

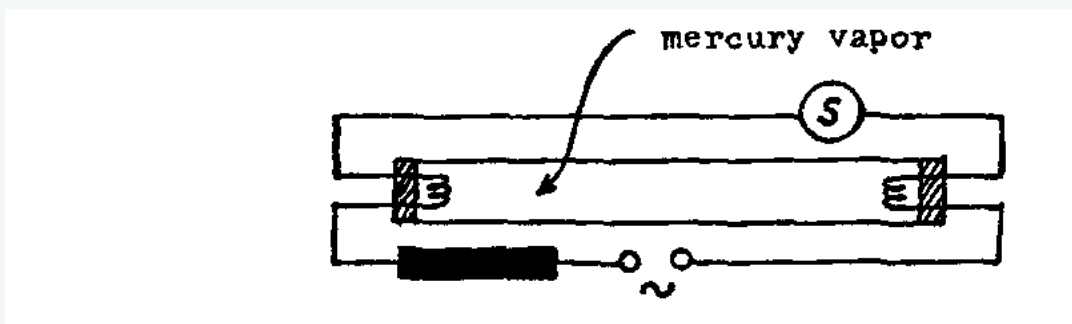
IPhO 1982

Theorieaufgaben und Lösungen · Malente, Bundesrepublik Deutschland · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/1982/

Aufgabe 1: Leuchtstofflampe

An die im beigefügten Schaltbild dargestellte Leuchtstofflampe wird eine Wechselspannung mit einer Frequenz von 50 Hz angelegt.



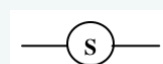
Die folgenden Größen werden gemessen:

Gesamtspannung (Netzspannung)	$U = 228.5 \text{ V}$
Stromstärke	$I = 0.6 \text{ A}$
Teilspannung an der Leuchtstofflampe	$U' = 84 \text{ V}$
ohmscher Widerstand der Vorschaltdrossel	$R_d = 26.3 \Omega$

Die Leuchtstofflampe selbst darf bei den Berechnungen als ohmscher Widerstand betrachtet werden.

- Wie groß ist die Induktivität L der Vorschaltdrossel?
- Wie groß ist die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom?
- Wie groß ist die von der Anordnung umgesetzte Wirkleistung P_w ?
- Neben der Strombegrenzung hat die Vorschaltdrossel noch eine weitere wichtige Funktion. Nennen und erläutern Sie diese Funktion!

Hinweis: Der Starter



enthält einen Kontakt, der sich kurz nach dem Einschalten der Lampe schließt, sich anschließend wieder öffnet und offen bleibt.

- Skizzieren Sie in einem Diagramm mit quantitativer Zeitskala den zeitlichen Verlauf des von der Lampe ausgesandten Lichtstroms.

