

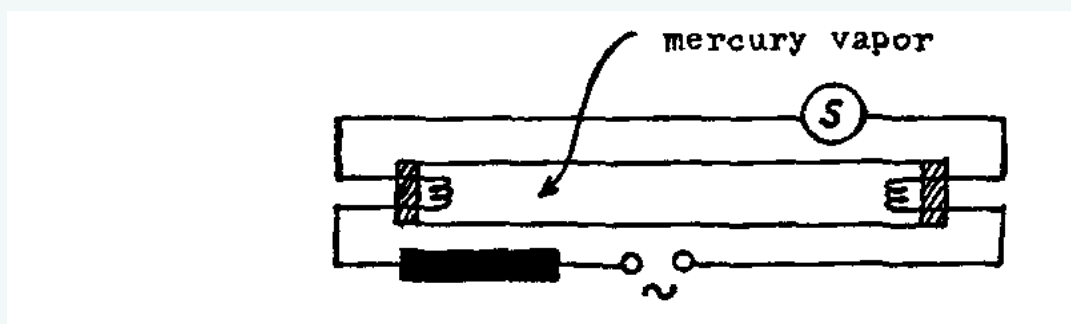
IPhO 1982

Теоретические задачи и решения · Маленте, Федеративная Республика Германия · 3
теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1982/

Задача 1: Люминесцентная лампа

К люминесцентной лампе, изображённой на прилагаемой электрической схеме, приложено переменное напряжение частотой 50 Гц.



Измерены следующие величины:

общее напряжение (напряжение сети)	$U = 228.5 \text{ V}$
электрический ток	$I = 0.6 \text{ A}$
напряжение на люминесцентной лампе	$U' = 84 \text{ V}$
активное сопротивление последовательно включённого дросселя	$R_d = 26.3 \Omega$

В расчётах саму люминесцентную лампу можно считать омическим резистором.

- Какова индуктивность L последовательно включённого дросселя?
- Каков сдвиг фаз φ между напряжением и током?
- Какова активная мощность P_w , потребляемая устройством?
- Помимо ограничения тока, дроссель выполняет ещё одну важную функцию. Назовите и объясните эту функцию!

Указание: стартер



содержит контакт, который замыкается вскоре после включения лампы, затем вновь размыкается и остаётся разомкнутым.

- Изобразите схематически зависимость светового потока, излучаемого лампой, от времени, указав численный масштаб на оси времени.

- f) Почему лампу необходимо зажигать лишь один раз, хотя приложенное переменное напряжение через равные промежутки времени проходит через нуль?
- g) Согласно указанию изготовителя, для люминесцентной лампы описанного типа последовательно с дросселем можно включить конденсатор ёмкостью около $4.7 \mu\text{F}$. Как это влияет на работу лампы и с какой целью предусмотрена такая возможность?
- h) Рассмотрите обе половины представленной демонстрационной лампы с помощью прилагаемого спектроскопа. Объясните различия между двумя спектрами. Вы можете подойти к лампе и оставить спектроскоп себе на память.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- a) $L \approx 1.09 \text{ H}$.
- b) $\varphi \approx 64.1^\circ$, причём ток **отстаёт** от напряжения сети.
- c) $P_w \approx 59.9 \text{ W}$: 50.4 W в лампе и 9.47 W на активном сопротивлении дросселя.
- d) При размыкании стартера после предварительного прогрева электродов дроссель за счёт самоиндукции создаёт **высоковольтный импульс зажигания**.
- e) Световой поток пульсирует с частотой 100 Hz , повторяясь каждые 10 ms .
Идеализированная зависимость для построения графика: $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$.
- f) Остаточная ионизация и горячие электроды позволяют разряду возобновляться после каждого кратковременного прохождения тока через нуль без нового импульса зажигания, необходимого при холодном пуске.
- g) Конденсатор приблизительно сохраняет ток и среднюю яркость, но при этом ток начинает **опережать** напряжение. При $4.7 \mu\text{F}$ ток $I_C \approx 0.611 \text{ A}$ опережает напряжение на 63.6° . Совместное включение этой лампы и лампы без изменения схемы даёт общий коэффициент мощности, близкий к единице, и уменьшает мерцание и стробоскопические эффекты.
- h) Если одна половина демонстрационной лампы не имеет покрытия, а другая покрыта люминофором, то в спектре половины без покрытия видны дискретные линии излучения ртути; в спектре половины с покрытием дополнительно наблюдается широкополосное видимое излучение люминофора, возникающее при преобразовании ультрафиолетового излучения в видимый свет.

