

IPhO 1981

理论题与解答 · 保加利亚瓦尔纳 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1981/

题目 1: 活塞释放与气体逸出使容器排空

一个质量为 M 的静止圆柱形容器置于真空中。容器的一端封闭。一个质量为 m 、厚度可忽略不计的固定活塞将容器的容积分成相等的两部分。封闭部分装有 n 摩尔的单原子理想气体，其摩尔质量为 M_0 ，温度为 T 。释放活塞后，活塞无摩擦地离开容器。随后，气体也逸出容器。容器的最终速度是多少？

气体常量为 R 。在活塞离开容器之前，气体的动量可以忽略不计。气体、容器和活塞之间没有热交换。气体逸出容器时的温度变化可以忽略不计。不考虑地球的引力。

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 1 — 在下文所述的自由分子逸出近似下，容器的最终速率为

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

方向朝向容器的封闭端。题目未给出数值。第二项适用于解答中所述的自由分子逸出模型。

解答

取沿圆柱轴线朝向开口端的方向为 x 轴正方向。

活塞仍在容器内时的膨胀。

设气体的初始体积为 V_0 。当活塞到达开口端时，气体占据的体积为 $2V_0$ 。

对于单原子理想气体，

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

采用与忽略气体惯性相对应的压强均匀、准静态近似，膨胀过程为绝热过程：

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

因此，

$$TV^{2/3} = \text{常量},$$

所以活塞离开时的温度为

$$T_1 = T 2^{-2/3}.$$

将该时刻容器的速度记为 $-v_1$ ，其中 $v_1 > 0$ ，活塞的速度记为 $u_1 > 0$ 。按题意忽略气体动量，由动量守恒得

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

气体内能的减少量转化为活塞和容器的动能：

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

代入得

$$\frac{M(M+m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

于是

$$v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})}.$$

活塞离开后不再受力。

分子逸出过程中的反冲。

在这一阶段，采用如下分子运动的理想化模型：在气体排空过程中，分子自由运动；分子在圆柱侧壁上的反射不改变其轴向速度分量；在封闭端的反射使该分量反向。忽略容器运动引起的分子速率变化。

初始朝开口运动的分子直接逸出。初始朝封闭端运动的分子经反射后逸出。因此，若其初始轴向速度为 v_x ，则其最终轴向速度近似为 $|v_x|$ 。

设 μ 为单个分子的质量， k_B 为玻尔兹曼常量。在温度 T_1 下，初始轴向速度的麦克斯韦分布为

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

对初始存在的每个分子各计数一次，所需的平均值为

$$\begin{aligned} \langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}. \end{aligned}$$

气体的总质量为 nM_0 。因此，其最终轴向动量为

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

方向朝向开口。

此时，由整个系统的动量守恒得

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

由于 $mu_1 = Mv_1$,

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

代入 $T_1 = T2^{-2/3}$ 得

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

这两项贡献都使容器朝其封闭端运动。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：通过滑动变阻器由蓄电池供电的电灯

一盏电阻为 $R_0 = 2 \, \Omega$ 、额定电压为 $U_0 = 4.5 \, \text{V}$ 的电灯接在电动势 $E = 6 \, \text{V}$ 、内阻可忽略不计的蓄电池上。

1. 用一个电阻为 R 的滑动变阻器，以分压方式将电灯接到蓄电池上，使电灯两端的电压保持为额定电压。如果系统的效率不得低于 $\eta_0 = 0.6$ ，那么电阻 R 应为多少，流过滑动变阻器的最大电流 $I_{\max}$ 是多少？
2. 系统可能达到的最大效率 η 是多少？此时应如何将电灯与滑动变阻器连接？