- f) Warum muss die Lampe nur einmal gezündet werden, obwohl die angelegte Wechselspannung in regelmäßigen Abständen durch null geht?
- g) Nach Angaben des Herstellers kann bei einer Leuchtstofflampe des beschriebenen Typs ein Kondensator von etwa $4.7 \mu\text{F}$ in Reihe mit der Vorschaltdrossel geschaltet werden. Wie wirkt sich dies auf den Betrieb der Lampe aus, und zu welchem Zweck ist diese Möglichkeit vorgesehen?
- h) Untersuchen Sie beide Hälften der ausgestellten Demonstrationslampe mit dem beigefügten Spektroskop. Erklären Sie die Unterschiede zwischen den beiden Spektren. Sie dürfen zur Lampe gehen und das Spektroskop als Andenken behalten.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) $L \approx 1.09 \text{ H}$.
- b) $\varphi \approx 64.1^\circ$, wobei der Strom der Netzspannung **nacheilt**.
- c) $P_w \approx 59.9 \text{ W}$: 50.4 W in der Lampe und 9.47 W im Widerstand der Drossel.
- d) Die Drossel erzeugt durch Selbstinduktion den **Hochspannungsimpuls zur Zündung**, wenn der Starter nach dem Vorheizen der Elektroden öffnet.
- e) Der Lichtstrom pulsiert mit 100 Hz und wiederholt sich alle 10 ms . Eine idealisierte Skizze entspricht $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$.
- f) Die Restionisation und die heißen Elektroden ermöglichen es, dass die Entladung nach jedem kurzen Stromnulldurchgang ohne einen weiteren Zündimpuls für einen Kaltstart wieder einsetzt.
- g) Der Kondensator hält die Stromstärke und die mittlere Helligkeit annähernd unverändert, lässt den Strom aber der Spannung **voreilen**. Für $4.7 \mu\text{F}$ gilt $I_C \approx 0.611 \text{ A}$, wobei der Strom um 63.6° voreilt. Die Kombination dieser Lampe mit einer unveränderten Lampe ergibt einen Gesamtleistungsfaktor von nahezu eins und verringert Flimmern und stroboskopische Effekte.
- h) Unter der Annahme, dass die Demonstrationslampe eine unbeschichtete und eine mit Leuchtstoff beschichtete Hälfte besitzt: Die unbeschichtete Hälfte zeigt diskrete Quecksilberemissionslinien; die beschichtete Hälfte zeigt zusätzlich eine breitbandige sichtbare Leuchtstoffemission, die durch Umwandlung ultravioletter Strahlung in sichtbares Licht entsteht.

Lösung

Die gemessenen Spannungen und die Stromstärke werden als Effektivwerte aufgefasst. Im normalen Betrieb ist der Starter offen. Wir verwenden die angegebene Näherung der Lampe als ohmscher Widerstand und modellieren die Drossel als ideale Induktivität in Reihe mit ihrem Wicklungswiderstand.

a) Induktivität der Vorschaltdrossel

Der Lampenwiderstand beträgt

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \, \Omega.$$

Damit beträgt der gesamte Reihenwiderstand

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \, \Omega.$$

Die Spannung am ohmschen Widerstand ist mit dem Strom in Phase, während die induktive Spannung dem Strom um 90° voreilt. Die Effektivwerte der Spannungen erfüllen daher die Zeigerbeziehung

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

Die gesamte Spannung an den ohmschen Widerständen beträgt

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \, \text{V}.$$

Somit beträgt die induktive Spannung

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \, \text{V},$$

und

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = \boxed{1.09 \, \text{H}}.$$

Der zugehörige induktive Blindwiderstand beträgt

$$X_L = \omega L = \boxed{342.6 \, \Omega}.$$

b) Phasenverschiebung

Für eine Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Induktivität gilt

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

also

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{342.6}{166.3} \right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

Der Strom eilt der angelegten Spannung nach. Gleichwertig gilt

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

Wählt man als Zeitnullpunkt einen Nulldurchgang der Netzspannung mit positiver Steigung, so gilt

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi).$$

c) Wirkleistung

Eine ideale Induktivität speichert Energie und gibt sie wieder ab, ohne im zeitlichen Mittel Leistung aufzunehmen. Die Wirkleistung wird daher in der Lampe und im Wicklungswiderstand umgesetzt:

$$P_w = I^2(R_{\text{lamp}} + R_d).$$

Numerisch ergibt sich

$$P_w = 0.6^2(166.3) = 59.868 \, \text{W} \approx \boxed{59.9 \, \text{W}}.$$

Ihre beiden Beiträge sind

$$P_{\text{lamp}} = U' I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \, \text{W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2 (26.3) = \boxed{9.47 \text{ W}}.$$

Dies stimmt mit $P_w = UI \cos \varphi$ überein.

d) Zündung durch Selbstinduktion

Wenn der Starter schließt, fließt Strom durch die Drossel, die beiden Elektrodenwendeln und den Starterkontakt. Dadurch werden die Elektroden erhitzt, was die Elektronenemission erleichtert.

