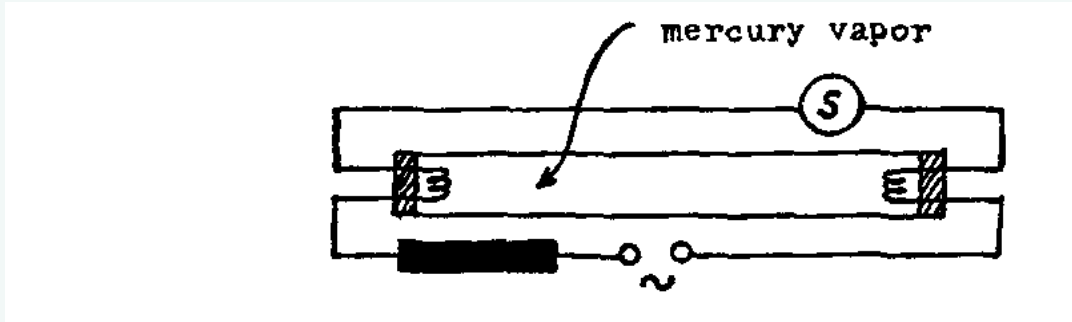


المسألة 1: المصباح الفلوري

يُطبَّق جهد متناوب بتردد 50 Hz على المصباح الفلوري الموضح في مخطط الدائرة المرفق.

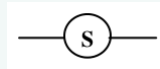


قيست الكميات الآتية:

$U = 228.5 \text{ V}$	الجهد الكلي (جهد الشبكة)
$I = 0.6 \text{ A}$	التيار الكهربائي
$U' = 84 \text{ V}$	الجهد الجزئي بين طرفي المصباح الفلوري
$R_d = 26.3 \Omega$	المقاومة الأومية ملف الخنق الموصول على التوالي

يمكن اعتبار المصباح الفلوري نفسه مقاومة أومية في الحسابات.

- (a) ما محاثة L ملف الخنق الموصول على التوالي؟
 (b) ما فرق الطور φ بين الجهد والتيار؟
 (c) ما القدرة الفعالة P_w التي يحولها الجهاز؟
 (d) إلى جانب الحد من التيار، يؤدي ملف الخنق الموصول على التوالي وظيفة مهمة أخرى. اذكر هذه الوظيفة وشرحها!
 تلميح: يحتوي بادئ التشغيل



- على ملامس يُغلق بعد وقت قصير من تشغيل المصباح، ثم يُفتح من جديد ويبقى مفتوحاً.
 (e) ارسم رسماً تخطيطياً لتغيّر التدفق الضوئي المنبعث من المصباح مع الزمن، مع استخدام مقياس زمني محدد بالقيم العددية.
 (f) لماذا لا يلزم إشعال المصباح إلا مرة واحدة، مع أن الجهد المتناوب المطبَّق يمر بالصفر على فترات منتظمة؟
 (g) وفقاً لبيان الشركة المصنّعة، يمكن، في مصباح فلوري من النوع الموصوف، توصيل مكثف سعته نحو $4.7 \mu\text{F}$ على التوالي مع ملف الخنق. كيف يؤثر ذلك في تشغيل المصباح، ولأي غرض أُتيحت هذه الإمكانية؟
 (h) افحص نصفي المصباح التوضيحي المعروض باستخدام المطياف المرفق. اشرح الفروق بين الطيفين. يمكنك الاقتراب من المصباح، ويمكنك الاحتفاظ بالمطياف تذكراً.

