتجاهًا موجبًا. عند A ، يتفرع تيار الملف الوارد بين C_1 و AB :

$$j = i_1 - C_1 \dot{u}.$$

وتكون مشتقته:

$$\dot{j} = -\frac{u}{L_1} - C_1 \ddot{u} = \left(C_1 \omega_0^2 - \frac{1}{L_1} \right) u.$$

بالنسبة إلى العناصر المعطاة:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = 1.00 \times 10^{-10} \text{ s}^2.$$

وهذا يعني أن:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2},$$

وبالتالي:

$$\dot{j} = 0.$$

إذن التيار في AB ثابت على الرغم من تذبذب جهد المكثفين وتيارَي الملفين.

تُستنتج قيمته من الشروط الابتدائية:

$$j = i_{01} - C_1 \frac{i_{01} + i_{02}}{C_1 + C_2} = 0.1 - \frac{10}{15}(0.3) = -0.100 \text{ A}.$$

تعني الإشارة السالبة أن الاتجاه معاكس للاتجاه المرجعي المختار:

$$I_{AB} = 0.100 \text{ A}, \quad \text{من } A \text{ إلى } B.$$

d. سعة اهتزاز التيار في L_1

باستخدام $i_1 = j + C_1 \dot{u}$ والنتائج السابقة:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -0.100 + C_1 \omega_0 (-40 \sin \theta + 200 \cos \theta) \\ &= (-0.100 + 0.200 \cos \theta - 0.0400 \sin \theta) \text{ A}. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى حد اهتزازي من الشكل $a \cos \theta + b \sin \theta$ ، تكون السعة $\sqrt{a^2 + b^2}$. ولذلك:

$$I_{1,\text{osc}} = \sqrt{(0.200)^2 + (0.0400)^2} = 0.20396 \text{ A} \simeq 0.204 \text{ A}.$$

يمثل الحد الثابت تيارًا دوريًا مستمرًا تدعمه الملفات المثالية. وبذلك تكون 0.204 A هي السعة حول القيمة المتوسطة -0.100 A ؛ وتتراوح قيمة التيار الجبرية تقريبًا بين -0.304 A و $+0.104 \text{ A}$.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: الموشورات

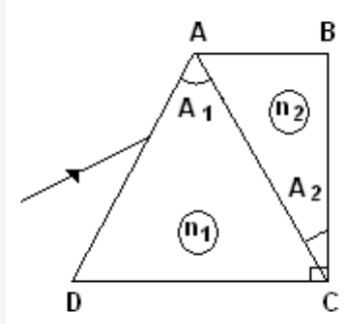
أُصق موشوران مشَّتَّان للضوء، زاويتا رأسيهما $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و $\hat{A}_2 = 30^\circ$ ، كما في الشكل أدناه ($\hat{C} = 90^\circ$). يُعطى اعتماد معاملَي انكسار الموشورين على الطول الموجي بالعلاقَتين

$$n_1(\lambda) = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2};$$

$$n_2(\lambda) = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$$

حيث

$$a_1 = 1,1, \quad b_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ nm}^2, \quad a_2 = 1,3, \quad b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2.$$



- a. حدّد الطول الموجي λ_0 للإشعاع الساقط الذي يمر عبر المنشورين دون انكسار عند الوجه AC ، مهما كانت زاوية السقوط؛ وحدّد معاملي انكسار المنشورين الموافقين له.
- b. ارسم مسار الأشعة في منظومة المنشورين لثلاثة إشعاعات مختلفة λ_{red} , λ_0 , λ_{violet} تسقط على المنظومة بالزاوية نفسها.
- c. حدّد زاوية الانحراف الدنيا في المنظومة لشعاع ذي طول موجي λ_0 .
- d. احسب الطول الموجي للشعاع الذي يدخل المنظومة ويخرج منها في اتجاهين موازيين لـ DC .
- نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- a. $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ ، ويكون $n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0) = 1.5$.
- b. عند AC ، ينكسر الأحمر مقترباً من العمود المقام، ويستمر λ_0 في خط مستقيم، وينكسر البنفسجي مبتعداً عن العمود المقام. ولحزمة ساقطة أفقية مشتركة، يكون ترتيب الأشعة الخارجة من الأعلى إلى الأسفل الأحمر، λ_0 ، البنفسجي، مع تزايد الانحراف نحو الأسفل.
- c. $\delta_{\min} = 2 \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) - 30^\circ \approx 15.69^\circ$.
- d. في نطاق الأشعة تحت الحمراء، $\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}$.