Wenn der Starter anschließend öffnet, wirkt die Drossel der raschen Abnahme des Stroms entgegen. Nach dem faradayschen Induktionsgesetz beträgt ihre induzierte elektromotorische Kraft:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Eine rasche Unterbrechung erzeugt daher einen hohen Spannungsimpuls an der Lampe. Dieser Impuls löst den elektrischen Durchschlag des Gases aus und setzt die Entladung in Gang. Die im Magnetfeld der Drossel gespeicherte Energie,

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2,$$

steht während dieses Übergangsvorgangs zur Verfügung.

Sobald die Entladung eingesetzt hat, bleibt der Starter offen, und die Drossel begrenzt den Betriebsstrom. Die Höhe des Zündimpulses lässt sich aus den angegebenen Daten nicht berechnen, da die Unterbrechungsdauer und die Eigenschaften des Stromkreises während des Übergangsvorgangs nicht angegeben sind.

e) Zeitabhängigkeit des Lichtstroms

Für eine idealisierte Skizze nehmen wir eine konstante Lichtausbeute an und vernachlässigen die Emissionsverzögerung des Leuchtstoffs. Der Lichtstrom ist dann proportional zur momentanen, der Lampe zugeführten Leistung:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Hier gilt

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

Damit folgt

$$\boxed{\Phi(t) = \Phi_{\max} \sin^2(\omega t - \varphi)} = \frac{\Phi_{\max}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

Bei beiden Stromrichtungen wird Licht erzeugt, sodass die Periodendauer des Lichtstroms

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

beträgt, entsprechend $\boxed{100 \text{ Hz}}$.

Wählen Sie für die Skizze eine lokale Zeit $\tau = 0$ bei einem Stromnulldurchgang. Zeichnen Sie eine glatte, nichtnegative Kurve durch diese Punkte und wiederholen Sie sie alle 10 ms:

τ (ms)	0	2.5	5.0	7.5	10.0
$\Phi/\Phi_{\max}$	0	1/2	1	1/2	0

Die Kurve hat an ihren Minima und Maxima waagerechte Tangenten. Ihr Mittelwert beträgt $\Phi_{\max}/2$.

Bezogen auf den in Teil (b) verwendeten Zeitnullpunkt der Netzspannung tritt der erste Stromnulldurchgang bei

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms}$$

auf. Dementsprechend liegen die idealen Lichtminima bei 3.56, 13.56, ... ms und die Maxima bei 8.56, 18.56, ... ms.

Der absolute Lichtstrom bleibt unbestimmt, da keine Lichtausbeute angegeben ist. In einer realen Lampe glättet und verzögert das Nachleuchten des Leuchtstoffs die Lichtabgabe, sodass ihre Minima nicht null erreichen müssen.

f) Warum kein erneuter Zündimpuls erforderlich ist

Die hohe Startspannung wird benötigt, um im anfangs nur schwach ionisierten Gas eine Entladung einzuleiten. Während des Betriebs enthält das Gas geladene Teilchen, und die Elektroden bleiben heiß.

In der Umgebung jedes Stromnulldurchgangs ist die Unterbrechung zu kurz, als dass die Ionisation vollständig verschwinden und die Elektroden abkühlen könnten. Die Entladung kann daher in der nächsten Halbperiode bei einer wesentlich niedrigeren Spannung wieder einsetzen, als für den anfänglichen Kaltstart erforderlich war.

Außerdem fallen die Nulldurchgänge der Quellenspannung und des Stroms wegen der Phasenverschiebung nicht zusammen. Dennoch geht der Strom alle 10 ms durch null; die Restionisation und die erhitzten Elektroden erklären, warum kein weiterer Starterimpuls erforderlich ist.

g) Wirkung und Zweck des Reihenkondensators

Mit einem in Reihe geschalteten Kondensator wird die Impedanz zu

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Für $C = 4.7 \mu\text{F}$ gilt

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \Omega.$$

Der resultierende Blindwiderstand beträgt daher

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \Omega.$$

Er ist kapazitiv und hat nahezu denselben Betrag wie der ursprüngliche induktive Blindwiderstand.

