

IPhO 1981

Teorik sorular ve çözümler · Varna, Bulgaristan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1981/

Soru 1: Serbest bırakılan piston ve dışarı çıkan gazla boşalan kap

Kütlesi M olan silindir biçimindeki durgun bir kap, vakum ortamına yerleştirilmiştir. Kabin bir ucu kapalıdır. Kütlesi m ve kalınlığı ihmal edilebilir olan, sabitlenmiş bir piston, kabin hacmini iki eşit kısma ayırır. Kapalı kısımda molar kütlesi M_0 ve sıcaklığı T olan n mol tek atomlu ideal gaz bulunmaktadır. Piston serbest bırakıldığında sürtünmesiz olarak hareket ederek kaptan çıkar. Ardından gaz da kaptan çıkar. Kabin son hızı nedir?

Gaz sabiti R 'dir. Piston kaptan çıkıncaya kadar gazın momentumu ihmal edilebilir. Gaz, kap ve piston arasında ısı alışverişi yoktur. Gaz kaptan çıkarken sıcaklığındaki değişim ihmal edilebilir. Dünya'nın kütle çekimini hesaba katmayın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 1** — Aşağıda açıklanan serbest moleküler çıkış yaklaşımı altında, kabin son sürati

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

olup hareket yönü **kabin kapalı ucuna doğrudur**. Soru metninde sayısal değer verilmemiştir. İkinci terim, çözümde belirtilen serbest moleküler çıkış modeli için geçerlidir.

Çözüm

Pozitif x yönünü silindir eksenini boyunca açık uca doğru seçelim.

Piston kabin içindeyken gerçekleşen genleşme.

Gazın başlangıç hacmi V_0 olsun. Piston açık uca ulaştığında gaz $2V_0$ hacmini kaplar.

Tek atomlu ideal bir gaz için

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Gazın eylemsizliğinin ihmal edilmesine karşılık gelen, basıncın her yerde aynı olduğu yarı statik yaklaşım kullanıldığında genleşme adyabatiktir:

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

Dolayısıyla

$$TV^{2/3} = \text{sabit},$$

olduğundan, piston kaptan çıktığında sıcaklık

$$T_1 = T 2^{-2/3}.$$

olur.

O anda kabın hızını $v_1 > 0$ olmak üzere $-v_1$, pistonun hızını ise $u_1 > 0$ olarak yazalım. Gazın momentumunun belirtildiği gibi ihmal edilmesiyle, momentumun korunumu

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

sonucunu verir.

Gazın iç enerjisindeki azalma, pistonun ve kabın kinetik enerjisine dönüşür:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

Yerine koyarak

$$\frac{M(M + m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

ve buradan

$$v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M + m)}(1 - 2^{-2/3})}.$$

elde edilir. Piston kaptan çıktıktan sonra üzerine başka bir kuvvet etki etmez.

Moleküllerin çıkışı sırasında geri tepme.

Bu aşamada şu moleküler idealizasyonu kullanalım: boşalma sırasında moleküller serbestçe hareket eder; silindirin yan duvarından yansımalar, hızlarının eksenel bileşenini korur; kapalı uçtan yansıma ise bu bileşenin yönünü tersine çevirir. Kabın hareketinin moleküllerin süratlerinde neden olduğu değişimler ihmal edilir.

Başlangıçta açıklığa doğru hareket eden bir molekül doğrudan dışarı çıkar. Başlangıçta kapalı uca doğru hareket eden bir molekül ise yansır ve ardından dışarı çıkar. Dolayısıyla başlangıçtaki eksenel hızı v_x ise, son eksenel hızı yaklaşık olarak $|v_x|$ olur.

Bir molekülün kütlesi μ , Boltzmann sabiti ise k_B olsun. T_1 sıcaklığında eksenel hızların başlangıçtaki Maxwell dağılımı

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

şeklinde. Başlangıçta bulunan her molekülün bir kez sayıldığı gerekli ortalama

$$\begin{aligned} \langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}. \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Gazın toplam kütlesi nM_0 'dır. Dolayısıyla son eksenel momentumu

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

olup açıklığa doğrudur.

