

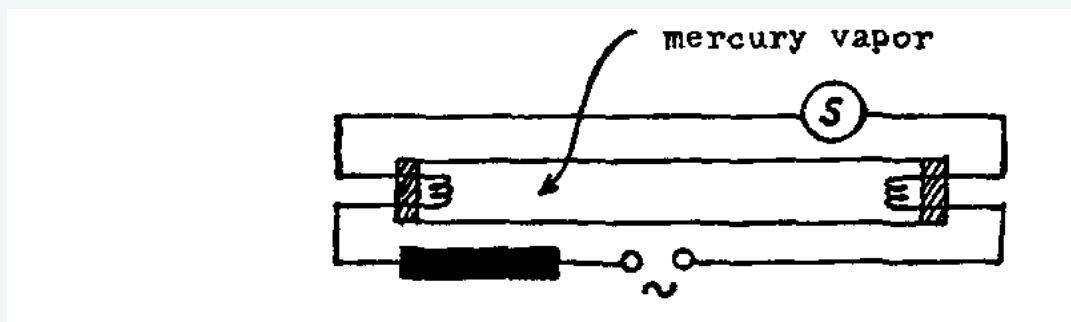
IPhO 1982

Problemas teóricos y soluciones · Malente, República Federal de Alemania · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/1982/

Problema 1: Lámpara fluorescente

Se aplica una tensión alterna de 50 Hz de frecuencia a la lámpara fluorescente representada en el esquema del circuito adjunto.



Se miden las siguientes magnitudes:

tensión total (tensión de red)	$U = 228.5 \text{ V}$
corriente eléctrica	$I = 0.6 \text{ A}$
tensión parcial en los bornes de la lámpara fluorescente	$U' = 84 \text{ V}$
resistencia óhmica de la bobina en serie	$R_d = 26.3 \Omega$

En los cálculos, la propia lámpara fluorescente puede considerarse una resistencia óhmica.

- ¿Cuál es la inductancia L de la bobina en serie?
- ¿Cuál es el desfase φ entre la tensión y la corriente?
- ¿Cuál es la potencia activa P_w transformada por el aparato?
- Además de limitar la corriente, la bobina en serie tiene otra función importante. ¡Indique y explique esta función!

Indicación: El cebador



incluye un contacto que se cierra poco después de conectar la lámpara, vuelve a abrirse y permanece abierto.

- Represente esquemáticamente en un diagrama con una escala de tiempo cuantitativa la evolución temporal del flujo luminoso emitido por la lámpara.

- f) ¿Por qué basta con encender la lámpara una sola vez, aunque la tensión alterna aplicada pase por cero a intervalos regulares?
- g) Según indica el fabricante, en una lámpara fluorescente del tipo descrito se puede conectar un condensador de unos $4.7 \mu\text{F}$ en serie con la bobina. ¿Cómo afecta esto al funcionamiento de la lámpara y con qué finalidad se ofrece esta posibilidad?
- h) Examine las dos mitades de la lámpara de demostración expuesta con el espectroscopio suministrado. Explique las diferencias entre los dos espectros. Puede acercarse a la lámpara y quedarse con el espectroscopio como recuerdo.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) $L \approx 1.09 \text{ H}$.
- b) $\varphi \approx 64.1^\circ$, con la corriente **retrasada** respecto a la tensión de red.
- c) $P_w \approx 59.9 \text{ W}$: 50.4 W en la lámpara y 9.47 W en la resistencia de la bobina.
- d) La bobina produce el **impulso de alta tensión para el encendido** por autoinducción cuando el cebador se abre tras precalentar los electrodos.
- e) El flujo luminoso pulsa a 100 Hz , repitiéndose cada 10 ms . Una representación idealizada es $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$.
- f) La ionización residual y los electrodos calientes permiten que la descarga se reanude después de cada breve paso de la corriente por cero, sin otro impulso de encendido en frío.
- g) El condensador mantiene aproximadamente la corriente y el brillo medio, al tiempo que hace que la corriente **se adelante** a la tensión. Para $4.7 \mu\text{F}$, $I_C \approx 0.611 \text{ A}$, con un adelanto de 63.6° . Al combinar esta lámpara con otra sin modificar se obtiene un factor de potencia global casi unitario y se reducen el parpadeo y los efectos estroboscópicos.
- h) Suponiendo que la lámpara de demostración tenga una mitad sin recubrimiento y otra recubierta de material fluorescente: la mitad sin recubrimiento muestra líneas discretas de emisión del mercurio; la mitad recubierta muestra, además, una emisión visible de banda ancha del material fluorescente, producida por la conversión de radiación ultravioleta en luz visible.