الإجابات

- (a) • $L \approx 1.09 \text{ H}$.
- (b) • مع تأخر التيار عن جهد الشبكة. $\varphi \approx 64.1^\circ$
- (c) • $P_w \approx 59.9 \text{ W}$: منها 50.4 W في المصباح و 9.47 W في مقاومة ملف الخنق.
- (d) • يُولد ملف الخنق نبضة الإشعال عالية الجهد بالحث الذاتي عندما يُفَتَّح بادئ التشغيل بعد تسخين القطبين مسبقاً.
- (e) • ينبض التدفق الضوئي بتردد 100 Hz ، ويتكرر كل 10 ms . ويمكن تمثيله برسم تخطيطي مثالي وفق العلاقة $\Phi(t) \propto \sin^2(2\pi 50t - \varphi)$.
- (f) • يتيح التأين المتبقي والقطبان الساخنان استئناف التفريغ بعد كل انعدام وجيز للتيار، دون الحاجة إلى نبضة إشعال أخرى لبدء التشغيل على البارد.
- (g) • يحافظ المكثف تقريباً على التيار ومتوسط السطوع، مع جعل التيار يتقدم على الجهد. عند $4.7 \mu\text{F}$ ، يكون $I_C \approx 0.611 \text{ A}$ ، متقدماً بزاوية 63.6° . ويؤدي إقران هذا المصباح بمصباح غير معدّل إلى معامل قدرة كلي يقارب الواحد، ويقلل الوميض والتأثيرات الومضية.
- (h) • بافتراض أن المصباح التوضيحي يتكون من نصف غير مطلي ونصف مطلي بمادة فوسفورية: يُظهر النصف غير المطلي خطوط انبعاث الزئبق المنفصلة؛ ويُظهر النصف المطلي، بالإضافة إليها، انبعاثاً مرئياً عريض النطاق من المادة الفوسفورية، ناتجاً عن تحويل الأشعة فوق البنفسجية إلى ضوء مرئي.

الحل

تُعدّ قيم الجهد والتيار المقاسة قيماً فعالة. أثناء التشغيل العادي، يكون بادئ التشغيل مفتوحاً. نستخدم التقريب الأومي المذكور للمصباح، ونمّثل ملف الخنق بمحاثة مثالية موصولة على التوالي مع مقاومة ملفه.

(a) محاثة ملف الخنق الموصول على التوالي

مقاومة المصباح هي

$$R_{\text{lamp}} = \frac{U'}{I} = \frac{84}{0.6} = 140 \Omega.$$

ومن ثم تكون المقاومة الكلية الموصولة على التوالي

$$R = R_{\text{lamp}} + R_d = 140 + 26.3 = 166.3 \Omega.$$

يكون الجهد المقاومي متفقاً في الطور مع التيار، بينما يتقدم الجهد الحثي على التيار بزاوية 90° . لذلك تحقق قيم الجهد الفعالة علاقة المتجهات الطورية

$$U^2 = (IR)^2 + (I\omega L)^2, \quad \omega = 2\pi f.$$

الجهد المقاومي الكلي هو

$$IR = U' + IR_d = 84 + 0.6(26.3) = 99.78 \text{ V}.$$

وعليه يكون الجهد الحثي

$$U_L = \sqrt{228.5^2 - 99.78^2} = 205.56 \text{ V},$$

وتكون

$$L = \frac{U_L}{2\pi f I} = \frac{205.56}{2\pi(50)(0.6)} = 1.09 \text{ H}.$$

المفاعلة الحثية المقابلة هي

$$X_L = \omega L = \boxed{342.6 \, \Omega}.$$

(b) فرق الطور

لمقاومة ومحاثة موصولتين على التوالي،

$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R},$$

ومن ثم

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{342.6}{166.3} \right) = \boxed{64.1^\circ}.$$

يتأخر التيار عن الجهد المطبق. وبصورة مكافئة،

$$\cos \varphi = \frac{IR}{U} = \frac{99.78}{228.5} = 0.4367.$$

باختيار مبدأ الزمن عند عبور جهد الشبكة للصفر في الاتجاه الصاعد،

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t, \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi).$$

(c) القدرة الفعالة

تخزن المحاثة المثالية الطاقة وتعيدها، فلا تستهلك قدرة متوسطة. لذلك تتبدد القدرة الفعالة في المصباح ومقاومة الملف:

$$P_w = I^2 (R_{\text{lamp}} + R_d).$$

عددياً،

$$P_w = 0.6^2 (166.3) = 59.868 \, \text{W} \approx \boxed{59.9 \, \text{W}}.$$

ومساهمتها هما

$$P_{\text{lamp}} = U' I = 84(0.6) = \boxed{50.4 \, \text{W}},$$

$$P_d = I^2 R_d = 0.6^2 (26.3) = \boxed{9.47 \, \text{W}}.$$

وهذا يتفق مع $P_w = UI \cos \varphi$.