Решение

Будем считать, что измеренные напряжения и ток являются действующими значениями. При нормальной работе стартер разомкнут. Воспользуемся указанным в условии приближением, считая лампу омическим резистором, а дроссель представим как идеальную индуктивность, соединённую последовательно с активным сопротивлением его обмотки.

а) Индуктивность последовательно включённого дросселя

Сопротивление лампы равно

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \, \Omega.$$

Следовательно, суммарное активное сопротивление последовательной цепи равно

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \, \Omega.$$

Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током, тогда как напряжение на индуктивности опережает ток на 90° . Поэтому действующие значения напряжений связаны соотношением, следующим из векторной диаграммы:

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

Суммарное напряжение на активных сопротивлениях равно

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \, \text{V}.$$

Отсюда напряжение на индуктивности равно

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \, \text{V},$$

а

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = \boxed{1.09 \, \text{H}}.$$

Соответствующее индуктивное сопротивление равно

$$X_L = \omega L = \boxed{342.6 \, \Omega}.$$

б) Сдвиг фаз

Для последовательно соединённых активного сопротивления и индуктивности

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

поэтому

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{342.6}{166.3} \right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

Ток отстаёт от приложенного напряжения. Эквивалентное соотношение:

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

Если выбрать начало отсчёта времени в момент перехода напряжения сети через нуль от отрицательных значений к положительным, то

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi).$$

с) Активная мощность

Идеальная индуктивность запасает и возвращает энергию, не потребляя мощности в среднем. Поэтому активная мощность выделяется в лампе и на сопротивлении обмотки:

$$P_w = I^2 (R_{\text{lamp}} + R_d).$$

Численно

$$P_w = 0.6^2 (166.3) = 59.868 \, \text{W} \approx \boxed{59.9 \, \text{W}}.$$

Два её слагаемых равны

$$P_{\text{lamp}} = U'I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \text{ W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2(26.3) = \boxed{9.47 \text{ W}}.$$

Это согласуется с соотношением $P_w = UI \cos \varphi$.

d) Зажигание за счёт самоиндукции

Когда стартер замыкается, ток проходит через дроссель, нити накала обоих электродов и контакт стартера. При этом электроды нагреваются, что облегчает эмиссию электронов.

Когда затем стартер размыкается, дроссель препятствует быстрому уменьшению тока. По закону Фарадея возникающая в нём ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Поэтому быстрое прерывание тока создаёт на лампе импульс высокого напряжения. Этот импульс вызывает электрический пробой газа и зажигает разряд. Энергия, запасённая в магнитном поле дросселя,

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2,$$

может высвобождаться во время этого переходного процесса.

После установления разряда стартер остаётся разомкнутым, а дроссель ограничивает рабочий ток. Величину импульса зажигания нельзя рассчитать по приведённым данным, поскольку не заданы время прерывания тока и параметры цепи, определяющие переходный процесс.

e) Зависимость светового потока от времени

Для построения идеализированного графика будем считать световую отдачу постоянной и пренебрежём задержкой излучения люминофора. Тогда световой поток пропорционален мгновенной мощности, поступающей в лампу:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

В данном случае

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Таким образом,

$$\boxed{\Phi(t) = \Phi_{\text{max}} \sin^2(\omega t - \varphi)} = \frac{\Phi_{\text{max}}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

Свет излучается при обоих направлениях тока, поэтому период изменения светового потока равен

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

что соответствует частоте $\boxed{100 \text{ Hz}}$.

Для построения графика выберем локальное начало отсчёта времени $\tau = 0$ в момент прохождения тока через нуль. Проведём плавную неотрицательную кривую через следующие точки и повторим её через каждые 10 ms:

τ (ms)	0	2.5	5.0	7.5	10.0
$\Phi/\Phi_{\max}$	0	1/2	1	1/2	0

В точках минимума и максимума касательные к кривой горизонтальны. Среднее значение равно $\Phi_{\max}/2$.

Относительно начала отсчёта времени для напряжения сети, использованного в пункте (b), первый переход тока через нуль происходит в момент

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms.}$$

Соответственно, в идеализированном случае минимумы светового потока приходятся на моменты 3.56, 13.56, ... ms, а максимумы — на моменты 8.56, 18.56, ... ms.

Абсолютное значение светового потока определить нельзя, поскольку световая отдача не задана. В реальной лампе послесвечение люминофора сглаживает и задерживает световое излучение, поэтому в минимумах световой поток не обязательно достигает нуля.

f) Почему новый импульс зажигания не требуется

Высокое пусковое напряжение необходимо для возникновения разряда в первоначально слабо ионизованном газе. Во время работы газ содержит заряженные частицы, а электроды остаются горячими.

