

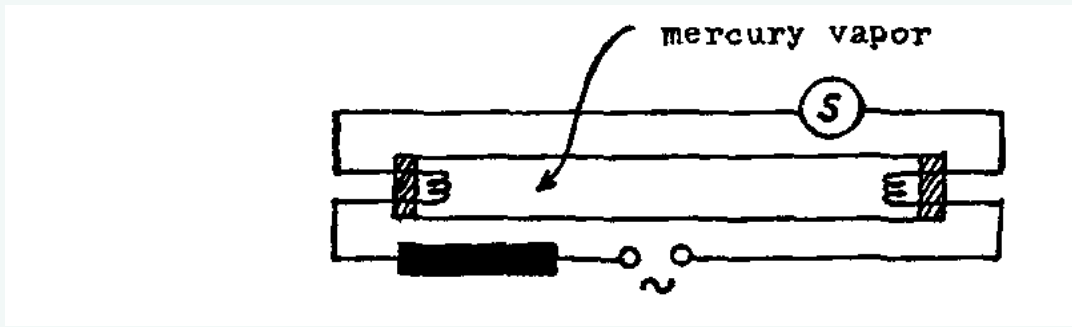
IPhO 1982

Teorik sorular ve çözümler · Malente, Almanya Federal Cumhuriyeti · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipro/1982/

Soru 1: Floresan lamba

Ekteki devre şemasında gösterilen floresan lambaya 50 Hz frekanslı bir alternatif gerilim uygulanmaktadır.



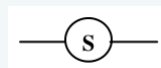
Aşağıdaki nicelikler ölçülmüştür:

toplam gerilim (şebeke gerilimi)	$U = 228.5 \text{ V}$
elektrik akımı	$I = 0.6 \text{ A}$
floresan lambanın uçları arasındaki gerilim	$U' = 84 \text{ V}$
seri reaktörün omik direnci	$R_d = 26.3 \Omega$

Hesaplamalarda floresan lambanın kendisi omik bir direnç olarak kabul edilebilir.

- Seri reaktörün L endüktansı nedir?
- Gerilim ile akım arasındaki φ faz farkı nedir?
- Düzeneğin dönüştürdüğü P_w aktif gücü nedir?
- Seri reaktörün, akımı sınırlamanın yanı sıra önemli bir işlevi daha vardır. Bu işlevi belirtiniz ve açıklayınız!

İpucu: Starter



lamba açıldıktan kısa bir süre sonra kapanan, ardından tekrar açılan ve açık kalan bir kontak içerir.

- Nicel bir zaman ölçeği içeren bir grafikte, lambanın yaydığı ışık akısının zamanla değişimini çizin.
- Uygulanan alternatif gerilim düzenli aralıklarla sıfırdan geçtiği hâlde lambanın neden yalnızca bir kez ateşlenmesi gerekir?

g) Üreticinin belirttiğine göre, açıklanan türde bir floresan lamba için seri reaktöre yaklaşık $4.7 \mu\text{F}$ kapasiteli bir kondansatör seri olarak bağlanabilir. Bu, lambanın çalışmasını nasıl etkiler ve bu olarak hangi amaçla sağlanmıştır?

h) Sergilenen gösteri lambasının her iki yarısını, verilen spektroskopla inceleyiniz. İki spektrum arasındaki farkları açıklayınız. Lambanın yanına gidebilir ve spektroskopu hatıra olarak saklayabilirsiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) $L \approx 1.09 \text{ H}$.
- b) $\varphi \approx 64.1^\circ$; akım, şebeke geriliminin **gerisindedir**.
- c) $P_w \approx 59.9 \text{ W}$: lambada 50.4 W , reaktörün direncinde ise 9.47 W .
- d) Reaktör, elektrotlar önceden ısıtıldıktan sonra starter açıldığında özindüksiyon yoluyla **yüksek gerilimli ateşleme darbesini** üretir.
- e) Işık akısı 100 Hz frekansla dalgalanır ve her 10 ms 'de bir tekrarlanır. İdealleştirilmiş bir çizim $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$ ile verilir.
- f) Gazda kalan iyonlaşma ve sıcak elektrotlar, akımın sıfır olduğu her kısa aralığın ardından, soğuk başlatma için yeni bir ateşleme darbesine gerek kalmadan deşarjın yeniden başlamasını sağlar.
- g) Kondansatör, akımı ve ortalama parlaklığı yaklaşık olarak korurken akımın gerilimin **önüne geçmesini** sağlar. $4.7 \mu\text{F}$ için $I_C \approx 0.611 \text{ A}$ olur ve akım 63.6° öndedir. Bu lambanın, devresi değiştirilmemiş bir lambayla birlikte kullanılması toplam güç faktörünü yaklaşık bire getirir; titreşimi ve stroboskopik etkileri azaltır.
- h) Gösteri lambasının bir yarısının kaplamasız, diğer yarısının fosfor kaplı olduğu varsayılırsa: kaplamasız yarıda ayrık cıva emisyon çizgileri görülür; kaplı yarıda bunlara ek olarak, morötesi ışınının görünür ışığa dönüştürülmesiyle oluşan geniş bantlı görünür fosfor emisyonu görülür.