Die neue Stromstärke beträgt

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

Der Phasenwinkel der Impedanz beträgt

$$\varphi_C = \tan^{-1} \left(\frac{-334.6}{166.3} \right) = -63.6^\circ,$$

sodass der Strom der Spannung nun um $\boxed{63.6^\circ}$ **voreilt**.

Die Lampenleistung wird zu

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

was nahe beim ursprünglichen Wert von 50.4 W liegt. Somit bleibt ihre mittlere Helligkeit annähernd unverändert.

Um zu verstehen, warum diese Kapazität gewählt wurde, fordern wir, dass der Betrag der Stromstärke exakt unverändert bleibt:

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

Die von null verschiedene Lösung lautet

$$X_C = 2X_L,$$

woraus folgt

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

in Übereinstimmung mit der ungefähren Herstellerangabe von $4.7 \mu\text{F}$. Bei diesem Wert ändert sich die Impedanz von $R + jX_L$ zu $R - jX_L$.

Dies ermöglicht eine zweckmäßige **Zweilampenschaltung**: Zwei Lampenzweige werden parallel an die Spannungsversorgung angeschlossen, einer mit der ursprünglichen Drossel und einer mit der Drossel und einem zusätzlichen Reihenkondensator.

- **Verbesserung des Leistungsfaktors.** Im idealen Fall gleicher Stromstärken eilen die beiden Ströme um gleich große Winkel nach beziehungsweise vor. Ihre Blindstromanteile heben sich auf:

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

Der Gesamtstrom ist mit der Spannung in Phase, sodass der Leistungsfaktor eins beträgt. Beim Nennwert von $4.7 \mu\text{F}$ ist die Kompensation nahezu vollständig.

- **Verringerte Lichtmodulation.** Die Lampen erreichen ihre Lichtminima zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Im Modell aus Teil (e) beträgt ihr gemeinsamer Lichtstrom

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)].\end{aligned}$$

Da $|\cos(2\varphi)| \approx 0.619 < 1$ gilt, fällt der gemeinsame Lichtstrom in diesem Modell niemals auf null. Flimmern und stroboskopische Effekte werden verringert, obwohl der Lichtstrom nicht vollkommen konstant ist.

h) Spektren der beiden Hälften

Die erwartete Deutung ist, dass die Demonstrationslampe eine unbeschichtete Hälfte und eine mit fluoreszierendem Leuchtstoff beschichtete Hälfte besitzt.

In der **unbeschichteten Hälfte** stammt das beobachtete sichtbare Licht unmittelbar aus der Quecksilberentladung. Angeregte Quecksilberatome emittieren Photonen mit diskreten Übergangsenergien,

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

sodass das Spektroskop voneinander getrennte Emissionslinien zeigt. Ein großer Teil der Entladungsstrahlung ist ultraviolett und daher für das Auge unsichtbar.

In der **mit Leuchtstoff beschichteten Hälfte** absorbiert die Beschichtung ultraviolette Strahlung und emittiert einen Teil ihrer Energie erneut als sichtbares Licht. Diese Fluoreszenz erzeugt breite sichtbare Emissionsbanden, die in einem einfachen Spektroskop häufig nahezu kontinuierlich erscheinen. Die direkten Quecksilberlinien können dieser breiteren Emission weiterhin überlagert sein.