(d) الإشعال بالحث الذاتي

عندما يُغلق بادئ التشغيل، يسري التيار عبر ملف الخنق وفتيلتي القطبين وملامس بادئ التشغيل. وهذا يسخن القطبين، مما يسهل انبعاث الإلكترونات.

عندما يُفَتَح بادئ التشغيل لاحقاً، يعارض ملف الخنق الانخفاض السريع في التيار. ويعطي قانون فاراداي قوته الدافعة الكهربائية المستحثة:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}.$$

لذلك يؤدي القطع السريع للتيار إلى توليد نبضة جهد كبيرة بين طرفي المصباح. وتبدأ هذه النبضة الانهيار الكهربائي للغاز وتنشئ التفريغ. وتكون الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسي للملف الخنق،

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2,$$

متاحة أثناء هذه الحالة العابرة.

بمجرد نشوء التفريغ، يبقى بادئ التشغيل مفتوحاً ويحدّد ملف الخنق من تيار التشغيل. ولا يمكن حساب مقدار نبضة الإشعال من المعطيات المتاحة، لأن زمن قطع التيار وخصائص الدائرة أثناء الحالة العابرة غير محددة.

(e) اعتماد التدفق الضوئي على الزمن

لرسم تخطيطي مثالي، نفترض ثبات الفعالية الضوئية ونهمل تأخر انبعاث المادة الفوسفورية. عندئذ يتناسب التدفق الضوئي مع القدرة اللحظية المقدّمة إلى المصباح:

$$p_{\text{lamp}}(t) = R_{\text{lamp}} i^2(t) = 2R_{\text{lamp}} I^2 \sin^2(\omega t - \varphi).$$

وهنا،

$$p_{\text{lamp}}(t) = (100.8 \text{ W}) \sin^2(\omega t - \varphi).$$

إذن

$$\Phi(t) = \Phi_{\text{max}} \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{\Phi_{\text{max}}}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)].$$

ينتج الضوء في كلا اتجاهي التيار، ولذلك تكون دورة التدفق الضوئي

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2f} = \boxed{10 \text{ ms}},$$

وهو ما يقابل تردداً قدره $\boxed{100 \text{ Hz}}$.

لإعداد الرسم التخطيطي، اختر زمناً محلياً $\tau = 0$ عند انعدام التيار. ارسم منحنى أملس غير سالب يمر بهذه النقاط، وكرره كل 10 ms:

τ (ms)	0	2.5	5.0	7.5	10.0
Φ/Φ_{max}	0	1/2	1	1/2	0

للمنحنى مماسات أفقية عند قيمه الصغرى والعظمى. ومتوسطه هو $\Phi_{\text{max}}/2$.

بالنسبة إلى مبدأ زمن جهد الشبكة المستخدم في الجزء (b)، يحدث أول انعدام للتيار عند

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = 3.56 \text{ ms}.$$

وعليه، تقع القيم الصغرى المثالية للضوء عند 3.56, 13.56, ... ms، والقيم العظمى عند 8.56, 18.56, ... ms.

لا تتحدد القيمة المطلقة للتدفق الضوئي، لعدم إعطاء الفعالية الضوئية. وفي المصباح الحقيقي، يؤدي استمرار توهج المادة الفوسفورية إلى تنعيم الخرج الضوئي وتأخير، ولذلك ليس من الضروري أن تبلغ قيمه الصغرى الصفر.

(f) لماذا لا تلزم نبضة إشعال جديدة

يلزم جهد بدء التشغيل الكبير لإنشاء تفريغ في الغاز الذي يكون ضعيف التأين في البداية. وأثناء التشغيل، يحتوي الغاز على جسيمات مشحونة، ويبقى القطبان ساخنين.

حول كل لحظة انعدام التيار، يكون الانقطاع أقصر من أن يسمح بزوال التأين تماماً وتبريد القطبين. لذلك يمكن أن يُستأنف التفريغ في نصف الدورة التالي عند جهد أقل بكثير مما لزم لبدء التشغيل الأولي على البارد.

كذلك، لا تتطابق لحظات انعدام جهد المصدر مع لحظات انعدام التيار بسبب فرق الطور. ومع ذلك، يمر التيار فعلاً بالصفر كل 10 ms؛ ويُفسر التأين المتبقي والقطبان الساخنان عدم الحاجة إلى نبضة أخرى من بادئ التشغيل.