الحل

نستخدم البصريات الهندسية وقانون سنيل، مع اعتبار معامل انكسار الهواء المحيط مساوياً لـ 1، وإهمال أي تأثير بصري للمادة اللاصقة. ولا نستخدم أي تقريب للزوايا الصغيرة.

تعطي هندسة الشكل

$$\angle ACD = 90^\circ - A_2 = 60^\circ, \quad \angle ADC = 180^\circ - A_1 - \angle ACD = 60^\circ.$$

ومن ثم، عند قياس الاتجاهات بالنسبة إلى الاتجاه نحو اليمين الموازي لـ DC :

- يتجه العمود المقام على AD نحو الداخل بزاوية 30° إلى الأسفل؛
- يتجه العمود المقام على AC ، الموجّه من المنشور 1 إلى المنشور 2، بزاوية 30° إلى الأعلى؛
- يكون العمود المقام على BC نحو الخارج أفقياً.

a. الطول الموجي الذي لا يحدث عنده انكسار عند AC

عند الوجه المشترك، يكون قانون سنيل

$$n_1(\lambda) \sin i = n_2(\lambda) \sin t.$$

ولكي يبقى الاتجاه دون تغيير، يجب أن يكون $t = i$. واشتراط ذلك لجميع زوايا السقوط، لا للسقوط العمودي وحده، يعطي

$$n_1(\lambda_0) = n_2(\lambda_0).$$

إذن

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2},$$

وبالتالي

$$\lambda_0^2 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{0.2} = 2.5 \times 10^5 \text{ nm}^2.$$

وبأخذ القيمة الموجبة للطول الموجي،

$$\boxed{\lambda_0 = 500 \text{ nm}}.$$

ويكون معامل الانكسار الموافقان

$$n_1(\lambda_0) = 1.1 + \frac{10^5}{500^2} = 1.5, \quad n_2(\lambda_0) = 1.3 + \frac{5 \times 10^4}{500^2} = 1.5.$$

b. مسارات الأشعة

يتناقص كلا معاملي الانكسار بزيادة الطول الموجي. لذلك، عند وجه الدخول AD ، ينكسر البنفسجي نحو العمود المقام بدرجة أكبر من λ_0 ، بينما ينكسر الأحمر بدرجة أقل.

عند الوجه المشترك، يكون فرق معاملي الانكسار المعني

$$n_1(\lambda) - n_2(\lambda) = -0.2 + \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

وبما أن

$$\lambda_{\text{violet}} < 500 \text{ nm} < \lambda_{\text{red}},$$

فإن حالات الانكسار عند AC هي:

الإشعاع	مقارنة معاملي الانكسار	السلوك عند AC
الأحمر	$n_1 < n_2$	ينكسر مقترباً من العمود المقام
λ_0	$n_1 = n_2$	يستمر في خط مستقيم
البنفسجي	$n_1 > n_2$	ينكسر مبتعداً عن العمود المقام

يمكن تقديم وصف لفظي دقيق للرسم باستخدام حزمة ساقطة أفقية مشتركة، تكون زاوية سقوطها عند AD مساوية لـ 30° . اختر نقطة دخولها على ارتفاع كافٍ لتصل الأشعة الثلاثة كلها إلى BC .

1. عند AD ، تنكسر الأشعة الثلاثة جميعها إلى الأسفل نحو العمود المقام المتجه إلى الداخل. وداخل المنشور 1، يكون الأحمر هو الشعاع العلوي، و λ_0 هو الشعاع الأوسط، والبنفسجي هو الشعاع السفلي.