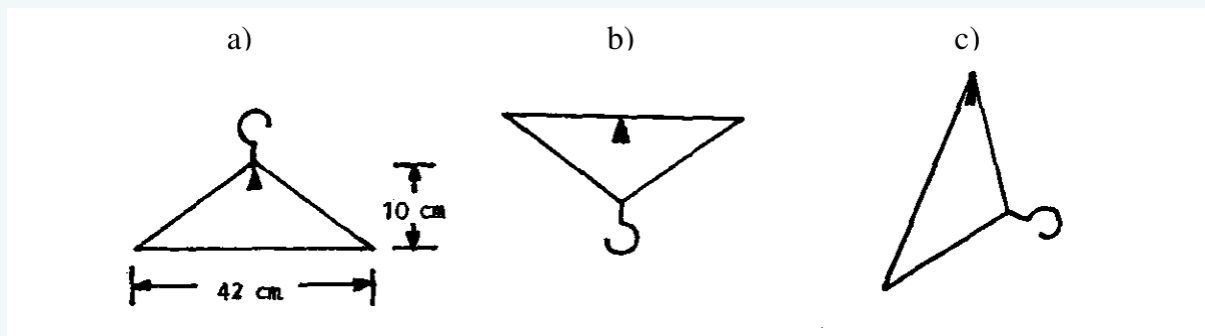
Die Beschichtung erhöht somit die nutzbare sichtbare Lichtabgabe und verändert deren Farbe in Richtung Weiß. Der spektrale Unterschied entsteht durch die Umwandlung ultravioletter Strahlung in sichtbares Licht im Leuchtstoff.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Schwingender Kleiderbügel

Ein (geeignet gefertigter) Drahtkleiderbügel kann in der Zeichenebene Schwingungen kleiner Amplitude um die dargestellten Gleichgewichtslagen ausführen. In den Lagen a) und b) ist die lange Seite waagrecht. Die beiden anderen Seiten sind gleich lang. Die Schwingungsdauer ist in allen Fällen gleich.

Wo liegt der Schwerpunkt, und wie groß ist die Schwingungsdauer?



Die Abbildung enthält außer den angegebenen Abmessungen keine weiteren Informationen. Beispielsweise ist über die genaue Massenverteilung nichts bekannt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Schwerpunkt:** Auf halber Höhe des Dreiecks, auf seiner Symmetrieachse: 5.0 cm von der langen Seite und 5.0 cm vom gegenüberliegenden Eckpunkt entfernt.
- **Gemeinsame Schwingungsdauer:**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

wobei die Längen in Metern angegeben sind und $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ist.

Lösung

Wir betrachten den Kleiderbügel als starres physikalisches Pendel mit einem festen Aufhängepunkt in jeder Anordnung und vernachlässigbarer Reibung. Seine Masse sei M , und $I_G = Mk^2$ sei sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch seinen Schwerpunkt senkrecht zu seiner Ebene.

Liegt der Schwerpunkt im Abstand d unterhalb des Aufhängepunkts, so ergeben der Satz von Steiner und das Drehmoment der Gewichtskraft

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

Für kleine Schwingungen gilt $\sin \theta \simeq \theta$, also

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

Eine gemeinsame Schwingungsdauer bedeutet somit, dass

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

für alle drei Aufhängepunkte denselben Wert hat.

Lage des Schwerpunkts.

Wir bezeichnen den der langen Seite gegenüberliegenden Eckpunkt mit A , den Mittelpunkt der langen Seite mit B und den in c) zur Aufhängung verwendeten Eckpunkt mit C . Die gegebenen Abmessungen sind

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

In der Lage a) erfordert das Gleichgewicht, dass der Schwerpunkt G senkrecht unterhalb von A liegt. Da das Dreieck gleichschenkelig und seine lange Seite waagerecht ist, liegt G auf der Geraden AB . In der Lage b) muss der Aufhängepunkt ebenfalls senkrecht oberhalb von G liegen, also ist er B .