(g) تأثير المكثف الموصل على التوالي والغرض منه

مع توصيل مكثف على التوالي، تصبح المعاوقة

$$Z_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

عند $C = 4.7 \mu\text{F}$ ،

$$X_C = \frac{1}{2\pi(50)(4.7 \times 10^{-6})} = 677.3 \Omega.$$

لذلك تكون المفاعلة الصافية

$$X_{\text{net}} = 342.6 - 677.3 = -334.6 \Omega.$$

وهي سعوية، ومقدارها يكاد يساوي مقدار المفاعلة الحثية الأصلية.

التيار الجديد هو

$$I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_{\text{net}}^2}} = \frac{228.5}{\sqrt{166.3^2 + 334.6^2}} = \boxed{0.611 \text{ A}}.$$

زاوية طور المعاوقة هي

$$\varphi_C = \tan^{-1} \left(\frac{-334.6}{166.3} \right) = -63.6^\circ,$$

ولذلك يتقدم التيار الآن على الجهد بزاوية $\boxed{63.6^\circ}$.

تصبح قدرة المصباح

$$P_{\text{lamp},C} = I_C^2 R_{\text{lamp}} \approx 52.3 \text{ W},$$

وهي قريبة من قيمتها الأصلية 50.4 W. ومن ثم يُحفظ متوسط سطوعه تقريباً.

لمعرفة سبب اختيار هذه السعة، نشترط أن يبقى مقدار التيار دون تغيير تماماً:

$$(X_L - X_C)^2 = X_L^2.$$

الحل غير الصفري هو

$$X_C = 2X_L,$$

مما يعطي

$$C_* = \frac{1}{2\omega X_L} = \frac{1}{2\omega^2 L} = \boxed{4.65 \mu\text{F}},$$

وهو ما يتفق مع القيمة التقريبية للشركة المصنعة $4.7 \mu\text{F}$. عند هذه القيمة، تتغير المعاوقة من $R + jX_L$ إلى $R - jX_L$.

يتيح ذلك ترتيباً مفيداً **بمصباحين**: نصل فرعين، يحتوي كل منهما على مصباح، على التوازي بين طرفي مصدر التغذية؛ أحدهما مزود بملف الخنق الأصلي، والآخر بملف الخنق مع المكثف الموصول على التوالي.

- **تحسين معامل القدرة.** في الحالة المثالية التي يتساوى فيها مقدارا التيارين، يتأخر أحد التيارين ويتقدم الآخر بزاويتين متساويتين. وتلغي مركباتهما غير الفعالين إحداهما الأخرى:

$$I_{\text{total}} = \frac{U}{R + jX_L} + \frac{U}{R - jX_L} = \frac{2UR}{R^2 + X_L^2}.$$

يكون التيار الكلي متفقاً في الطور مع الجهد، مما يعطي معامل قدرة يساوي الواحد. ومع القيمة الاسمية $4.7 \mu\text{F}$ ، يكون الإلغاء شبه تام.

- **تقليل تذبذب الضوء.** يبلغ المصباحان قيمتهما الصغيرتين للضوء في وقتين مختلفين. وفق نموذج الجزء (e)، يكون تدفقهما الضوئي المشترك

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{pair}}(t) &= \Phi_{\text{max}} [\sin^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \Phi_{\text{max}} [1 - \cos(2\varphi) \cos(2\omega t)]. \end{aligned}$$

بما أن $1 > 0.619 \approx |\cos(2\varphi)|$ ، فإن الضوء المشترك لا ينخفض إلى الصفر أبداً في هذا النموذج. ويقل الوميض والتأثيرات الومضية، مع أن الضوء لا يكون ثابتاً تماماً.

(h) طيفا النصفين

التفسير المتوقع هو أن المصباح التوضيحي يحتوي على نصف غير مطلي ونصف مطلي بمادة فوسفورية فلورية.

