

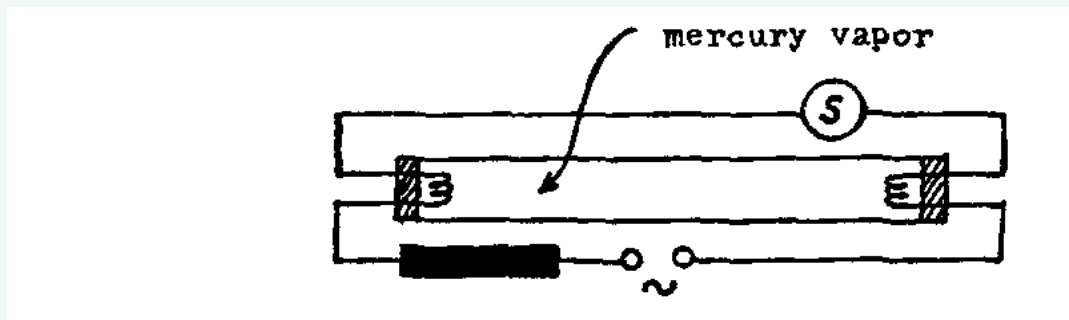
IPhO 1982

理论题与解答 · 德意志联邦共和国马伦特 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1982/

题目 1: 荧光灯

将频率为 50 Hz 的交流电压加在所附电路图所示的荧光灯电路上。



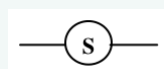
测得以下各量：

总电压（电源电压）	$U = 228.5 \text{ V}$
电流	$I = 0.6 \text{ A}$
荧光灯两端的分电压	$U' = 84 \text{ V}$
串联电抗器的欧姆电阻	$R_d = 26.3 \Omega$

计算时，可将荧光灯本身视为欧姆电阻。

- 串联电抗器的电感 L 是多少？
- 电压与电流之间的相位差 φ 是多少？
- 该装置消耗的有功功率 P_w 是多少？
- 除了限制电流之外，串联电抗器还有另一项重要作用。请指出并解释这一作用！

提示：启辉器



中有一个触点，它在接通灯的电源后不久闭合，随后再次断开并保持断开状态。

- 在具有定量时间刻度的图中，画出灯发出的光通量随时间变化的示意曲线。
- 尽管所加交流电压周期性地过零，为什么灯只需启动一次？
- 根据制造商的说明，对于上述类型的荧光灯，可将一个约为 $4.7 \mu\text{F}$ 的电容器与串联电抗器串联。这会如何影响灯的运行？提供这种连接方式的目的是什么？
- 用所附的分光镜观察展示用演示灯的两个半部。解释这两个光谱之间的差异。你可以走近灯观察，也可以将分光镜留作纪念。

答案

- a) $L \approx 1.09 \text{ H}$ 。
- b) $\varphi \approx 64.1^\circ$ ，电流滞后于电源电压。
- c) $P_w \approx 59.9 \text{ W}$ ：灯中消耗 50.4 W，电抗器电阻中消耗 9.47 W。
- d) 电极预热后，启辉器断开时，电抗器通过自感产生启动所需的高压脉冲。
- e) 光通量以 100 Hz 的频率脉动，每 10 ms 重复一次。理想化的示意曲线为 $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$ 。
- f) 残余电离和高温电极使放电能够在每次短暂的电流过零之后恢复，而不需要再次施加冷启动所需的高压脉冲。
- g) 电容器使电流和平均亮度大致保持不变，同时使电流超前于电压。对于 $4.7 \mu\text{F}$ ， $I_C \approx 0.611 \text{ A}$ ，超前角为 63.6° 。将这盏灯与一盏未经改动的灯配对使用，可使总功率因数接近 1，并减轻闪烁和频闪效应。
- h) 假设演示灯的两个半部分别不涂覆荧光粉和涂覆荧光粉：未涂覆的半部呈现离散的汞发射谱线；涂覆的半部还呈现荧光粉将紫外辐射转换为可见光所产生的宽带可见光发射。

解答

将测得的电压和电流视为有效值。正常工作时，启辉器处于断开状态。我们采用题目给出的欧姆电阻近似来描述灯，并将电抗器建模为理想电感与其绕组电阻的串联。

a) 串联电抗器的电感

灯的电阻为

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \Omega.$$

因此，串联总电阻为

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \Omega.$$

电阻两端的电压与电流同相，而电感两端的电压超前电流 90° 。因此，电压有效值满足相量关系

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

电阻两端的总电压为

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \text{ V}.$$

因此，电感两端的电压为

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \text{ V},$$

且

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = 1.09 \text{ H}.$$

相应的感抗为

$$X_L = \omega L = 342.6 \Omega.$$

b) 相位差

对于电阻与电感串联的电路,

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

所以

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{342.6}{166.3} \right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