题目译自官方英文原文。

答案

1. 滑动变阻器的总电阻必须满足

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \, \Omega.$$

在规定的额定工作条件下，流过滑动变阻器某一段的最大电流为

$$I_{\max} = 2.81 \, \text{A}.$$

在满足要求的极限配置下，滑动变阻器中与电灯并联的一段电阻为 $8.00 \, \Omega$ ，与该并联组合串联的一段电阻为 $0.533 \, \Omega$ 。

2. 最大效率为

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

将电灯与滑动变阻器接入电路的有效电阻串联，该电阻为

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega,$$

使用滑动触头和一个端部接线柱，另一个端部接线柱悬空。

解答

我们考虑稳恒直流，忽略连接导线的电阻，并采用题目给出的电灯在额定工作点的电阻。系统效率定义为输送给电灯的电功率与蓄电池提供的功率之比：

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. 分压式接法

将滑动变阻器的两端接在蓄电池两极之间，并将电灯接在滑动触头与负极之间。将滑动变阻器的两段电阻记为：

- R_s ：正极与滑动触头之间的一段；
- R_p ：滑动触头与负极之间的一段，与电灯并联。

因此，

$$R = R_s + R_p.$$

当电灯两端为额定电压时，由欧姆定律可得电灯中的电流

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ A}.$$

流过滑动变阻器并联段的电流为

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

根据基尔霍夫电流定律，流过串联段的电流，也就是蓄电池的电流，为

$$I = I_0 + I_p.$$

因此，它是流过滑动变阻器两段的电流中较大的一个。

电灯的功率为

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W}.$$

于是，

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

因此，滑动变阻器中允许流过的最大电流为

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A}.$$

R_s 两端的电压为 $E - U_0$ ，而 R_p 两端的电压为 U_0 。因此

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

并且

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

当 $I > I_0$ 时，两项都随 I 的增大而减小。因此，满足效率要求的最小总电阻在 $I = I_{\text{max}}$ 时取得，此时 $\eta = \eta_0$ 。

在这一极限工作点，

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A},$$

所以

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \, \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \, \Omega.$$

因此,

$$R_{\min} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \, \Omega.$$

当调节滑动触头以保持电压为 U_0 时, 更大的总电阻也能满足要求; 此时分流电流更小, 效率更高。

2. 可能达到的最大效率

在额定电压下, 电灯必须获得固定的电流 I_0 。采用无源电阻连接时, 蓄电池的电流不可能小于 I_0 ; 任何额外的并联支路都会消耗额外的电流。因此,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{E I_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

当蓄电池仅提供流过电灯的电流时等号成立, 这要求采用串联接法:

$$\eta_{\max} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

滑动变阻器接入电路的部分必须在流过电流 $I_0 = 2.25 \, \text{A}$ 时承担多余的电压 $E - U_0 = 1.5 \, \text{V}$:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega.$$

将蓄电池、电灯和滑动变阻器的这一段连接成一个串联回路。使用一个端部接线柱和滑动触头, 另一个端部接线柱悬空。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处, 均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3: 海岸上的射电干涉仪

一座射电天文台的无线电波探测器置于海滩上, 距海平面的高度为 $h = 2 \, \text{m}$ 。一颗辐射波长为 $\lambda = 21 \, \text{cm}$ 的电磁波的恒星升出地平线后, 探测器记录到一系列交替出现的极大值和极小值。记录到的信号与探测到的波的强度成正比。探测器接收的波, 其电场矢量沿平行于海面的方向振动。

1. 求探测器记录到极大值和极小值时, 恒星与地平线之间的夹角 (给出一般表达式)。
2. 恒星刚升出地平线后, 信号是减小还是增大?
3. 求第一个极大值与紧随其后的极小值的信号之比。电磁波在水面反射时, 反射波的电场强度 (E_r) 与入射波的电场强度 (E_i) 之比遵循下列规律:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

其中, n 为折射率, φ 为波的入射角。对于“空气—水”界面, 当 $\lambda = 21 \, \text{cm}$ 时, 折射率为 $n = 9$ 。

4. 随着恒星升高, 相邻极大值与极小值的强度之比是增大还是减小?