في النصف غير المطلي، يأتي الضوء المرئي المشاهد مباشرة من تفريغ الزئبق. وتبعث ذرات الزئبق المثارة فوتونات عند طاقات انتقال منفصلة،

$$h\nu = E_{\text{upper}} - E_{\text{lower}},$$

ولذلك يُظهر المطياف خطوط انبعاث منفصلة. ويقع جزء كبير من إشعاع التفريغ في نطاق الأشعة فوق البنفسجية، ومن ثم فهو غير مرئي للعين.

في النصف المطلي بالمادة الفوسفورية، تمتص الطبقة الأشعة فوق البنفسجية وتعيد إصدار جزء من طاقتها في صورة ضوء مرئي. وينتج عن هذا التآلق الفلوري نطاقات انبعاث مرئية عريضة، تبدو غالباً شبه متصلة في مطياف بسيط. ويمكن أن تبقى خطوط الزئبق المباشرة متراكبة على هذا الانبعاث الأعرض.

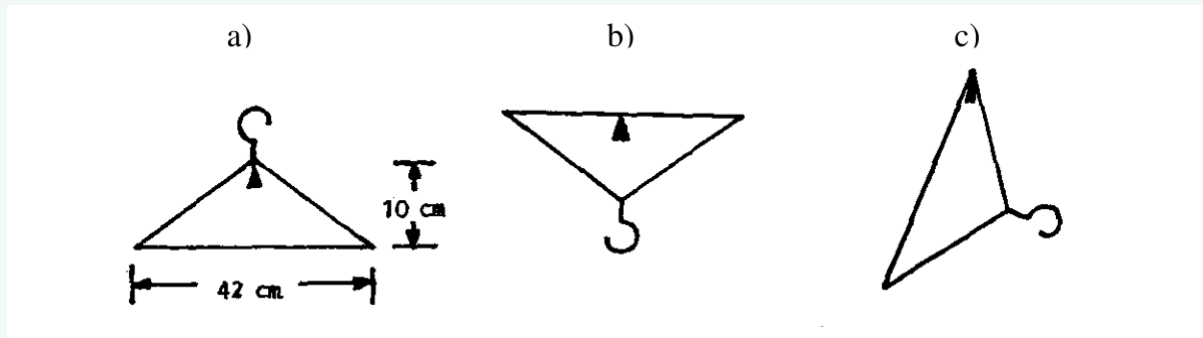
لذلك تزيد الطبقة الخرج المرئي المفيد وتغير لونه نحو الأبيض. وينشأ الاختلاف الطيفي عن تحويل الأشعة فوق البنفسجية إلى ضوء مرئي في المادة الفوسفورية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: علاقة ملابس متذبذبة

يمكن لعلاقة ملابس سلكية (مصنوعة على نحو مناسب) أن تؤدي تذبذبات صغيرة السعة في مستوى الشكل حول مواضع الاتزان الميمنة. في الموضعين (a) و (b) يكون الضلع الطويل أفقياً. أما الضلعان الآخران فمتساويان في الطول. والزمن الدوري للتذبذب هو نفسه في جميع الحالات.

أين يقع مركز الكتلة، وما مقدار الزمن الدوري؟



لا يتضمن الشكل أي معلومات تتجاوز الأبعاد المعطاة. فلا يُعرف شيء، مثلاً، عن التوزيع التفصيلي للكتلة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- مركز الكتلة: عند منتصف ارتفاع المثلث، على محور تناظره: على بُعد 5.0 cm من الضلع الطويل وعلى بُعد 5.0 cm من الرأس المقابل.

• الزمن الدوري المشترك:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.050 + \sqrt{0.210^2 + 0.050^2}}{g}} \simeq 1.03 \text{ s},$$

حيث الأطوال بالأمتار و $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

الحل

نُعامل العلاقة على أنها بندول فيزيائي صلب، له نقطة تعليق ثابتة في كل وضعية، مع إهمال الاحتكاك. لتكن كتلتها M ، وليكن $I_G = Mk^2$ عزم قصورها الذاتي حول المحور المار بمركز كتلتها والعمودي على مستواها.