Çözüm

Ölçülen gerilimlerin ve akımın etkin (RMS) değerler olduğu kabul edilir. Normal çalışma sırasında starter açıktır. Lamba için belirtilen omik yaklaşımı kullanır ve reaktörü, sargı direncine seri bağlı ideal bir endüktans olarak modelleriz.

a) Seri reaktörün endüktansı

Lambanın direnci

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \Omega.$$

Böylece toplam seri direnç

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \Omega.$$

Direnç üzerindeki gerilim akımla aynı fazdayken, endüktif gerilim akımın 90° önündedir. Dolayısıyla etkin gerilimler şu fazör bağıntısını sağlar:

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

Dirençler üzerindeki toplam gerilim

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \text{ V}.$$

Buna göre endüktif gerilim

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \text{ V},$$

ve

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = \boxed{1.09 \text{ H}}.$$

Buna karşılık gelen endüktif reaktans

$$X_L = \omega L = \boxed{342.6 \Omega}.$$

b) Faz farkı

Seri bağlı bir direnç ve endüktans için

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

dolayısıyla

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{342.6}{166.3}\right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

Akım, uygulanan gerilimin gerisindedir. Eşdeğer olarak,

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

Zamanın başlangıcı, şebeke geriliminin artarak sıfırdan geçtiği an olarak seçilirse,

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi).$$

c) Aktif güç

İdeal bir endüktans enerjiyi depolar ve geri verir; ortalama güç tüketmez. Bu nedenle aktif güç lambada ve sargı direncinde harcanır:

$$P_w = I^2(R_{\text{lamp}} + R_d).$$

Sayısal olarak,

$$P_w = 0.6^2(166.3) = 59.868 \text{ W} \approx \boxed{59.9 \text{ W}}.$$

Bu gücün iki bileşeni

$$P_{\text{lamp}} = U' I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \text{ W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2(26.3) = \boxed{9.47 \text{ W}}.$$

Bu sonuç, $P_w = UI \cos \varphi$ ile uyumludur.

d) Özindüksiyonla ateşleme

Starter kapandığında akım reaktörden, iki elektrot filamanından ve starter kontağından geçer. Bu, elektrotları ısıtarak elektron salımını kolaylaştırır.

Starter daha sonra açıldığında reaktör, akımın hızla azalmasına karşı koyar. Faraday yasası, indüklenen elektromotor kuvveti verir:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Bu nedenle akımın hızla kesilmesi, lambanın uçları arasında büyük bir gerilim darbesi oluşturur. Bu darbe gazda elektriksel delinmeyi başlatır ve deşarjı oluşturur. Reaktörün manyetik alanında depolanan

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2,$$

enerjisi, bu geçici rejim sırasında kullanılabilir.

Deşarj oluştuğundan sonra starter açık kalır ve reaktör çalışma akımını sınırlar. Kesilme süresi ve devrenin geçici rejim özellikleri belirtilmediği için ateşleme darbesinin büyüklüğü verilen bilgilerden hesaplanamaz.

e) Işık akısının zamana bağıllığı

İdealleştirilmiş bir çizim için ışık etkinliğinin sabit olduğunu varsayalım ve fosforun ışık yayımındaki gecikmeyi ihmal edelim. Bu durumda ışık akısı, lambaya aktarılan anlık güçle orantılıdır:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Burada,

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Dolayısıyla

$$\Phi(t) = \Phi_{\text{max}} \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{\Phi_{\text{max}}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

Akımın her iki yönünde de ışık üretildiğinden ışık akısının periyodu

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

olur; bu da $\boxed{100 \text{ Hz}}$ frekansına karşılık gelir.