假设海面是平的。

答案

1. 用 α 表示恒星相对于地平线的仰角，通常的干涉条纹位置为

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

这里 $m = 0, 1, 2, \dots$ ，取值须使反正弦函数的自变量不超过 1。第一个极大值对应的仰角约为 1.50° ，紧随其后的极小值对应的仰角为 3.01° 。反射随角度变化所引起的微小修正将在下文定量给出。

2. 恒星刚升出地平线后，信号从地平线处的极小值开始增大。
3. 信号之比为

$$\frac{S_{\text{第一个极大值}}}{S_{\text{紧随其后的极小值}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. 随着恒星升高，相邻极大值信号与极小值信号之比减小。

解答

1. 将遥远的恒星视为稳定的平面波源，将平坦的海面视为相干的镜面反射面。设 α 为恒星的仰角， I_0 为仅有直达波时的强度。

计算反射路径时，可以用位于海面下深度 h 处的镜像代替位于高度 h 处的探测器。探测器与其镜像之间的距离为 $2h$ ；这段距离在指向恒星的方向上的投影给出光程差

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

探测到的电场平行于海面，并垂直于入射面。波从空气射向光密介质水并发生反射时，该电场反向，从而引入 π 的相位变化。

用 r 表示反射波与入射波电场振幅之比的正值，并定义传播引起的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

计入反射引起的相位反转，合成波的强度为

$$\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

在一个条纹的范围内，将 r 视为局部常量，则当 $\cos \delta = -1$ 时出现极大值，而当 $\cos \delta = 1$ 时出现极小值。因此

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m\lambda,$$

由此得到“答案”部分中的公式。代入数值得

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m+1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

地平线处对应 $m = 0$ ，为极小值。

为使讨论完整，题给的随角度变化的反射系数会使极值位置相对于上述由相位关系确定的位置发生微小偏移。由于入射角是相对于表面法线测量的，

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

令 $s = \sin \alpha$ ， $K = 4\pi h/\lambda$ 。则

$$r(s) = \frac{n-s}{n+s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n+s)^2}.$$

对完整的强度表达式求导，得到区间内部极值的精确条件：

$$r'(s)[r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s)\sin(Ks) = 0.$$

由相位关系确定的公式给出，第一个极大值和紧随其后的极小值分别位于 1.50419° 和 3.00941° 。保留 r 的变化后，二者分别为 1.50241° 和 3.00940° 。因此，在上文所报告的精度下，简单公式给出的两个角度均正确。

2. 在地平线处，

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

因此，直达波与反射波的电场相互抵消：

$$I(0) = 0.$$

随着恒星升高，传播引起的相位差变为非零，电场不再完全抵消。更具体地说，对于以弧度为单位的小正值 α ，

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

因此，

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2}\right)\alpha^2 + O(\alpha^3).$$

最低阶项的系数为正，因此信号最初随仰角按二次规律增大。

3. 题给的比值 E_r/E_i 是电场振幅之比。测得的信号与合成电场的平方成正比。

在第一个极大值和紧随其后的极小值处，分别有

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

这两处的反射系数不同：

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184, \\ r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

在极大值处，电场振幅相加；在极小值处，电场振幅相减。因此

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

利用

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

所求比值为

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2 \\ &= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2 \\ &\simeq 29558.9. \end{aligned}$$

因此,

$$\boxed{R \simeq 2.96 \times 10^4}.$$

采用第 1 问中的严格极值时, 该比值的相对变化小于 10^{-5} , 不影响所报告的结果。

4. 随着恒星升高, $\sin \alpha$ 增大, 反射振幅系数减小:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

相长干涉的包络线为

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

它随 r 减小而降低。相消干涉的包络线为

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

它则升高。因此, 后续极大值越来越弱, 而后续极小值越来越强, 所以极大值与极小值的信号之比减小。

解答已与官方解答核对。