Вблизи каждого перехода тока через нуль перерыв слишком краток для полной деионизации газа и охлаждения электродов. Поэтому в следующем полупериоде разряд может возобновиться при гораздо меньшем напряжении, чем требовалось для первоначального холодного пуска.

Кроме того, из-за сдвига фаз моменты прохождения напряжения источника и тока через нуль не совпадают. Тем не менее ток проходит через нуль каждые 10 ms; именно остаточная ионизация и нагретые электроды объясняют, почему новый импульс от стартера не требуется.

g) Влияние и назначение последовательно включённого конденсатора

При последовательном включении конденсатора комплексное сопротивление принимает вид

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

При $C = 4.7 \text{ } \mu\text{F}$

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \text{ } \Omega.$$

Следовательно, суммарное реактивное сопротивление равно

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \text{ } \Omega.$$

Оно имеет ёмкостный характер и по модулю почти равно исходному индуктивному сопротивлению.

Новое значение тока равно

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

Аргумент комплексного сопротивления равен

$$\varphi_C = \tan^{-1}\left(\frac{-334.6}{166.3}\right) = -63.6^\circ,$$

поэтому теперь ток **опережает** напряжение на $\boxed{63.6^\circ}$.

Мощность лампы становится равной

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

что близко к её исходному значению 50.4 W. Таким образом, средняя яркость приблизительно сохраняется.

Чтобы понять, почему выбрана такая ёмкость, потребуем, чтобы величина тока оставалась в точности неизменной:

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

Ненулевое решение имеет вид

$$X_C = 2X_L,$$

откуда

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

что согласуется с указанным изготовителем приближённым значением 4.7 μF . При этом значении комплексное сопротивление меняется с $R + jX_L$ на $R - jX_L$.

Это позволяет использовать полезную **двухламповую схему**: к источнику питания параллельно подключают две ветви с лампами, одну — с исходным дросселем, а другую — с дросселем и последовательно включённым конденсатором.

- **Повышение коэффициента мощности.** В идеальном случае равных токов один ток отстаёт, а другой опережает напряжение на одинаковый угол. Их реактивные составляющие взаимно компенсируются:

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

Суммарный ток совпадает по фазе с напряжением, что даёт единичный коэффициент мощности. При номинальной ёмкости 4.7 μF компенсация почти полная.

- **Уменьшение пульсаций светового потока.** Минимумы светового потока ламп наступают в разные моменты времени. В рамках модели пункта (е) их суммарный световой поток равен

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)].\end{aligned}$$

Поскольку $|\cos(2\varphi)| \approx 0.619 < 1$, в этой модели суммарный световой поток никогда не обращается в нуль. Мерцание и стробоскопические эффекты уменьшаются, хотя световой поток не становится совершенно постоянным.

h) Спектры двух половин

Предполагается, что одна половина демонстрационной лампы не имеет покрытия, а другая покрыта люминофором.

В **половине без покрытия** наблюдаемый видимый свет исходит непосредственно от разряда в парах ртути. Возбуждённые атомы ртути испускают фотоны с дискретными энергиями переходов,

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

поэтому в спектроскопе видны отдельные линии излучения. Значительная часть излучения разряда приходится на ультрафиолетовую область и потому невидима для глаза.

В **половине с люминофорным покрытием** покрытие поглощает ультрафиолетовое излучение и переизлучает часть его энергии в виде видимого света. Эта люминесценция создаёт широкие полосы излучения в видимой области, которые в простом спектроскопе часто выглядят почти непрерывными. На это более широкополосное излучение могут по-прежнему накладываться линии прямого излучения ртути.

Таким образом, покрытие увеличивает полезный выход видимого излучения и приближает его цвет к белому. Различие спектров обусловлено преобразованием ультрафиолетового излучения в видимое в люминофоре.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Колеблющаяся вешалка для одежды

Проволочная вешалка для одежды (изготовленная соответствующим образом) может совершать колебания малой амплитуды в плоскости рисунка около показанных положений равновесия. В положениях а) и б) длинная сторона горизонтальна. Две другие стороны имеют одинаковую длину. Период колебаний одинаков во всех случаях.

Где находится центр масс и чему равен период колебаний?