电流滞后于所加电压。等价地,

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

取电源电压由负向正过零的时刻为时间原点, 则

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi).$$

c) 有功功率

理想电感储存并返还能量, 不消耗平均功率。因此, 有功功率消耗在灯和绕组电阻中:

$$P_w = I^2(R_{\text{lamp}} + R_d).$$

代入数值得

$$P_w = 0.6^2(166.3) = 59.868 \text{ W} \approx \boxed{59.9 \text{ W}}.$$

其两部分分别为

$$P_{\text{lamp}} = U' I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \text{ W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2(26.3) = \boxed{9.47 \text{ W}}.$$

这与 $P_w = UI \cos \varphi$ 一致。

d) 利用自感启动

启辉器闭合时, 电流流经电抗器、两个电极灯丝以及启辉器触点。这使电极升温, 有利于电子发射。

随后启辉器断开时, 电抗器阻碍电流迅速减小。根据法拉第定律, 其感应电动势为:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

因此, 电流的迅速中断会在灯两端产生一个高压脉冲。该脉冲使气体发生电击穿, 从而建立放电。电抗器磁场中储存的能量,

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2,$$

在这一暂态过程中可供利用。

放电建立后, 启辉器保持断开, 电抗器限制工作电流。由于题目没有给出电流中断所需的时间和电路的暂态特性, 因此无法根据所给数据计算启动脉冲的幅值。

e) 光通量随时间的变化

为画出理想化的示意曲线, 假设发光效能恒定, 并忽略荧光粉的发光延迟。此时, 光通量正比于输送给灯的瞬时功率:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

这里,

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

因此

$$\boxed{\Phi(t) = \Phi_{\text{max}} \sin^2(\omega t - \varphi)} = \frac{\Phi_{\text{max}}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

电流沿两个方向流动时都能使灯发光, 因此光通量的周期为

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

对应的频率为 $\boxed{100 \text{ Hz}}$ 。

作图时, 选取某次电流过零的时刻作为局部时间 $\tau = 0$ 。画一条通过下列各点的光滑、非负曲线, 并使其每隔 10 ms 重复一次:

$\tau \text{ (ms)}$	0	2.5	5.0	7.5	10.0
Φ/Φ_{max}	0	1/2	1	1/2	0

曲线在极小值和极大值处的切线均为水平线。其平均值为 $\Phi_{\text{max}}/2$ 。

相对于 (b) 中采用的电源电压时间原点, 第一次电流过零发生在

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms}.$$

因此, 理想情况下, 光通量的极小值出现在 3.56, 13.56, ... ms, 极大值出现在 8.56, 18.56, ... ms。

由于没有给出发光效能, 无法确定光通量的绝对值。在实际的灯中, 荧光粉的余辉会使光输出变得平滑并产生延迟, 因此光通量的极小值不一定降至零。

f) 为什么不需要新的启动脉冲

初始时气体的电离程度很低, 需要很高的启动电压才能建立放电。工作过程中, 气体中存在带电粒子, 电极也保持高温。

在每次电流过零前后, 放电中断的时间太短, 不足以使气体的电离完全消失, 也不足以使电极冷却。因此, 在下一个半周期内, 放电可以在远低于初次冷启动所需的电压下恢复。

此外, 由于存在相位差, 电源电压过零与电流过零并不同时发生。不过, 电流确实每隔 10 ms 过零一次; 残余电离和受热电极解释了为什么不需要再次由启辉器产生脉冲。

g) 串联电容器的影响和目的

串联一个电容器后, 阻抗变为

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

对于 $C = 4.7 \mu\text{F}$,

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \Omega.$$

因此, 净电抗为

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \Omega.$$

它呈容性，其绝对值与原来的感抗几乎相同。

新的电流为

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

阻抗的相位角为

$$\varphi_C = \tan^{-1}\left(\frac{-334.6}{166.3}\right) = -63.6^\circ,$$

所以此时电流超前于电压 $\boxed{63.6^\circ}$ 。

灯的功率变为

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

接近原来的 50.4 W。因此，其平均亮度大致保持不变。

为了理解为何选择这一电容值，要求电流的大小完全不变：

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

非零解为

$$X_C = 2X_L,$$

由此得到

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

这与制造商给出的近似值 $4.7 \mu\text{F}$ 一致。在这一电容值下，阻抗由 $R + jX_L$ 变为 $R - jX_L$ 。

由此可以采用一种实用的**双灯连接方式**：将两个灯支路并联在电源两端，其中一个使用原来的电抗器，另一个使用电抗器并串联电容器。

- **提高功率因数。** 在两支路电流大小相等的理想情况下，两电流分别滞后和超前电压相同的角度。它们的无功分量相互抵消：

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

总电流与电压同相，因此功率因数为 1。使用标称值为 $4.7 \mu\text{F}$ 的电容器时，无功分量也几乎完全抵消。

- **减小光的调制幅度。** 两盏灯在不同时刻达到各自光通量的极小值。在 (e) 的模型下，它们的总光通量为

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)].\end{aligned}$$

由于 $|\cos(2\varphi)| \approx 0.619 < 1$ ，在这一模型中，总光通量始终不会降至零。尽管光通量并非完全恒定，闪烁和频闪效应仍有所减轻。