Solución

Se considera que las tensiones y la corriente medidas son valores eficaces. Durante el funcionamiento normal, el cebador está abierto. Utilizamos la aproximación óhmica indicada para la lámpara y modelamos la bobina como una inductancia ideal en serie con la resistencia de su devanado.

a) Inductancia de la bobina en serie

La resistencia de la lámpara es

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \Omega.$$

Por tanto, la resistencia total en serie es

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \, \Omega.$$

La tensión resistiva está en fase con la corriente, mientras que la tensión inductiva se adelanta a la corriente en 90° . En consecuencia, las tensiones eficaces satisfacen la relación fasorial

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

La tensión resistiva total es

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \, \text{V}.$$

Por ello, la tensión inductiva es

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \, \text{V},$$

y

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = \boxed{1.09 \, \text{H}}.$$

La reactancia inductiva correspondiente es

$$X_L = \omega L = \boxed{342.6 \, \Omega}.$$

b) Desfase

Para una resistencia y una inductancia en serie,

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

por lo que

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{342.6}{166.3}\right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

La corriente se retrasa respecto a la tensión aplicada. De forma equivalente,

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

Tomando el origen de tiempos en un paso por cero ascendente de la tensión de red,

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi).$$

c) Potencia activa

Una inductancia ideal almacena y devuelve energía, sin consumir potencia media. Por tanto, la potencia activa se disipa en la lámpara y en la resistencia del devanado:

$$P_w = I^2(R_{\text{lamp}} + R_d).$$

Numéricamente,

$$P_w = 0.6^2(166.3) = 59.868 \, \text{W} \approx \boxed{59.9 \, \text{W}}.$$

Sus dos contribuciones son

$$P_{\text{lamp}} = U' I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \, \text{W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2(26.3) = \boxed{9.47 \, \text{W}}.$$

Esto concuerda con $P_w = UI \cos \varphi$.

d) Encendido por autoinducción

Cuando el cebador se cierra, circula corriente por la bobina, los dos filamentos de los electrodos y el contacto del cebador. Esto calienta los electrodos y facilita la emisión de electrones.

Cuando el cebador se abre a continuación, la bobina se opone a la rápida disminución de la corriente. La ley de Faraday da su fuerza electromotriz inducida:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Por tanto, una interrupción rápida produce un gran impulso de tensión entre los bornes de la lámpara. Este impulso provoca la ruptura dieléctrica del gas y establece la descarga. La energía almacenada en el campo magnético de la bobina,

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2,$$

está disponible durante este transitorio.

Una vez establecida la descarga, el cebador permanece abierto y la bobina limita la corriente de funcionamiento. La magnitud del impulso de encendido no puede calcularse con los datos proporcionados, porque no se especifican el tiempo de interrupción ni las propiedades transitorias del circuito.

e) Dependencia temporal del flujo luminoso

Para una representación idealizada, supongamos una eficacia luminosa constante y despreciemos el retardo de emisión del material fluorescente. El flujo luminoso es entonces proporcional a la potencia instantánea suministrada a la lámpara:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

En este caso,

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Así,

$$\boxed{\Phi(t) = \Phi_{\text{max}} \sin^2(\omega t - \varphi)} = \frac{\Phi_{\text{max}}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

La corriente produce luz en ambos sentidos, de modo que el período del flujo luminoso es

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

lo que corresponde a $\boxed{100 \text{ Hz}}$.