إذا كان مركز الكتلة يقع على مسافة d أسفل نقطة التعليق، فإن مبرهنة المحاور المتوازية وعزم قوة الثقل يعطيان

$$M(k^2 + d^2)\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta.$$

للتذبذبات الصغيرة، $\sin \theta \simeq \theta$ ، ومن ثم

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + d^2}{gd}}.$$

وعليه، فإن تساوي الأزمنة الدورية يعني أن المقدار

$$\ell \equiv \frac{gT^2}{4\pi^2} = d + \frac{k^2}{d}$$

له القيمة نفسها عند نقاط التعليق الثلاث جميعها.

موضع مركز الكتلة.

لنرمز إلى الرأس المقابل للضلع الطويل بـ A ، وإلى منتصف الضلع الطويل بـ B ، وإلى الرأس المستخدم للتعليق في C بـ C . الأبعاد المعطاة هي

$$AB = h = 0.100 \text{ m}, \quad BC = a = 0.210 \text{ m}.$$

في الموضع (a)، يقتضي الاتزان أن يقع مركز الكتلة G أسفل A على الخط الرأسى المار بها. وبما أن المثلث متساوي الساقين وضلعه الطويل أفقي، فإن G يقع على المستقيم AB . وفي الموضع (b)، يجب كذلك أن تقع نقطة التعليق فوق G على الخط الرأسى المار به، لذا فهي B .

يجب أن يكون الاتزان مستقرًا في كلا الموضعين. وبناءً عليه، يقع G بين A و B . وبوضع $BG = x$ ، نحصل على

$$0 < x < h, \quad d_a = h - x, \quad d_b = x, \quad d_c = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

يعطي تساوي الزمنين الدوريين في (a) و (b)

$$h - x + \frac{k^2}{h - x} = x + \frac{k^2}{x},$$

أو

$$(h - 2x)[x(h - x) - k^2] = 0.$$

إذن إما

$$x = \frac{h}{2} \quad \text{أو} \quad k^2 = x(h - x).$$

الاحتمال الثاني يستلزم أن

$$\ell = x + \frac{x(h - x)}{x} = h.$$

لكن في الوضعية (c)،

$$\ell = d_c + \frac{k^2}{d_c} > d_c \geq a = 0.210 \text{ m} > h.$$

وهذا يتناقض مع تساوي الأزمنة الدورية. لذلك

$$x = \frac{h}{2} = 0.050 \text{ m}.$$

إذن يقع مركز الكتلة في منتصف المسافة بين منتصف الضلع الطويل والرأس المقابل. ولا تتطلب هذه النتيجة توزيعاً منتظماً للكتلة.

الزمن الدوري للتذبذب.

عندما يكون مركز الكتلة في هذا الموضع، تكون المسافات بينه وبين نقاط التعليق

$$d_a = d_b = d = 0.050 \text{ m}, \quad d_c = r = \sqrt{0.210^2 + 0.050^2} = 0.215870 \dots \text{ m}.$$

بمساواة الزمنين الدوريين للمسافتين d و r ،

$$d + \frac{k^2}{d} = r + \frac{k^2}{r}.$$

وبما أن $d \neq r$ ، ينتج عن ذلك

$$k^2 = dr.$$

ومن ثم يكون طول البندول المكافئ المشترك

$$\ell = d + \frac{dr}{d} = d + r = 0.265870 \dots \text{ m}.$$

وأخيراً،

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d+r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.265870 \dots}{9.81}} \simeq 1.03 \text{ s}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: منطاد الهواء الساخن

لنعتبر منطاد هواء ساخن ذا حجم ثابت $V_B = 1.1 \text{ m}^3$. كتلة غلاف المنطاد، الذي يُهمل حجمه بالمقارنة مع V_B ، هي $m_H = 0.187 \text{ kg}$.

يُراد إطلاق المنطاد من موضع تبلغ فيه درجة حرارة الهواء الخارجي $\vartheta_1 = 20^\circ \text{C}$ ، ويبلغ فيه ضغط الهواء الخارجي العادي $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. في هذه الظروف، تبلغ كثافة الهواء $\rho_1 = 1.2 \text{ kg/m}^3$.

(a) ما درجة الحرارة ϑ_2 التي يجب أن يبلغها الهواء المسخن داخل المنطاد كي يصبح المنطاد معلقاً في الهواء تماماً؟

(b) يُنبت المنطاد أولاً على الأرض، ويُسخن الهواء داخله حتى تبلغ درجة حرارته المستقرة $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$. ويُربط المنطاد بحبل.