2. عند AC ، ارسم العمود المقام عليه متجهاً بزاوية 30° فوق الأفقي. يتجه الأحمر إلى الأعلى مقترباً من هذا العمود، ويستمر λ_0 في خط مستقيم، ويتجه البنفسجي أكثر إلى الأسفل مبتعداً عن العمود.

3. عند BC ، يكون العمود المقام أفقيًا. وتنحرف الأشعة المرئية أكثر إلى الأسفل عند انتقالها إلى الهواء، مبتعدةً عن هذا العمود.

لذلك يكون ترتيب الأشعة الخارجة الأحمر فوق λ_0 ، والبنفسجي أسفله، ويكون للبنفسجي أكبر انحراف كلي.

c. الانحراف الأدنى لـ λ_0

عند هذا الطول الموجي، يكون معامل انكسار كلا الموشورين $n = 1.5$ ، فلا يكون للوجه الداخلي AC أي تأثير بصري. ويعمل وجهها الدخول والخروج AD و BC بوصفهما وجهي موشور واحد ذي زاوية رأس فعّالة

$$\alpha = A_1 - A_2 = 30^\circ.$$

لتكن i, e زاويتي السقوط والخروج الخارجيتين، و r, r' الزاويتين الداخليتين الموافقتين لهما. تعطي هندسة الموشور وقانون سنيل

$$\begin{aligned} r + r' &= \alpha, & \delta &= i + e - \alpha, \\ \sin i &= n \sin r, & \sin e &= n \sin r'. \end{aligned}$$

وعليه

$$\delta(r) = \arcsin(n \sin r) + \arcsin(n \sin(\alpha - r)) - \alpha.$$

تتحقق القيمة الدنيا عند المسار المتناظر،

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}, \quad i = e.$$

فعلى سبيل المثال، يعطي اشتقاق العبارة السابقة

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} - \frac{n \cos(\alpha - r)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha - r)}}.$$

تتعدم هذه المشتقة عند $r = \alpha/2$ ، وتتغير إشارتها هناك من السالب إلى الموجب.

إذن

$$i_{\min} = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.5 \sin 15^\circ) \approx 22.8443^\circ,$$

و

$$\boxed{\delta_{\min} = 2i_{\min} - \alpha \approx 15.6886^\circ \approx 15.69^\circ}.$$

d. توازي الشعاعين الساقط والخارج

الشعاع الساقط أفقي، لذا فإن زاوية سقوطه عند AD تساوي 30° . وإذا كانت زاوية انكساره هناك r ، فإن قانون سنيل يعطي

$$n_1 \sin r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

يجب أن يكون الشعاع الخارج أفقيًا أيضًا. وبما أن BC رأسي، يكون الخروج عموديًا على BC . وعندئذ يقتضي قانون سنيل أن يكون الشعاع داخل الموشور 2 أفقيًا كذلك.

يسير الشعاع في الموشور 1 بزاوية $30^\circ - r$ مع الأفقي. ومن ثم تكون زاوية سقوطه عند AC

$$i_{AC} = 30^\circ - (r - 30^\circ) = 60^\circ - r.$$

ويصنع الشعاع الأفقي في الموشور 2 زاوية 30° مع العمود المقام على AC . لذلك

$$n_1 \sin(60^\circ - r) = n_2 \sin 30^\circ = \frac{n_2}{2}. \quad (2)$$

بتوسيع المعادلة (2) واستخدام المعادلة (1)،

$$n_2 = \sqrt{3} n_1 \cos r - n_1 \sin r = \sqrt{3} \sqrt{n_1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