Para la representación, elija un tiempo local $\tau = 0$ en un paso de la corriente por cero. Dibuje una curva suave y no negativa que pase por estos puntos y repítala cada 10 ms:

τ (ms)	0	2.5	5.0	7.5	10.0
Φ/Φ_{max}	0	1/2	1	1/2	0

La curva tiene tangentes horizontales en sus mínimos y máximos. Su valor medio es $\Phi_{\text{max}}/2$.

Respecto al origen de tiempos de la tensión de red utilizado en el apartado (b), el primer paso de la corriente por cero se produce en

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms.}$$

Por consiguiente, los mínimos ideales de luz se producen en 3.56, 13.56, ... ms, y los máximos en 8.56, 18.56, ... ms.

El flujo luminoso absoluto queda indeterminado porque no se proporciona la eficacia luminosa. En una lámpara real, la persistencia del material fluorescente suaviza y retrasa la emisión de luz, de modo que sus mínimos no tienen por qué alcanzar el cero.

f) Por qué no es necesario un nuevo impulso de encendido

La elevada tensión de arranque es necesaria para establecer una descarga en el gas, inicialmente poco ionizado. Durante el funcionamiento, el gas contiene partículas cargadas y los electrodos permanecen calientes.

Alrededor de cada paso de la corriente por cero, la interrupción es demasiado breve para que se pierda por completo la ionización y se enfríen los electrodos. Por tanto, la descarga puede reanudarse en el siguiente semiciclo a una tensión mucho menor que la necesaria para el arranque inicial en frío.

Además, los pasos por cero de la tensión de la fuente y de la corriente no coinciden debido al desfase. No obstante, la corriente sí pasa por cero cada 10 ms; la ionización residual y los electrodos calientes explican por qué no es necesario otro impulso del cebador.

g) Efecto y finalidad del condensador en serie

Con un condensador en serie, la impedancia pasa a ser

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Para $C = 4.7 \mu\text{F}$,

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \Omega.$$

La reactancia neta es, por tanto,

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \Omega.$$

Es capacitiva y tiene casi la misma magnitud que la reactancia inductiva original.

La nueva corriente es

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

La fase de la impedancia es

$$\varphi_C = \tan^{-1} \left(\frac{-334.6}{166.3} \right) = -63.6^\circ,$$

por lo que ahora la corriente **se adelanta** a la tensión en $\boxed{63.6^\circ}$.

La potencia de la lámpara pasa a ser

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

cercana a su valor original de 50.4 W. Así, su brillo medio se mantiene aproximadamente.

Para ver por qué se eligió esta capacidad, exijamos que la magnitud de la corriente permanezca exactamente igual:

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

La solución no nula es

$$X_C = 2X_L,$$

lo que da

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

que concuerda con el valor aproximado de $4.7 \mu\text{F}$ del fabricante. Con este valor, la impedancia cambia de $R + jX_L$ a $R - jX_L$.

Esto permite una útil **configuración de dos lámparas**: conectar dos ramas de lámparas en paralelo a la alimentación, una con la bobina original y otra con la bobina más el condensador en serie.

- **Mejora del factor de potencia.** En el caso ideal de corrientes iguales, las dos corrientes se retrasan y se adelantan en ángulos iguales. Sus componentes reactivas se anulan:

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

La corriente total está en fase con la tensión, lo que da un factor de potencia unitario. Con el valor nominal de $4.7 \mu\text{F}$, la cancelación es casi completa.