احسب القوة المؤثرة في الحبل.

(c) لنفترض أن فتحة المنطاد السفلية قد رُبِطت وأُغُلِّقت (فتبقى كثافة الهواء الداخلي ثابتة). عند درجة حرارة مستقرة للهواء الداخلي مقدارها $\vartheta_3 = 110^\circ \text{C}$ ، يرتفع المنطاد في غلاف جوي متساوي الحرارة عند 20°C ، وضغطه عند سطح الأرض

$p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. ما الارتفاع h الذي يمكن أن يبلغه المنطاد في هذه الظروف؟

(d) عند الارتفاع h ، يُزاح المنطاد (في السؤال (c)) عن موضع اتزانه بمقدار 10 m ، ثم يُترك حرّاً من جديد.

الإجابات

- (a) $\vartheta_2 \approx 68.4^\circ \text{C}$ ، وهو ما يقابل $T_2 \approx 341.5 \text{ K}$.
- (b) شد الحبل: $F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}$. يشد المنطاد الحبل إلى أعلى.
- (c) ارتفاع الاتزان فوق نقطة الانطلاق: $h \approx 8.4 \times 10^2 \text{ m} = 0.84 \text{ km}$.
- (d) اهتزازات رأسية توافقية بسيطة تقريباً حول h ، بسعة 10 m عند إهمال مقاومة الهواء. وتؤدي مقاومة الهواء إلى تخميد الحركة.

الحل

نُعامل الهواء بوصفه غازاً مثاليًا ثابت التركيب،

$$p = \rho R_s T,$$

حيث R_s هو ثابت الغاز النوعي للهواء، و T هي درجة الحرارة المطلقة. ودرجتا الحرارة المعنيتان هما

$$T_1 = 293.15 \text{ K}, \quad T_3 = 383.15 \text{ K}.$$

في (a) و (b)، يكون المنطاد مفتوحاً من الأسفل، ولذلك يساوي ضغطه الداخلي الضغط المحيط به. ونهمل تغيرات الضغط والكثافة على امتداد أبعاد المنطاد. وبعد إغلاقه بإحكام في (c)، تبقى كتلة الهواء المحصور داخله وحجمه المحدد ثابتين.

نستخدم $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ، ونعدّه ثابتاً ضمن الارتفاعات المدروسة.

(a) درجة الحرارة اللازمة ليصبح المنطاد معلقاً في الهواء تماماً

وفقاً لمبدأ أرخميدس، تساوي قوة الطفو المتجهة إلى أعلى وزن الهواء الخارجي المزاح:

$$F_B = \rho_1 V_B g.$$

لتحقيق الطفو المتبادل، تتوازن هذه القوة مع مجموع وزني الغلاف والهواء المحصور:

$$\rho_1 V_B g = (m_H + \rho_2 V_B) g.$$

إذن، الكثافة الداخلية المطلوبة هي

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} = 1.2 - \frac{0.187}{1.1} = 1.03 \text{ kg m}^{-3}.$$

بما أن الضغطين الداخلي والخارجي متساويان، فإن قانون الغاز المثالي يعطي

$$\rho_2 T_2 = \rho_1 T_1.$$

وعليه،

$$T_2 = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2} = \frac{1.2(293.15)}{1.03} = 341.53 \text{ K},$$

أو

$$\vartheta_2 = 341.53 - 273.15 \approx 68.4^\circ \text{C}.$$

(b) القوة المؤثرة في الحبل

عند $T_3 = 383.15 \text{ K}$ ، تكون الكثافة الداخلية

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{T_1}{T_3} = 1.2 \frac{293.15}{383.15} \approx 0.91813 \text{ kg m}^{-3}.$$

يوفر الحبل القوة المتجهة إلى أسفل واللازمة لموازنة مقدار زيادة قوة الطفو على الوزن:

$$F_{\text{rope}} = \rho_1 V_B g - (m_H + \rho_3 V_B)g.$$

بالتعويض،

$$F_{\text{rope}} = [(1.2 - 0.91813)(1.1) - 0.187](9.81),$$

ومن ثم،

$$F_{\text{rope}} \approx 1.21 \text{ N}.$$

هذه هي قوة الشد: يشد الحبل المنطاد إلى أسفل، ويشد المنطاد الحبل إلى أعلى.