وبالتربيع والتبسيط نحصل على

$$\boxed{3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1}. \quad (3)$$

نعرّف الكمية الموجبة عديمة الأبعاد

$$u = \frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{\lambda^2}.$$

وعندئذ

$$n_1 = 1.1 + 2u, \quad n_2 = 1.3 + u.$$

وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على

$$3(1.1 + 2u)^2 = (1.3 + u)^2 + (1.3 + u) + 1,$$

أو

$$11u^2 + 9.6u - 0.36 = 0.$$

الجذر الموجب وحده مقبول فيزيائياً:

$$u = \frac{-9.6 + \sqrt{108}}{22} \approx 0.0360139.$$

وعليه

$$\lambda = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \text{ nm}^2}{u}} \approx 1178.28 \text{ nm},$$

ومن ثم

$$\boxed{\lambda \approx 1.18 \times 10^3 \text{ nm} = 1.18 \mu\text{m}}.$$

للتحقق، يعطي هذا الطول الموجي

$$n_1 \approx 1.17203, \quad n_2 \approx 1.33601,$$

و $r \approx 25.2527^\circ$. وتكون زاوية السقوط عند AC حينئذ 34.7473° ، فتكون زاوية الانكسار 30° تماماً؛ ثم يصل الشعاع إلى BC عمودياً عليه ويخرج أفقياً.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 4: تشتت كومبتون

يتشتت فوتون ذو طول موجي λ_i بفعل إلكترون حر متحرك. ونتيجة لذلك يتوقف الإلكترون، ويتشتت الفوتون الناتج، ذو الطول الموجي λ_0 ، بزاوية $\theta = 60^\circ$ بالنسبة إلى اتجاه الفوتون الساقط، ثم يتشتت مرة أخرى بفعل إلكترون حر ثانٍ ساكن. في عملية التشتت الثانية هذه، يخرج فوتون ذو طول موجي $\lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$ بزاوية $\theta = 60^\circ$ بالنسبة إلى اتجاه الفوتون ذي الطول الموجي λ_0 . أوجد طول موجة دي برولي للإلكترون الأول قبل التفاعل. الثوابت الآتية معلومة:

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ - ثابت بلانك}$$

$$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \text{ - كتلة الإلكترون}$$

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ - سرعة الضوء في الفراغ}$$

الهدف من المسألة هو حساب قيم سرعة الإلكترون الأول وزخمه وطوله الموجي.

تُستخدم الرموز الآتية لوصف الفوتونات:

الجدول 4.1

الفوتون النهائي	الفوتون - بعد التشتت الأول	الفوتون الابتدائي	
$\vec{p}_f$	$\vec{p}_0$	$\vec{p}_i$	الزخم
E_f	E_0	E_i	الطاقة

الفوتون النهائي	الفوتون - بعد التشتت الأول	الفوتون الابتدائي	
λ_f	λ_i	λ_i	الطول الموجي

ولوصف الإلكترونات تُستخدم الرموز الآتية

الجدول 4.2

الإلكترون الأول قبل التصادم	الإلكترون الأول بعد التصادم	الإلكترون الثاني قبل التصادم	الإلكترون الثاني بعد التصادم	
$\vec{p}_{1e}$	0	0	$\vec{p}_{2e}$	الزخم
E_{1e}	E_{0e}	E_{0e}	E_{2e}	الطاقة
$\vec{v}_{1e}$	0	0	$\vec{v}_{2e}$	السرعة

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- المسألة IV (7 نقاط) — السرعة الابتدائية للإلكترون الأول، ومقدار زخمه الابتدائي، وطول موجة دي برولي له في البداية هي

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

الطول الموجي للفوتون الوسيط هو $\lambda_0 \approx 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$ ، و $\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$.

الحل

المسألة IV. لا توجد أجزاء فرعية مرقمة في نص المسألة المعطى.

نطبق قانوني حفظ الطاقة والزخم على كل تصادم. بالنسبة إلى الفوتون،

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

بينما يحقق الإلكترون العلاقة

$$E_e^2 = m^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

نستخدم في البداية العلاقات النسبية الدقيقة.

يحدد التشتت الثاني λ_0 .