- **Reducción de la modulación de la luz.** Las lámparas alcanzan sus mínimos de luz en instantes distintos. Según el modelo del apartado (e), su flujo combinado es

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)].\end{aligned}$$

Puesto que $|\cos(2\varphi)| \approx 0.619 < 1$, la luz combinada nunca se reduce a cero en este modelo. El parpadeo y los efectos estroboscópicos disminuyen, aunque la luz no es perfectamente constante.

h) Espectros de las dos mitades

La interpretación esperada es que la lámpara de demostración tiene una mitad sin recubrimiento y otra recubierta de material fluorescente.

En la **mitad sin recubrimiento**, la luz visible observada procede directamente de la descarga de mercurio. Los átomos de mercurio excitados emiten fotones con energías de transición discretas,

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

por lo que el espectroscopio muestra líneas de emisión separadas. Gran parte de la radiación de la descarga es ultravioleta y, por tanto, invisible para el ojo.

En la **mitad recubierta de material fluorescente**, el recubrimiento absorbe radiación ultravioleta y reemite parte de su energía como luz visible. Esta fluorescencia produce bandas anchas de emisión visible, que a menudo parecen casi continuas en un espectroscopio sencillo. Las líneas directas del mercurio pueden permanecer superpuestas a esta emisión más amplia.

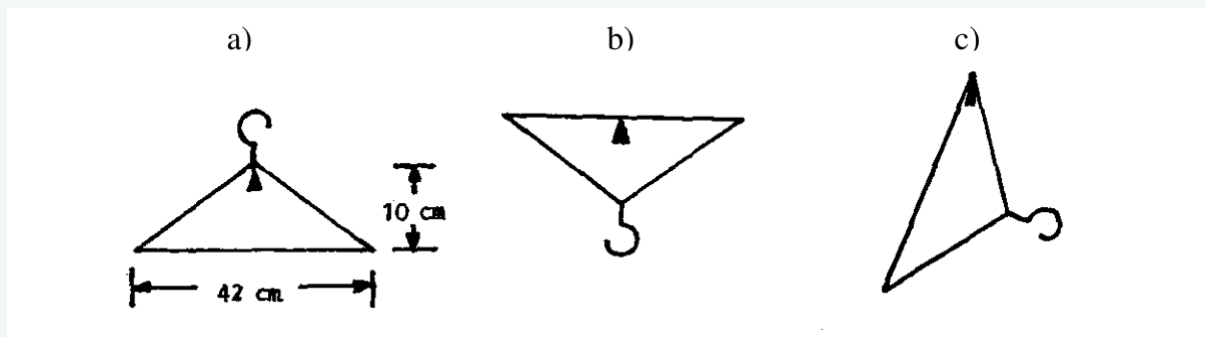
Por tanto, el recubrimiento aumenta la emisión visible útil y modifica su color hacia el blanco. La diferencia espectral se debe a la conversión de radiación ultravioleta en luz visible en el material fluorescente.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Percha oscilante

Una percha de alambre (fabricada adecuadamente) puede realizar oscilaciones de pequeña amplitud en el plano de la figura alrededor de las posiciones de equilibrio mostradas. En las posiciones a) y b), el lado largo es horizontal. Los otros dos lados tienen la misma longitud. El período de oscilación es el mismo en todos los casos.

¿Dónde se encuentra el centro de masa y cuánto vale el período?



La figura no contiene ninguna información aparte de las dimensiones indicadas. No se sabe nada, por ejemplo, sobre la distribución detallada de la masa.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Centro de masa:** A mitad de la altura del triángulo, sobre su eje de simetría: a 5.0 cm del lado largo y a 5.0 cm del vértice opuesto.
- **Período común:**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

donde las longitudes están expresadas en metros y $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Solución

Consideremos la percha como un péndulo físico rígido, con un punto de suspensión fijo en cada configuración y rozamiento despreciable. Sea M su masa, y sea $I_G = Mk^2$ su momento de inercia respecto al eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular a su plano.