h) 两个半部的光谱

预期的解释是，演示灯的一个半部未涂覆荧光粉，另一个半部涂覆了荧光粉。

在未涂覆荧光粉的半部，观察到的可见光直接来自汞放电。受激汞原子在离散的跃迁能量处发射光子，

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

因此，分光镜中呈现的是彼此分离的发射谱线。放电辐射中有很大部分是紫外辐射，因此肉眼看不见。

在涂覆荧光粉的半部，涂层吸收紫外辐射，并将其中一部分能量以可见光的形式重新发射。这种荧光产生宽的可见光发射带，在简易分光镜中往往看起来近乎连续。汞直接发射的谱线仍可能叠加在这一较宽的发射光谱上。

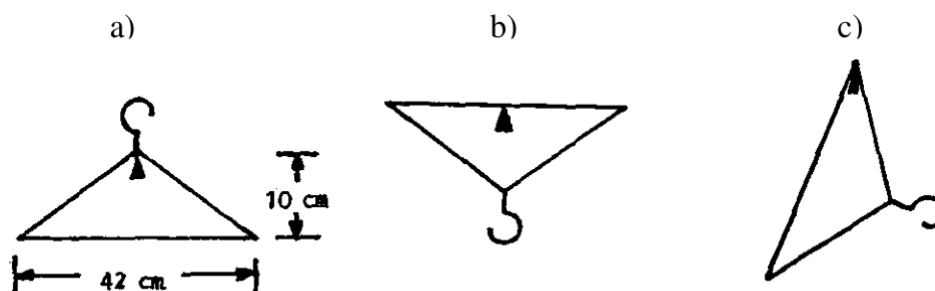
因此，涂层增加了有效的可见光输出，并使光的颜色趋向白色。两个光谱的差异源于荧光粉将紫外辐射转换为可见光。

解答已与官方解答核对。

题目 2：摆动的衣架

一个（经过适当制作的）金属丝衣架能够在图示平衡位置附近，在图面内做小振幅摆动。在位置 a) 和 b) 中，长边水平。另外两边的长度相等。所有情况下的摆动周期都相同。

质心位于何处？摆动周期是多少？



除给定尺寸外，图中不包含任何其他信息。例如，质量的具体分布情况完全未知。

题目译自官方英文原文。

答案

- **质心位置：** 位于三角形的对称轴上、高的中点处：距长边 5.0 cm，距长边所对的顶点 5.0 cm。
- **共同周期：**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

其中长度以米为单位，且 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。

解答

将衣架视为刚性复摆，在每种悬挂方式下，悬点均固定，摩擦可忽略。设其质量为 M ，绕通过质心且垂直于衣架平面的轴的转动惯量为 $I_G = Mk^2$ 。

若质心位于悬点下方、距悬点为 d ，由平行轴定理和重力矩可得

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

对于小振幅摆动， $\sin \theta \simeq \theta$ ，因此

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

因此，周期相同意味着

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

对于三个悬点均具有相同的值。

质心的位置。

将长边所对的顶点记为 A ，长边的中点记为 B ，在 c) 中用作悬点的顶点记为 C 。给定尺寸为

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

在位置 a) 中，平衡条件要求质心 G 位于 A 的正下方。由于三角形是等腰三角形，且长边水平， G 位于直线 AB 上。在位置 b) 中，悬点同样必须位于 G 的正上方，因此悬点为 B 。

这两个平衡位置都必须是稳定的。因此， G 位于 A 和 B 之间。令 $BG = x$ ，则有

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

a) 和 b) 中的周期相等，给出

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

即

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

因此，要么

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{或} \quad k^2 = x(h - x).$$

第二种可能性将意味着

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

但在悬挂方式 c) 中，

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

这与周期相同相矛盾。因此

$$\boxed{x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

因此，质心位于长边中点与其所对顶点之间的正中间。得出这一结论不需要假设质量均匀分布。

摆动周期。

对于上述质心位置，质心到各悬点的距离为

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

令距离分别为 d 和 r 时的周期相等，得

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

由于 $d \neq r$ ，可得

$$k^2 = dr.$$

因此，共同的等效摆长为

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m}.$$

最后，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：热气球

考虑一个体积固定为 $V_B = 1.1 \text{ m}^3$ 的热气球。气球囊皮的质量为 $m_H = 0.187 \text{ kg}$ ，其体积与 V_B 相比可忽略不计。