الإلكترون الثاني ساكن في البداية، لذا

$$E_0 + mc^2 = E_f + E_{2e}, \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_f + \vec{p}_{2e}.$$

الزاوية بين الفوتون الوارد والفوتون الصادر هي θ ، ومن ثم

$$p_{2e}^2 c^2 = E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

بالتعويض في علاقة الطاقة والزخم للإلكترون نحصل على

$$(mc^2 + E_0 - E_f)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_f^2 - 2E_0 E_f \cos \theta.$$

بعد اختزال الحدود المشتركة،

$$mc^2(E_0 - E_f) = E_0 E_f (1 - \cos \theta).$$

بالقسمة على $E_0 E_f$ والتعويض بالعلاقة $E = hc/\lambda$ نحصل على إزاحة كومبتون:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

باستخدام الثابت المعطاة،

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{(9.1 \times 10^{-31})(3.0 \times 10^8)} = 2.41758 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

بما أن $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc} = 1.20879 \times 10^{-12} \text{ m},$$

ومن ثم

$$\lambda_0 = 1.25 \times 10^{-10} - 1.20879 \times 10^{-12} = 1.2379121 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

يحدد التشتت الأول λ_i .

يسكن الإلكترون الأول بعد التصادم. إذن

$$E_{1e} + E_i = mc^2 + E_0, \quad \vec{p}_{1e} + \vec{p}_i = \vec{p}_0.$$

وبالتالي،

$$E_{1e} = mc^2 + E_0 - E_i$$

و

$$p_{1e}^2 c^2 = E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta.$$

باستخدام علاقة الطاقة والزخم للإلكترون مرة أخرى،

$$(mc^2 + E_0 - E_i)^2 = m^2 c^4 + E_0^2 + E_i^2 - 2E_0 E_i \cos \theta,$$

ونُبسط هذه العلاقة إلى

$$mc^2(E_0 - E_i) = E_0 E_i (1 - \cos \theta).$$

ومن ثم

$$\lambda_i - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

يكتسب الفوتون طاقة في هذا التصادم، ولذلك ينقص طوله الموجي. ولأن زاويتي التشتت متساويتان، فإن النقصان في التصادم الأول يساوي الزيادة في التصادم الثاني:

$$\boxed{\lambda_i = \lambda_f = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}.}$$

السرعة الابتدائية للإلكترون.

تنتقل الطاقة الحركية الابتدائية للإلكترون الأول بأكملها إلى الفوتون:

$$K_{1e} = E_0 - E_i = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right).$$

عدديًا،

$$K_{1e} = 1.54674 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

بكتابة $E_{1e} = \gamma mc^2$ ، نحصل على

$$\gamma = 1 + \frac{K_{1e}}{mc^2} = 1.0001888569.$$

لذلك

$$v_{1e} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 5.82963 \times 10^6 \text{ m s}^{-1},$$

ومن ثم

$$v_{1e} \approx 5.8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

بما أن $v_{1e}/c \approx 0.0194$ ، فإن التقريب غير النسبي $K_{1e} \approx mv_{1e}^2/2$ سيكون كافياً أيضاً ضمن دقة المعطيات المقدمة.

الزخم الابتدائي للإلكترون.

يحدد حفظ الزخم اتجاهه ومقداره من خلال

$$\vec{p}_{1e} = \vec{p}_0 - \vec{p}_i,$$

$$p_{1e} = h \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{2 \cos 60^\circ}{\lambda_0 \lambda_i}}.$$

بالتعويض بالأطوال الموجية،

$$p_{1e} = 5.30597 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1},$$

وهو ما يتفق مع $p_{1e} = \gamma m v_{1e}$. إذن

$$p_{1e} \approx 5.3 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

طول موجة دي برولي الابتدائي للإلكترون.