Si el centro de masa se encuentra a una distancia d por debajo del punto de suspensión, el teorema de los ejes paralelos y el momento de la fuerza de la gravedad dan

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

Para pequeñas oscilaciones, $\sin \theta \simeq \theta$, de modo que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

Por tanto, un período común significa que

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

tiene el mismo valor para los tres puntos de suspensión.

Posición del centro de masa.

Denotemos por A el vértice opuesto al lado largo, por B el punto medio del lado largo y por C el vértice utilizado como punto de suspensión en c). Las dimensiones dadas son

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

En la posición a), el equilibrio exige que el centro de masa G se encuentre verticalmente por debajo de A . Como el triángulo es isósceles y su lado largo es horizontal, G se encuentra sobre la recta AB . En la posición b), el punto de suspensión debe encontrarse igualmente en la vertical por encima de G , por lo que es B .

Ambos equilibrios deben ser estables. Por consiguiente, G se encuentra entre A y B . Escribiendo $BG = x$, tenemos

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

La igualdad de los períodos en a) y b) da

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

o bien

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

Por tanto, se cumple una de las dos posibilidades:

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{o} \quad k^2 = x(h - x).$$

La segunda posibilidad implicaría

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

Pero en la configuración c),

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

Esto contradice la igualdad de los períodos. Por tanto,

$$\boxed{x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

El centro de masa se encuentra, pues, a mitad de camino entre el punto medio del lado largo y el vértice opuesto. Esta conclusión no requiere una distribución uniforme de la masa.

Período de oscilación.

Con este centro de masa, las distancias a los puntos de suspensión son

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

Igualando los períodos para las distancias d y r ,

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

Como $d \neq r$, se obtiene

$$k^2 = dr.$$

La longitud común del péndulo equivalente es, por tanto,

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m}.$$

Finalmente,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Globo aerostático de aire caliente

Considérese un globo aerostático de aire caliente de volumen fijo $V_B = 1.1 \text{ m}^3$. La masa de la envoltura del globo, cuyo volumen se considera despreciable en comparación con V_B , es $m_H = 0.187 \text{ kg}$.

El globo se lanzará en un lugar donde la temperatura del aire exterior es $\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$ y la presión normal del aire exterior es $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. En estas condiciones, la densidad del aire es $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

a) ¿Qué temperatura ϑ_2 debe tener el aire calentado en el interior del globo para que este se mantenga justo en suspensión?

b) Primero se sujeta el globo al suelo y se calienta el aire de su interior hasta alcanzar una temperatura estacionaria de $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$. El globo está sujeto mediante una cuerda.

Calcule la fuerza sobre la cuerda.

c) Considérese que se cierra la abertura inferior del globo atándola (la densidad del aire interior permanece constante). Con una temperatura estacionaria $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$ del aire interior, el globo asciende en una atmósfera isoterma a 20°C y con una presión a nivel del suelo de $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. ¿Qué altura h puede alcanzar el globo en estas condiciones?

d) A la altura h , se desplaza el globo (apartado c)) 10 m de su posición de equilibrio y después se suelta de nuevo.

¡Determine mediante un razonamiento cualitativo qué tipo de movimiento realizará!

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ\text{C}$, que corresponde a $T_2 \approx 341.5\text{ K}$.
- **b)** Tensión de la cuerda: $F_{\text{rope}} \approx 1.21\text{ N}$. El globo tira de la cuerda hacia arriba.
- **c)** Altura de equilibrio sobre el punto de partida: $h \approx 8.4 \times 10^2\text{ m} = 0.84\text{ km}$.
- **d)** Oscilaciones verticales aproximadamente armónicas simples en torno a h , con una amplitud de 10 m si se desprecia la resistencia del aire. La resistencia del aire amortigua el movimiento.

Solución

Se trata el aire como un gas ideal de composición constante,

$$p = \rho R_s T,$$

donde R_s es su constante específica del gas y T es la temperatura absoluta. Las temperaturas pertinentes son

$$T_1 = 293.15\text{ K}, \quad T_3 = 383.15\text{ K}.$$

En (a) y (b), el globo está abierto por abajo, por lo que su presión interior es igual a la presión del entorno. Se desprecian las variaciones de presión y densidad a lo largo de las dimensiones del globo. Tras cerrarlo herméticamente en (c), la masa de aire encerrada y el volumen especificado permanecen constantes.