Çizim için, akımın sıfır olduğu bir anda yerel zamanı $\tau = 0$ seçiniz. Aşağıdaki noktalardan geçen, düzgün ve negatif değer almayan bir eğri çizip bunu her 10 ms'de bir tekrarlayınız:

τ (ms)	0	2.5	5.0	7.5	10.0
Φ/Φ_{max}	0	1/2	1	1/2	0

Eğrinin minimum ve maksimum noktalarında teğetleri yataydır. Ortalama değeri $\Phi_{\text{max}}/2$ 'dir.

(b) kısmında kullanılan şebeke geriliminin zaman başlangıcına göre, akımın ilk sıfır geçişi

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms.}$$

anında gerçekleşir. Buna göre ideal ışık minimumları 3.56, 13.56, ... ms anlarında, maksimumları ise 8.56, 18.56, ... ms anlarında oluşur.

Işık etkinliği verilmediği için ışık akısının mutlak değeri belirlenemez. Gerçek bir lambada fosforun kalıcılığı, ışık çıkışındaki dalgalanmaları yumuşatır ve geciktirir; dolayısıyla minimumların sıfıra ulaşması gerekmez.

f) Yeni bir ateşleme darbesinin neden gereksiz olduğu

Başlangıçta zayıf biçimde iyonlaşmış gazda deşarj oluşturmak için yüksek başlatma gerilimi gerekir. Çalışma sırasında gaz yüklü parçacıklar içerir ve elektrotlar sıcak kalır.

Akımın her sıfır geçişi çevresindeki kesinti, iyonlaşmanın tamamen kaybolması ve elektrotların soğuması için fazla kısadır. Bu nedenle deşarj, bir sonraki yarım periyotta, ilk soğuk başlatma için gereken gerilimden çok daha düşük bir gerilimde yeniden başlayabilir.

Ayrıca faz farkı nedeniyle kaynak geriliminin sıfır geçişleri ile akımın sıfır geçişleri çakışmaz. Yine de akım her 10 ms'de bir sıfırdan geçer; gazda kalan iyonlaşma ve ısınmış elektrotlar, yeni bir starter darbesinin neden gereksiz olduğunu açıklar.

g) Seri kondansatörün etkisi ve amacı

Seri bir kondansatör bağlandığında empedans

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

olur. $C = 4.7 \mu\text{F}$ için,

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \Omega.$$

Dolayısıyla net reaktans

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \Omega.$$

olur. Bu reaktans kapasitiftir ve büyüklüğü başlangıçtaki endüktif reaktansın büyüklüğüne hemen hemen eşittir.

Yeni akım

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

Empedansın faz açısı

$$\varphi_C = \tan^{-1} \left(\frac{-334.6}{166.3} \right) = -63.6^\circ,$$

olduğundan akım artık gerilimin $\boxed{63.6^\circ}$ önündedir.

Lambanın gücü

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

olur; bu, başlangıçtaki 50.4 W değerine yakındır. Dolayısıyla ortalama parlaklığı yaklaşık olarak korunur.

Bu kapasitenin neden seçildiğini görmek için akımın büyüklüğünün tam olarak değişmeden kalması koşulunu koyalım:

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

Sıfırdan farklı çözüm

$$X_C = 2X_L,$$

olup buradan

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

elde edilir; bu, üreticinin yaklaşık $4.7 \mu\text{F}$ değeriyle uyumludur. Bu değerde empedans, $R + jX_L$ 'den $R - jX_L$ 'ye dönüşür.

Bu, kullanışlı bir **iki lambalı düzenlemeye** olanak sağlar: biri başlangıçtaki reaktörü, diğeri ise reaktör ile seri kondansatörü içeren iki lamba kolunu besleme uçlarına paralel bağlayınız.

- **Güç faktörünün iyileştirilmesi.** Akımların eşit olduğu ideal durumda iki akımdan biri eşit bir açıyla geride, diğeri öndedir. Reaktif bileşenleri birbirini götürür:

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

Toplam akım gerilimle aynı fazdadır ve güç faktörü bir olur. Nominal $4.7 \mu\text{F}$ değeriyle bu giderme hemen hemen tamdır.