Beide Gleichgewichtslagen müssen stabil sein. Folglich liegt G zwischen A und B . Mit $BG = x$ gilt

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Aus der Gleichheit der Schwingungsdauern in a) und b) folgt

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

oder

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

Somit gilt entweder

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad k^2 = x(h - x).$$

Die zweite Möglichkeit würde bedeuten, dass

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

In der Anordnung c) gilt jedoch

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

Dies widerspricht der gemeinsamen Schwingungsdauer. Daher gilt

$$x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

Der Schwerpunkt liegt somit auf halbem Weg zwischen dem Mittelpunkt der langen Seite und dem gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Schlussfolgerung setzt keine gleichmäßige Massenverteilung voraus.

Schwingungsdauer.

Für diese Schwerpunktlage betragen die Abstände zu den Aufhängepunkten

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

Durch Gleichsetzen der Schwingungsdauern für die Abstände d und r erhalten wir

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

Da $d \neq r$, ergibt sich daraus

$$k^2 = dr.$$

Die gemeinsame reduzierte Pendellänge ist daher

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m}.$$

Schließlich folgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Heißluftballon

Betrachtet wird ein Heißluftballon mit einem festen Volumen von $V_B = 1.1 \text{ m}^3$. Die Masse der Ballonhülle, deren Volumen gegenüber V_B zu vernachlässigen ist, beträgt $m_H = 0.187 \text{ kg}$.

Der Ballon soll an einem Ort starten, an dem die Außenlufttemperatur $\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$ und der normale Außenluftdruck $p_o = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ betragen. Unter diesen Bedingungen beträgt die Luftdichte $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

a) Welche Temperatur ϑ_2 muss die erwärmte Luft im Inneren des Ballons haben, damit der Ballon gerade schwebt?

b) Zunächst wird der Ballon am Boden festgehalten und die Luft in seinem Inneren auf eine stationäre Temperatur von $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$ erwärmt. Der Ballon ist mit einem Seil befestigt.

Berechnen Sie die Kraft auf das Seil.

c) Nun wird der Ballon unten zugebunden (die Dichte der Luft im Inneren bleibt konstant). Bei einer stationären Temperatur der Innenluft von $\vartheta_3 = 110^\circ\text{C}$ steigt der Ballon in einer isothermen Atmosphäre mit einer Temperatur von 20°C und einem Luftdruck am Boden von $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ auf. Welche Höhe h kann der Ballon unter diesen Bedingungen erreichen?

d) In der Höhe h wird der Ballon (Teilaufgabe c)) um 10 m aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt und anschließend wieder losgelassen.

Bestimmen Sie durch qualitative Überlegungen, welche Art von Bewegung er ausführen wird!

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ\text{C}$, entsprechend $T_2 \approx 341.5 \text{ K}$.
- **b)** Seilspannung: $F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}$. Der Ballon zieht das Seil nach oben.
- **c)** Gleichgewichtshöhe über dem Startpunkt: $h \approx 8.4 \times 10^2 \text{ m} = 0.84 \text{ km}$.
- **d)** Näherungsweise harmonische vertikale Schwingungen um h mit einer Amplitude von 10 m , wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Der Luftwiderstand dämpft die Bewegung.

Lösung

Wir behandeln Luft als ideales Gas mit konstanter Zusammensetzung,

$$p = \rho R_s T,$$

wobei R_s ihre spezifische Gaskonstante und T die absolute Temperatur ist. Die relevanten Temperaturen sind

$$T_1 = 293.15 \text{ K}, \quad T_3 = 383.15 \text{ K}.$$

In (a) und (b) ist der Ballon unten offen, sodass sein Innendruck gleich dem Umgebungsdruck ist. Wir vernachlässigen Druck- und Dichteänderungen über die Abmessungen des Ballons. Nach dem Verschließen in (c) bleiben die eingeschlossene Luftmasse und das vorgegebene Volumen konstant.