气球将在外界空气温度为 $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ 、外界气压为标准大气压 $p_o = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ 的地点升空。在这些条件下，空气密度为 $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 。

a) 要使气球恰好悬浮，气球内被加热的空气必须达到什么温度 ϑ_2 ?

b) 首先将气球固定在地面上，并将内部空气加热至稳态温度 $\vartheta_3 = 110^\circ\text{C}$ 。气球用一根绳子系住。计算绳子所受的力。

c) 设气球底部已扎紧封闭（内部空气密度保持不变）。当内部空气的稳态温度为 $\vartheta_3 = 110^\circ\text{C}$ 时，气球在温度为 20°C 、地面气压为 $p_o = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ 的等温大气中上升。在这些条件下，气球能达到多高的高度 h ?

d) 在高度 h 处，将气球（问题 c) 中的气球）从平衡位置拉开 10 m ，然后再次释放。

通过定性推理，判断它将做什么样的运动！

题目译自官方英文原文。

答案

- a) $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ\text{C}$ ，对应于 $T_2 \approx 341.5 \text{ K}$ 。
- b) 绳子的张力： $F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}$ 。气球向上拉绳子。
- c) 相对于出发点的平衡高度： $h \approx 8.4 \times 10^2 \text{ m} = 0.84 \text{ km}$ 。

- d) 围绕 h 做近似简谐的竖直振动，忽略空气阻力时振幅为 10 m。空气阻力使振动衰减。

解答

将空气视为组成不变的理想气体，

$$p = \rho R_s T,$$

其中 R_s 是空气的比气体常量， T 是热力学温度。相关温度为

$$T_1 = 293.15 \text{ K}, \quad T_3 = 383.15 \text{ K}.$$

在 (a) 和 (b) 中，气球底部敞开，因此内部压强等于周围空气的压强。忽略气球尺寸范围内压强和密度的变化。在 (c) 中封闭气球后，其内部空气的质量及给定的体积均保持不变。

取 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ，并认为在所涉及的高度范围内它保持不变。

a) 恰好悬浮所需的温度

根据阿基米德原理，向上的浮力等于排开的外界空气的重力：

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

当气球恰好悬浮时，浮力与囊皮及内部空气的总重力平衡：

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B) g.$$

因此，所需的内部空气密度为

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03 \text{ kg m}^{-3}.$$

由于内外压强相等，由理想气体状态方程可得

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

因此

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53 \text{ K},$$

即

$$\boxed{\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4 \text{ }^\circ\text{C}}.$$

b) 绳子所受的力

在 $T_3 = 383.15 \text{ K}$ 时，内部空气密度为

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

绳子提供向下的拉力，以平衡浮力超出重力的部分：

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B) g.$$

代入数值，

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

所以

$$\boxed{F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}}.$$

这就是绳子的张力：绳子向下拉气球，气球则向上拉绳子。

c) 等温大气中的平衡高度

底部扎紧封闭后，气球的总质量保持为

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

为求出浮力如何随高度变化，将大气的流体静力学平衡方程

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

与外界温度恒为 T_1 时的理想气体状态方程相结合：

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

于是，

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

从地面处（此处 $p = p_0$ ）开始积分，得

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

其中大气标高为

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m}.$$

平衡时，浮力等于气球恒定的重力：

$$\rho(h) V_B g = M g.$$

因此，该处的外界空气密度必须为

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

利用密度随高度按指数变化的关系，

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

从而

$$h = H \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B} \right).$$

代入数值，

$$h = (8605.16) \ln \left(\frac{1.2}{1.08813} \right) \approx 842 \text{ m}.$$

因此

$$\boxed{h \approx 0.84 \text{ km}}.$$

这就是 (d) 部分所指的平衡高度。自由上升的气球可能因惯性而越过这一高度。

d) 偏离平衡位置后的运动

气球的重力和体积保持不变，而外界空气密度随高度增加而减小。

- 如果气球向上偏离平衡位置，它周围的空气密度就会减小。浮力变得小于重力，因此合力向下。

- 如果气球**向下**偏离平衡位置，它周围的空气密度就会增大。浮力变得大于重力，因此合力向上。

因此，这个力使气球趋向于回到高度 h 。到达 h 时，气球因惯性而越过平衡位置，从而产生振动。

由于位移与大气标高相比很小，这种运动近似为简谐运动。为说明这一点，令 $x = z - h$ 。由于 $\rho(h)V_B = M$ ，以向上为正方向的合力为

$$F(x) = Mg \left(e^{-x/H} - 1 \right).$$

这里

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

所以

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

这是一个与位移成正比的回复力。

因此，忽略空气阻力时，气球做**近似简谐的竖直振动**，初始振幅为 10 m。空气阻力耗散能量，使振动衰减，最终使气球静止在平衡高度处。

解答已与官方解答核对。