- **Işık modülasyonunun azaltılması.** Lambalar ışık minimumlarına farklı zamanlarda ulaşır. (e) kısmındaki modele göre toplam ışık akıları

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)].\end{aligned}$$

olur. $|\cos(2\varphi)| \approx 0.619 < 1$ olduğundan, bu modelde toplam ışık hiçbir zaman sıfıra düşmez. Işık tam olarak sabit olmasa da titreşim ve stroboskopik etkiler azalır.

h) İki yarının spektrumları

Beklenen yorum, gösteri lambasının bir yarısının kaplamasız, diğeri yarısının ise floresan fosforla kaplı olduğudur.

Kaplamasız yarıda, gözlenen görünür ışık doğrudan civa deşarjından gelir. Uyarılmış civa atomları, ayrık geçiş enerjilerinde fotonlar yayar:

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

bu nedenle spektroskopta birbirinden ayrı emisyon çizgileri görülür. Deşarj ışınımının büyük bir bölümü morötesi olduğundan gözle görülmez.

Fosfor kaplı yarıda, kaplama morötesi ışınımı soğurur ve enerjisinin bir kısmını görünür ışık olarak yeniden yayar. Bu floresans, basit bir spektroskopta çoğu zaman neredeyse sürekli görünen geniş görünür emisyon bantları oluşturur. Doğrudan civa çizgileri, bu daha geniş bantlı emisyonun üzerine binmiş olarak kalabilir.

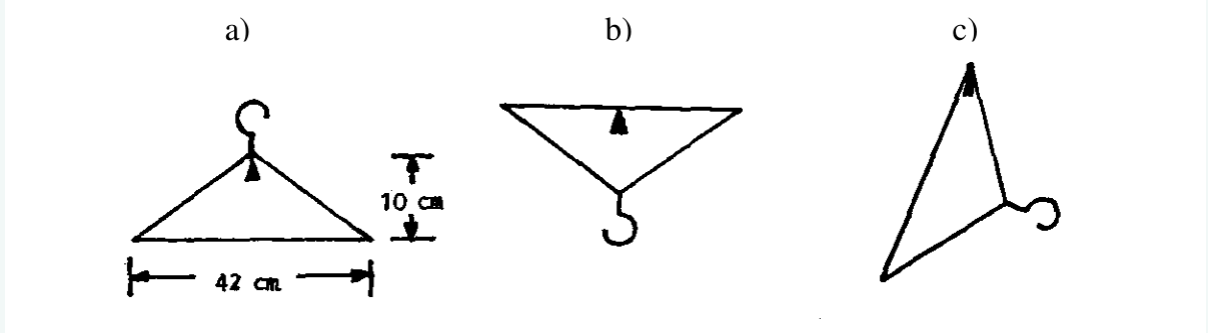
Dolayısıyla kaplama, yararlı görünür ışık çıkışını artırır ve rengini beyaza yaklaştırır. Spektrumlar arasındaki fark, fosforda morötesi ışınımın görünür ışığa dönüştürülmesinden kaynaklanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Salınan elbise askısı

(Uygun biçimde yapılmış) bir tel elbise askısı, gösterilen denge konumları çevresinde şeklin düzleminde küçük genlikli salınımlar yapabilir. a) ve b) konumlarında uzun kenar yataydır. Diğer iki kenar eşit uzunluktadır. Salınım periyodu tüm durumlarda aynıdır.

Kütle merkezi nerededir ve periyot ne kadardır?



Şekil, verilen boyutların ötesinde herhangi bir bilgi içermemektedir. Örneğin, kütlelerin ayrıntılı dağılımı hakkında hiçbir şey bilinmemektedir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Kütle merkezi:** Üçgenin yüksekliğinin orta noktasında, simetri ekseninde: uzun kenardan 5.0 cm, karşı köşeden ise 5.0 cm uzaklıkta.
- **Ortak periyot:**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

burada uzunluklar metre cinsindendir ve $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ alınmıştır.

Çözüm

Askıyı, her düzenlemede sabit bir asılma noktasına sahip, sürtünmenin ihmal edilebildiği rijit bir fiziksel sarkaç olarak ele alalım. Kütle M , kütle merkezinden geçen ve düzlemine dik olan eksene göre eylemsizlik momenti ise $I_G = Mk^2$ olsun.

Kütle merkezi asılma noktasının d kadar altında bulunuyorsa, paralel eksen teoremi ve yerçekimi kuvvetinin torku şu bağıntıyı verir:

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

Küçük salınımlar için $\sin \theta \simeq \theta$ olduğundan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

Dolayısıyla, periyodun ortak olması,

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

ifadesinin üç asılma noktası için de aynı değere sahip olması anlamına gelir.

Kütle merkezinin konumu.