Se utiliza $g = 9.81\text{ m s}^{-2}$, que se considera constante en el intervalo de alturas estudiado.

a) Temperatura necesaria para mantenerse justo en suspensión

Según el principio de Arquímedes, el empuje hacia arriba es igual al peso del aire exterior desalojado:

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

Para que haya flotabilidad neutra, este empuje debe equilibrar el peso conjunto de la envoltura y del aire encerrado:

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B) g.$$

Por tanto, la densidad interior necesaria es

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03\text{ kg m}^{-3}.$$

Como las presiones interior y exterior son iguales, la ley de los gases ideales da

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

Por consiguiente,

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53\text{ K},$$

o bien

$$\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

b) Fuerza sobre la cuerda

A $T_3 = 383.15 \text{ K}$, la densidad interior es

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

La cuerda ejerce la fuerza hacia abajo necesaria para equilibrar el exceso del empuje sobre el peso:

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B)g.$$

Sustituyendo,

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

de modo que

$$F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}.$$

Esta es la tensión: la cuerda tira del globo hacia abajo y el globo tira de la cuerda hacia arriba.

c) Altura de equilibrio en la atmósfera isoterma

Una vez que se cierra la abertura inferior atándola, la masa total del globo permanece igual a

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

Para determinar cómo varía el empuje con la altura, se combina el equilibrio hidrostático de la atmósfera,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

con la ley de los gases ideales a la temperatura exterior constante T_1 :

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

Integrando desde el nivel del suelo, donde $p = p_0$, se obtiene

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

donde la altura de escala atmosférica es

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m}.$$

En el equilibrio, el empuje es igual al peso constante del globo:

$$\rho(h) V_B g = M g.$$

Por tanto, la densidad exterior a esa altura debe ser

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

Utilizando el perfil exponencial de densidad,

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

y, por tanto,

$$h = H \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B} \right).$$

Numéricamente,

$$h = (8605.16) \ln \left(\frac{1.2}{1.08813} \right) \approx 842 \text{ m.}$$

Así,

$$\boxed{h \approx 0.84 \text{ km}}.$$

Esta es la altura de equilibrio indicada en el apartado (d). Un globo que asciende libremente puede sobrepasarla debido a su inercia.

d) Movimiento después del desplazamiento

El peso y el volumen del globo permanecen constantes, mientras que la densidad del aire exterior disminuye con la altura.

- Si se desplaza **hacia arriba**, encuentra aire menos denso. El empuje pasa a ser menor que su peso, por lo que la fuerza resultante apunta hacia abajo.
- Si se desplaza **hacia abajo**, encuentra aire más denso. El empuje pasa a ser mayor que su peso, por lo que la fuerza resultante apunta hacia arriba.

Por tanto, la fuerza tiende a devolver el globo a h . Al llegar a h , su inercia lo lleva más allá del equilibrio, dando lugar a una oscilación.

El movimiento es aproximadamente armónico porque el desplazamiento es pequeño en comparación con la altura de escala atmosférica. Para comprobarlo, sea $x = z - h$. Puesto que $\rho(h)V_B = M$, la fuerza resultante en el sentido ascendente es

$$F(x) = Mg \left(e^{-x/H} - 1 \right).$$

En este caso,

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

por lo que

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

Esta es una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento.

Así, despreciando la resistencia del aire, el globo realiza **oscilaciones verticales aproximadamente armónicas simples**, inicialmente con una amplitud de 10 m. La resistencia del aire disipa energía y amortigua el movimiento, hasta que finalmente el globo queda en reposo a su altura de equilibrio.

La solución se comprobó con la solución oficial.