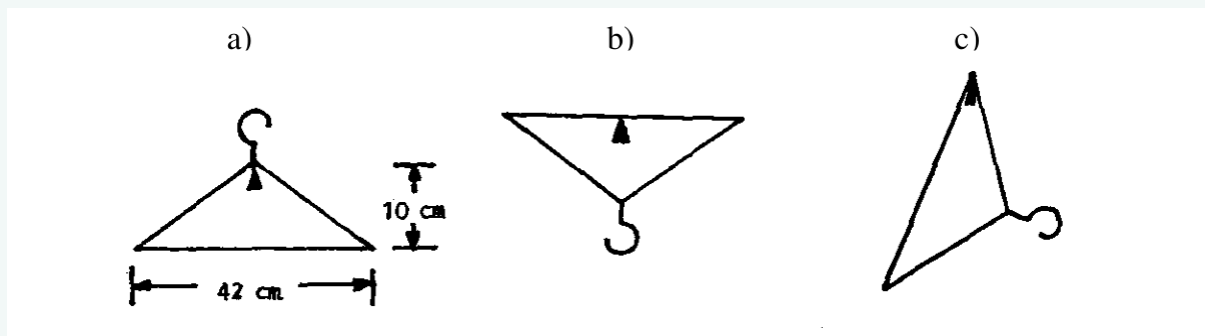


Рисунок не содержит никакой информации, кроме указанных размеров. Например, о конкретном распределении массы ничего не известно.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Центр масс:** В середине высоты треугольника, на его оси симметрии: на расстоянии 5.0 cm от длинной стороны и 5.0 cm от противоположной вершины.

• **Общий период:**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

где длины выражены в метрах и $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Решение

Будем рассматривать вешалку как твёрдый физический маятник с неподвижной точкой подвеса в каждом положении, пренебрегая трением. Обозначим её массу через M , а момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно её плоскости, — через $I_G = Mk^2$.

Если центр масс находится на расстоянии d ниже точки подвеса, то из теоремы Штейнера и выражения для момента силы тяжести получаем

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

Для малых колебаний $\sin \theta \simeq \theta$, поэтому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

Таким образом, одинаковый период означает, что величина

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

имеет одно и то же значение для всех трёх точек подвеса.

Положение центра масс.

Обозначим вершину, противоположную длинной стороне, через A , середину длинной стороны — через B , а вершину, за которую вешалка подвешена в положении с), — через C . Заданы следующие размеры:

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

В положении а) условие равновесия требует, чтобы центр масс G находился на вертикали под A . Поскольку треугольник равнобедренный, а его длинная сторона горизонтальна, G лежит на прямой AB . В положении б) точка подвеса также должна находиться на вертикали над G , следовательно, это точка B .

Оба положения равновесия должны быть устойчивыми. Следовательно, G лежит между A и B . Полагая $BG = x$, получаем

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Равенство периодов в положениях а) и б) даёт

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

или

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

Следовательно, либо

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{либо} \quad k^2 = x(h - x).$$

Второй вариант означал бы, что

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

Но в положении с)

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

Это противоречит равенству периодов. Поэтому

$$x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

Таким образом, центр масс находится посередине между серединой длинной стороны и противоположной вершиной. Этот вывод не требует равномерного распределения массы.

Период колебаний.

При таком положении центра масс расстояния от точек подвеса до него равны

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

Приравнявая периоды для расстояний d и r , получаем

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

Поскольку $d \neq r$, отсюда следует

$$k^2 = dr.$$

Таким образом, общая приведённая длина маятника равна

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m}.$$

Наконец,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Воздушный шар с горячим воздухом

Рассмотрим воздушный шар с горячим воздухом, имеющий постоянный объём $V_B = 1.1 \text{ m}^3$. Масса оболочки шара, объёмом которой следует пренебречь по сравнению с V_B , равна $m_H = 0.187 \text{ kg}$.

Шар предполагается запускать при температуре наружного воздуха $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ и нормальном давлении наружного воздуха $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. При этих условиях плотность воздуха равна $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

а) Какую температуру ϑ_2 должен иметь нагретый воздух внутри шара, чтобы шар мог удерживаться в воздухе в равновесии?

б) Сначала шар удерживают у земли, а воздух внутри него нагревают до установившейся температуры $\vartheta_3 = 110^\circ\text{C}$. Шар привязан верёвкой.

Рассчитайте силу, действующую на верёвку.

с) Рассмотрим шар, отверстие которого снизу завязано (плотность воздуха внутри остаётся постоянной). При установившейся температуре внутреннего воздуха $\vartheta_3 = 110^\circ\text{C}$ шар поднимается в изотермической атмосфере с температурой 20°C и давлением у земли $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Какой высоты h может достичь шар при этих условиях?

д) На высоте h шар (из пункта с)) смещают из положения равновесия на 10 m , а затем отпускают.

Определите с помощью качественных рассуждений, какое движение он будет совершать!