Uzun kenarın karşısındaki köşeyi A , uzun kenarın orta noktasını B , c) durumunda asılma için kullanılan köşeyi ise C ile gösterelim. Verilen boyutlar şunlardır:

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

a) konumunda denge, kütle merkezi G 'nin A 'nın düşey olarak altında bulunmasını gerektirir. Üçgen ikizkenar ve uzun kenarı yatay olduğundan, G , AB doğrusu üzerinde bulunur. b) konumunda da asılma noktası G 'nin düşey olarak üzerinde bulunmalıdır; dolayısıyla bu nokta B 'dir.

Her iki denge de kararlı olmalıdır. Bu nedenle G , A ile B arasında bulunur. $BG = x$ yazarsak

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

a) ve b) durumlarındaki periyotların eşitliği

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

ya da

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{veya} \quad k^2 = x(h - x).$$

İkinci olasılık

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

sonucunu doğurur. Ancak c) düzenlemesinde

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

Bu, periyodun ortak olmasıyla çelişir. O hâlde

$$x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

Böylece kütle merkezi, uzun kenarın orta noktası ile karşı köşe arasındaki uzaklığın tam ortasındadır. Bu sonuç, kütle dağılımının düzgün olmasını gerektirmez.

Salınım periyodu.

Kütle merkezinin bu konumu için asılma noktalarının kütle merkezine uzaklıkları şöyledir:

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

d ve r uzaklıkları için periyotları eşitlersek

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

$d \neq r$ olduğundan, buradan

$$k^2 = dr.$$

elde edilir. Dolayısıyla ortak eşdeğer sarkaç uzunluğu

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m.}$$

olur. Son olarak,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s.}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Sıcak hava balonu

Hacmi sabit ve $V_B = 1.1 \text{ m}^3$ olan bir sıcak hava balonunu ele alalım. Hacmi V_B ile karşılaştırıldığında ihmal edilecek olan balon zarfının kütlesi $m_H = 0.187 \text{ kg}$ 'dır.

Balon, dış hava sıcaklığının $\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$ ve normal dış hava basıncının $p_o = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ olduğu bir yerde havalandırılacaktır. Bu koşullar altında havanın yoğunluğu $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 'tür.

- Balonun tam olarak havada asılı kalabilmesi için içindeki ısıtılmış havanın sıcaklığı ϑ_2 ne olmalıdır?
- Önce balon yere sabitlenir ve içindeki hava, kararlı durum sıcaklığı $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$ olacak şekilde ısıtılır. Balon bir ipe bağlı tutulmaktadır.
İpe etki eden kuvveti hesaplayınız.
- Balonun alt kısmının bağlanarak kapatıldığını düşününüz (içindeki havanın yoğunluğu sabit kalır). İçindeki havanın kararlı durum sıcaklığı $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$ olan balon, sıcaklığı 20°C ve yer seviyesindeki basıncı $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ olan izotermal bir atmosferde yükselir. Bu koşullar altında balon hangi h yüksekliğine ulaşabilir?
- h yüksekliğindeki balon (c) sorusu), denge konumundan 10 m uzaklaştırılır ve sonra yeniden serbest bırakılır.

Nitel akıl yürütmeye balonun ne tür bir hareket yapacağını belirleyiniz!

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a)** $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ \text{C}$; bu, $T_2 \approx 341.5 \text{ K}$ sıcaklığına karşılık gelir.
- b)** İpteki gerilme kuvveti: $F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}$. Balon ipi yukarı doğru çeker.
- c)** Başlangıç noktasına göre denge yüksekliği: $h \approx 8.4 \times 10^2 \text{ m} = 0.84 \text{ km}$.

- d) Hava direnci ihmal edildiğinde, h çevresinde genliği 10 m olan yaklaşık basit harmonik dűşey salınımlar. Hava direnci hareketi sűnűmler.

Çözűm

Havayı, bileşimi sabit bir ideal gaz olarak ele alalım:

$$p = \rho R_s T,$$

burada R_s havanın özgül gaz sabiti, T ise mutlak sıcaklıktır. İlgili sıcaklıklar

$$T_1 = 293.15 \text{ K}, \quad T_3 = 383.15 \text{ K}.$$

şeklindedir.

(a) ve (b)'de balonun alt kısmı açıktır; dolayısıyla iç basıncı çevresindeki basınca eşittir. Balonun boyutları boyunca basınç ve yoğunluk değişimlerini ihmal ediyoruz. (c)'de balon kapatıldıktan sonra içindeki havanın kűtlesi ve belirtilen hacmi sabit kalır.