علاقة دي برولي هي

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p_{1e}}.$$

وبصورة مكافئة، باستخدام $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ،

$$\lambda_{dB} = \frac{\lambda_0 \lambda_i}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0 \lambda_i}}.$$

لذلك

$$\lambda_{dB} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{5.30597 \times 10^{-24}} = 1.24388 \times 10^{-10} \text{ m},$$

أو

$$\lambda_{dB} \approx 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 5: شعار IPhO

يُمثل شعار الأولمبياد الدولي للفيزياء في الشكل أدناه.

يوضح الشكل ظاهرة انحناء مسار نفثة مائع حول سطح أسطواني. ولا يتبع مسار المائع الخط المنقطع المتوقع، بل يتبع الخط الدائري المتصل.

اشرح هذه الظاهرة شرحاً نوعياً (وقد رصدها لأول مرة المهندس الروماني هنري كواندا عام 1936).
لن تُحتسب هذه المسألة ضمن المجموع العام لدرجات الأولياد. وسيُمنح أفضل حل جائزة خاصة.



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **المسألة V.** هذه هي ظاهرة كواندا. تستجر النفثة المائع المحيط بها، وتحد الأسطوانة من تعويض المائع المستجر من الحيز الواقع بين النفثة والسطح. ويؤدي انخفاض الضغط الناتج على الجانب المواجه للأسطوانة إلى نشوء قوة نحو الداخل، تحني النفثة حول الأسطوانة.

الحل

المسألة V.

لننظر في نفثة تمر بجانب الأسطوانة في اتجاه مماسي تقريباً. نهمل تأثير الجاذبية في منطقة الانحناء المبين في الشكل.

تتقل النفثة الزخم إلى المائع المحيط بها وتحمل جزءاً منه معها بفعل إجهادات القص اللزجة — وبفعل الخلط الاضطرابي أيضاً إذا كان الجريان مضطرباً. وتُسمى هذه العملية **الاستجرار**. وفي حالة نفثة حرة في وسط محيط متناظر من سائر النواحي، يمكن للمائع الدخول من كلا الجانبين، ولذلك لا يؤدي الاستجرار إلى انحراف جانبي في اتجاه مفضل.

تغيّر الأسطوانة القريبة هذا الوضع. فالمائع الواقع بين النفثة والأسطوانة يُستجر إلى داخل النفثة، لكن السطح الصلب يحد من إمداد هذا الحيز بالمائع الذي يعوضه. ونتيجة لذلك، تنشأ منطقة ذات ضغط منخفض على الجانب المواجه للأسطوانة. وعندئذ يدفع الضغط الأعلى على الجانب المكشوف النفثة نحو الأسطوانة.

ما إن تتبع النفثة السطح المنحني حتى يوفر فرق الضغط عبرها التسارع المركزي اللازم للحفاظ على مسارها المنحني. وللتعبير عن ذلك كمياً، ليكن r مقياساً للمسافة من محور الأسطوانة، v السرعة المماسية المحلية، و ρ كثافة المائع. بالنسبة إلى جريان دائري محلياً، ومع إهمال القوى اللزجة في موازنة الزخم في الاتجاه العمودي على المسار داخل جسم النفثة،

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v^2}{r}, \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} > 0.$$

إذن يزداد الضغط بالابتعاد عن الأسطوانة: وتتجه قوة الضغط نحو الداخل، تماماً كما يلزم لتغيير اتجاه النفثة.

فعلى سبيل المثال، بالنسبة إلى نفثة رقيقة سمكها $h \ll R$ ، وكثافتها ثابتة تقريباً، وسرعة تمثيلية في جسمها مقدارها U ، يكون فرق الضغط المطلوب من رتبة

$$p_{\text{outer}} - p_{\text{wall}} \sim \rho U^2 \frac{h}{R},$$

حيث R نصف قطر الأسطوانة.

ينشئ الاستمرار مجال الضغط غير المتناظر، ويؤدي مجال الضغط هذا إلى انحناء النفاثة. ويستمر التصاق النفاثة بالسطح ما دام الجريان قادرًا على الحفاظ على فرق الضغط الذي يتطلبه الانحناء؛ وإذا عجز عن ذلك، انفصلت النفاثة عن السطح.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.