Wir verwenden $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ und betrachten diesen Wert über den betrachteten Höhenbereich als konstant.

a) Zum Schweben erforderliche Temperatur

Nach dem archimedischen Prinzip ist die nach oben gerichtete Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft der verdrängten Außenluft:

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

Im Schwebezustand gleicht sie die gesamte Gewichtskraft der Hülle und der eingeschlossenen Luft aus:

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B) g.$$

Die erforderliche Dichte der Innenluft beträgt somit

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03 \text{ kg m}^{-3}.$$

Da Innen- und Außendruck gleich sind, folgt aus der idealen Gasgleichung

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

Daher gilt

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53 \text{ K},$$

beziehungsweise

$$\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4 \text{ }^\circ\text{C}.$$

b) Kraft auf das Seil

Bei $T_3 = 383.15 \text{ K}$ beträgt die Dichte der Innenluft

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

Das Seil übt die nach unten gerichtete Kraft aus, die erforderlich ist, um den Überschuss der Auftriebskraft gegenüber der Gewichtskraft auszugleichen:

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B) g.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

also

$$F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}.$$

Dies ist die Seilspannung: Das Seil zieht den Ballon nach unten, und der Ballon zieht das Seil nach oben.

c) Gleichgewichtshöhe in der isothermen Atmosphäre

Sobald die untere Öffnung zugebunden ist, bleibt die Gesamtmasse des Ballons konstant bei

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

Um zu bestimmen, wie sich die Auftriebskraft mit der Höhe ändert, kombinieren wir das hydrostatische Gleichgewicht der Atmosphäre,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

mit der idealen Gasgleichung bei der konstanten Außentemperatur T_1 :

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

Die Integration vom Boden aus, wo $p = p_0$ gilt, liefert

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

wobei die atmosphärische Skalenhöhe gegeben ist durch

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m.}$$

Im Gleichgewicht ist die Auftriebskraft gleich der konstanten Gewichtskraft des Ballons:

$$\rho(h)V_B g = Mg.$$

Die Dichte der Außenluft muss dort daher betragen:

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

Mit dem exponentiellen Dichteprofil ergibt sich

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

und somit

$$h = H \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B}\right).$$

Numerisch ergibt sich

$$h = (8605.16) \ln\left(\frac{1.2}{1.08813}\right) \approx 842 \text{ m.}$$

Damit gilt

$$\boxed{h \approx 0.84 \text{ km}}.$$

Dies ist die in Teil (d) genannte Gleichgewichtshöhe. Ein frei aufsteigender Ballon kann sie aufgrund seiner Trägheit überschreiten.

d) Bewegung nach der Auslenkung

Die Gewichtskraft und das Volumen des Ballons bleiben konstant, während die Dichte der Außenluft mit der Höhe abnimmt.

- Wird er **nach oben** ausgelenkt, gelangt er in Luft geringerer Dichte. Die Auftriebskraft wird kleiner als seine Gewichtskraft, sodass die resultierende Kraft nach unten gerichtet ist.
- Wird er **nach unten** ausgelenkt, gelangt er in Luft höherer Dichte. Die Auftriebskraft wird größer als seine Gewichtskraft, sodass die resultierende Kraft nach oben gerichtet ist.

Die Kraft treibt den Ballon somit zur Höhe h zurück. Beim Erreichen von h bewegt er sich aufgrund seiner Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus, wodurch eine Schwingung entsteht.

Die Bewegung ist näherungsweise harmonisch, weil die Auslenkung klein gegenüber der atmosphärischen Skalenhöhe ist. Um dies zu zeigen, setzen wir $x = z - h$. Da $\rho(h)V_B = M$ gilt, ist die nach oben gerichtete resultierende Kraft

$$F(x) = Mg \left(e^{-x/H} - 1 \right).$$

Hier gilt

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

also

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

Dies ist eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft.

Unter Vernachlässigung des Luftwiderstands führt der Ballon somit **näherungsweise harmonische vertikale Schwingungen** aus, deren Amplitude anfangs 10 m beträgt. Der Luftwiderstand dissipiert Energie und dämpft die Bewegung, bis der Ballon schließlich auf seiner Gleichgewichtshöhe zur Ruhe kommt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.