İlgili yükseklikler boyunca sabit kabul edilen $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ değerini kullanınız.

a) Tam olarak havada asılı kalmak için gereken sıcaklık

Arşimet ilkesine göre, yukarı yűnlű kaldırma kuvveti, yer değiştirilen dış havanın ağırlığına eşittir:

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

Balonun havada asılı kalması için bu kuvvet, zarfın ve içindeki havanın toplam ağırlığını dengelemelidir:

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B) g.$$

Dolayısıyla içindeki havanın gerekli yoğunluğu

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03 \text{ kg m}^{-3}.$$

olur.

İç ve dış basınçlar eşit olduğundan ideal gaz yasası

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

bağıntısını verir. Böylece

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53 \text{ K},$$

ya da

$$\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

elde edilir.

b) İpe etki eden kuvvet

$T_3 = 383.15 \text{ K}$ sıcaklığında içindeki havanın yoğunluğu

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

olur.

İp, kaldırma kuvvetinin aęırlıęı ařan kısmını dengelemek için gereken ařaęı yűnlű kuvveti saęlar:

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B)g.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

dolayısıyla

$$F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}.$$

bulunur.

Bu, gerilme kuvvetidir: ip balonu aşağı doğru, balon ise ipi yukarı doğru çeker.

c) İzotermal atmosferde denge yüksekliği

Alt kısmı bağlanarak kapatıldıktan sonra balonun toplam kütlesi

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

olarak kalır.

Kaldırma kuvvetinin yükseklikle nasıl değiştiğini bulmak için atmosferin hidrostatik denge denklemini,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

sabit dış sıcaklık T_1 için ideal gaz yasasıyla birleştirelim:

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

Bunun sonucunda

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

elde edilir. $p = p_0$ olan yer seviyesinden başlayarak integral alındığında

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

bulunur; burada atmosferin ölçek yüksekliği

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m}.$$

olarak verilir.

Dengede kaldırma kuvveti, balonun sabit ağırlığına eşittir:

$$\rho(h) V_B g = M g.$$

Dolayısıyla bu yükseklikte dış havanın yoğunluğu

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

olmalıdır.

Üstel yoğunluk profili kullanılarak

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

ve buradan

$$h = H \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B} \right).$$

elde edilir. Sayısal olarak

$$h = (8605.16) \ln \left(\frac{1.2}{1.08813} \right) \approx 842 \text{ m.}$$

bulunur. Böylece

$$h \approx 0.84 \text{ km}.$$

Bu, (d) kısmında belirtilen denge yüksekliğidir. Serbestçe yükselen bir balon, eylemsizliği nedeniyle bu yüksekliği geçebilir.

d) Yer değiştirme sonrasındaki hareket

Balonun ağırlığı ve hacmi sabit kalırken dış havanın yoğunluğu yükseklikle azalır.

- **Yukarı doğru** yer değiştirdiğinde daha az yoğun havayla karşılaşır. Kaldırma kuvveti ağırlığından küçük olur; dolayısıyla bileşke kuvvet aşağı yönlüdür.
- **Aşağı doğru** yer değiştirdiğinde daha yoğun havayla karşılaşır. Kaldırma kuvveti ağırlığından büyük olur; dolayısıyla bileşke kuvvet yukarı yönlüdür.

Bu nedenle kuvvet, balonu h yüksekliğine doğru geri çağırır. Balon h yüksekliğine ulaştığında eylemsizliği nedeniyle denge konumunu geçer ve böylece salınım oluşur.

Yer değiştirme, atmosferin ölçek yüksekliğine göre küçük olduğundan hareket yaklaşık harmoniktir. Bunu görmek için $x = z - h$ olsun. $\rho(h)V_B = M$ olduğundan yukarı yönlü bileşke kuvvet

$$F(x) = Mg \left(e^{-x/H} - 1 \right).$$

şeklindedir. Burada

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

olduğundan

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

elde edilir. Bu, yer değiştirmeye orantılı bir geri çağırıcı kuvvettir.

Dolayısıyla hava direnci ihmal edildiğinde balon, başlangıçta genliği 10 m olan **yaklaşık basit harmonik düşey salınımlar** yapar. Hava direnci enerjiyi dağıtarak hareketi sönümler ve sonunda balonun denge yüksekliğinde durmasını sağlar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.