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- а) $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ\text{C}$, что соответствует $T_2 \approx 341.5 \text{ K}$.
- б) Сила натяжения верёвки: $F_{\text{горе}} \approx 1.21 \text{ N}$. Шар тянет верёвку вверх.
- с) Высота равновесия над точкой запуска: $h \approx 8.4 \times 10^2 \text{ m} = 0.84 \text{ km}$.
- д) Приблизительно гармонические вертикальные колебания около высоты h с амплитудой 10 m , если пренебречь сопротивлением воздуха. Сопротивление воздуха приводит к затуханию колебаний.

Решение

Будем считать воздух идеальным газом постоянного состава,

$$p = \rho R_s T,$$

где R_s — его удельная газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Используемые значения температуры равны

$$T_1 = 293.15 \text{ K}, \quad T_3 = 383.15 \text{ K}.$$

В пунктах (а) и (б) шар открыт снизу, поэтому давление внутри него равно давлению окружающего воздуха. Изменениями давления и плотности на расстояниях порядка размеров шара пренебрегаем. После герметизации в пункте (с) масса заключённого в нём воздуха и заданный объём остаются постоянными.

Используем $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, считая это значение постоянным в рассматриваемом диапазоне высот.

а) Температура, необходимая для удержания шара в воздухе в равновесии

По закону Архимеда направленная вверх выталкивающая сила равна весу вытесненного наружного воздуха:

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

При нейтральной плавучести она уравнивает суммарный вес оболочки и заключённого в ней воздуха:

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B)g.$$

Таким образом, требуемая плотность воздуха внутри шара равна

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03 \text{ kg m}^{-3}.$$

Поскольку давления внутри и снаружи равны, из уравнения состояния идеального газа следует

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53 \text{ K},$$

или

$$\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

б) Сила, действующая на верёвку

При $T_3 = 383.15 \text{ K}$ плотность воздуха внутри шара равна

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

Верёвка создаёт направленную вниз силу, необходимую для уравнивания превышения выталкивающей силы над весом:

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B)g.$$

Подставляя значения, получаем

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

так что

$$F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}.$$

Это сила натяжения: верёвка тянет шар вниз, а шар тянет верёвку вверх.

в) Высота равновесия в изотермической атмосфере

После того как нижнее отверстие завязано, полная масса шара остаётся равной

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

Чтобы найти зависимость выталкивающей силы от высоты, совместим условие гидростатического равновесия атмосферы,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

с уравнением состояния идеального газа при постоянной температуре наружного воздуха T_1 :

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

Интегрирование от уровня земли, где $p = p_0$, даёт

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

где характерная высота атмосферы равна

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m}.$$

В равновесии выталкивающая сила равна постоянному весу шара:

$$\rho(h) V_B g = Mg.$$

Поэтому плотность наружного воздуха на этой высоте должна быть равна

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

Используя экспоненциальную зависимость плотности от высоты, получаем

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

откуда

$$h = H \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B} \right).$$

Численно

$$h = (8605.16) \ln \left(\frac{1.2}{1.08813} \right) \approx 842 \text{ m}.$$

Таким образом,

$$\boxed{h \approx 0.84 \text{ km}}.$$

Это высота равновесия, о которой говорится в пункте (d). Свободно поднимающийся шар может пройти её по инерции.

d) Движение после смещения

Вес и объём шара остаются постоянными, тогда как плотность наружного воздуха уменьшается с высотой.

- При смещении **вверх** шар попадает в менее плотный воздух. Выталкивающая сила становится меньше его веса, поэтому равнодействующая сила направлена вниз.
- При смещении **вниз** шар попадает в более плотный воздух. Выталкивающая сила становится больше его веса, поэтому равнодействующая сила направлена вверх.

Таким образом, сила возвращает шар к высоте h . Достигнув h , шар по инерции проходит положение равновесия, что приводит к колебаниям.

Движение является приблизительно гармоническим, поскольку смещение мало по сравнению с характерной высотой атмосферы. Чтобы это показать, положим $x = z - h$. Поскольку $\rho(h)V_B = M$, проекция равнодействующей силы на ось, направленную вверх, равна

$$F(x) = Mg \left(e^{-x/H} - 1 \right).$$

Здесь

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

поэтому

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

Это возвращающая сила, пропорциональная смещению.

Таким образом, если пренебречь сопротивлением воздуха, шар совершает **приблизительно гармонические вертикальные колебания** с начальной амплитудой 10 м. Сопротивление воздуха рассеивает энергию и приводит к затуханию колебаний, в итоге останавливая шар на высоте равновесия.

Решение проверено по официальному решению.