(c) ارتفاع الاتزان في الغلاف الجوي المتساوي الحرارة

بعد ربط الفتحة السفلية وإغلاقها، تبقى الكتلة الكلية للمنطاد

$$M = m_H + \rho_3 V_B = 0.187 + (0.91813)(1.1) \approx 1.19694 \text{ kg}.$$

لإيجاد كيفية تغير قوة الطفو مع الارتفاع، نجمع بين معادلة الاتزان الهيدروستاتيكي للغلاف الجوي،

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

وقانون الغاز المثالي عند درجة الحرارة الخارجية الثابتة T_1 :

$$\frac{\rho(z)}{p(z)} = \frac{\rho_1}{p_0}.$$

وبالتالي،

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_1 g}{p_0} dz.$$

بالتكامل بدءاً من مستوى سطح الأرض، حيث $p = p_0$ ، نحصل على

$$p(z) = p_0 e^{-z/H}, \quad \rho(z) = \rho_1 e^{-z/H},$$

حيث يُعطى ارتفاع المقياس للغلاف الجوي بالعلاقة

$$H = \frac{p_0}{\rho_1 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{(1.2)(9.81)} \approx 8.605 \times 10^3 \text{ m}.$$

عند الاتزان، تساوي قوة الطفو وزن المنطاد الثابت:

$$\rho(h) V_B g = M g.$$

لذلك، يجب أن تكون الكثافة الخارجية عند ذلك الارتفاع

$$\rho(h) = \frac{M}{V_B} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B} \approx 1.08813 \text{ kg m}^{-3}.$$

باستخدام التوزيع الأسّي للكثافة،

$$\rho_1 e^{-h/H} = \rho_3 + \frac{m_H}{V_B},$$

ومن ثم،

$$h = H \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_3 + m_H/V_B} \right).$$

عددياً،

$$h = (8605.16) \ln\left(\frac{1.2}{1.08813}\right) \approx 842 \text{ m.}$$

إن،

$$h \approx 0.84 \text{ km}.$$

هذا هو ارتفاع الاتزان المشار إليه في الجزء (d). ويمكن للمنطاد الصاعد بحرية أن يتجاوزه بفعل قصوره الذاتي.

(d) الحركة بعد الإزاحة

يبقى وزن المنطاد وحجمه ثابتين، في حين تتناقص كثافة الهواء الخارجي مع الارتفاع.

- إذا أُزيح إلى أعلى، فإنه ينتقل إلى هواء أقل كثافة. وتصبح قوة الطفو أصغر من وزنه، فتتجه القوة المحصلة إلى أسفل.
- إذا أُزيح إلى أسفل، فإنه ينتقل إلى هواء أعلى كثافة. وتصبح قوة الطفو أكبر من وزنه، فتتجه القوة المحصلة إلى أعلى.

إن، تعمل القوة على إعادة المنطاد نحو h . وعند بلوغه h ، يجعله قصوره الذاتي يتجاوز موضع الاتزان، مما يؤدي إلى الاهتزاز. تكون الحركة توافقية تقريباً لأن الإزاحة صغيرة بالمقارنة مع ارتفاع المقياس للغلاف الجوي. ولتوضيح ذلك، لنضع $x = z - h$. وبما أن $\rho(h)V_B = M$ ، فإن القوة المحصلة في الاتجاه الموجب إلى أعلى هي

$$F(x) = Mg(e^{-x/H} - 1).$$

هنا،

$$\frac{|x|}{H} \leq \frac{10}{8605} \approx 1.2 \times 10^{-3} \ll 1,$$

ومن ثم،

$$F(x) \approx -\frac{Mg}{H}x.$$

وهذه قوة إرجاع تتناسب مع الإزاحة.

إن، عند إهمال مقاومة الهواء، يؤدي المنطاد اهتزازات رأسية توافقية بسيطة تقريباً، بسعة ابتدائية مقدارها 10 m. وتبدد مقاومة الهواء الطاقة وتخمد الحركة، إلى أن يستقر المنطاد في النهاية عند ارتفاع اتزانه.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.