Artık tüm sistem için momentumun korunumu

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

bağıntısını verir. $mu_1 = Mv_1$ olduğundan,

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

$T_1 = T2^{-2/3}$ yerine konulduğunda

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0 RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

elde edilir. Her iki katkı da kabı kapalı ucuna doğru hareket ettirir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Bir akümülatörden reosta üzerinden beslenen lamba

Nominal gerilimi $U_0 = 4.5 \text{ V}$ olan ve bu gerilimde çalışan, direnci $R_0 = 2 \Omega$ olan bir elektrik lambası, elektromotor kuvveti $E = 6 \text{ V}$ ve iç direnci ihmal edilebilir olan bir akümülatöre bağlanmıştır.

1. Direnci R olan bir reosta kullanılarak lamba akümülatöre potansiyometrik olarak bağlandığında lambanın nominal gerilimde çalışması sağlanmaktadır. Sistemin veriminin $\eta_0 = 0.6$ değerinden küçük olmaması için R direnci ne olmalıdır ve reostadan geçen en büyük elektrik akımı $I_{\max}$ nedir?
2. Sistemin mümkün olan en büyük verimi η nedir ve bu durumda lamba reostaya nasıl bağlanabilir?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Reostanın toplam direnci

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \, \Omega.$$

koşulunu sağlamalıdır. Belirtilen nominal çalışma koşullarında reostanın bir bölümünden geçen en büyük akım

$$I_{\max} = 2.81 \, \text{A}.$$

olur. Sınır duruma karşılık gelen düzenlemede, reostanın lambaya paralel olan bölümü $8.00 \, \Omega$, bu paralel birleşime seri olan bölümü ise $0.533 \, \Omega$ dirence sahiptir.

2. En büyük verim

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

olur. Sürgüyü ve uç bağlantılarından birini kullanarak lambayı, etkin direnci

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega,$$

olan reosta bölümüyle **seri** bağlayın; diğer uç bağlantısını boşa bırakın.

Çözüm

Kararlı doğru akımı ele alıyor, bağlantı tellerinin direncini ihmal ediyor ve lambanın nominal çalışma noktasındaki verilen direncini kullanıyoruz. Sistemin verimi, lambaya aktarılan elektriksel gücün akümülatörün sağladığı güce oranıdır:

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. Potansiyometre bağlantısı

Reostanın iki ucunu akümülatörün uçlarına, lambayı ise sürgü ile negatif uç arasına bağlayın. Reostanın iki bölümünü şöyle gösterelim:

- R_s : pozitif uç ile sürgü arasında;
- R_p : sürgü ile negatif uç arasında, lambaya paralel.

Böylece,

$$R = R_s + R_p.$$

Lamba nominal gerilimde çalışırken Ohm yasası lamba akımını şöyle verir:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \, \text{A}.$$

Reostanın paralel bölümünden geçen akım

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

olur. Kirchhoff'un akım yasasına göre, seri bölümden geçen ve aynı zamanda akümülatör akımı olan akım

$$I = I_0 + I_p.$$

olur. Dolayısıyla bu akım, reostanın iki bölümünden geçen akımlardan büyük olanıdır.

Lambanın gücü

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W}.$$

olur. Buna göre,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

Dolayısıyla izin verilen en büyük reosta akımı

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A}.$$

olur.

R_s üzerindeki gerilim $E - U_0$, R_p üzerindeki gerilim ise U_0 değerindedir. Bu nedenle

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

ve

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

$I > I_0$ için I arttıkça her iki terim de azalır. Dolayısıyla verim koşuluyla uyumlu en küçük toplam direnç, $\eta = \eta_0$ olduğu $I = I_{\text{max}}$ durumunda elde edilir.

Bu sınır noktasında,

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A},$$

dolayısıyla

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \Omega.$$

Böylece,

$$R_{\text{min}} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \Omega.$$

Sürgü, U_0 gerilimini koruyacak şekilde ayarlandığında daha büyük toplam dirençler de koşulu sağlar; bu durumda şönt kolundan daha az akım geçer ve daha yüksek verim elde edilir.

2. Mümkün olan en büyük verim

Nominal gerilimde lambadan sabit I_0 akımı geçmelidir. Pasif dirençlerden oluşan bir bağlantıda akümülatör akımı I_0 değerinden küçük olamaz; eklenen her paralel kol fazladan akım çeker. Dolayısıyla,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

Eşitlik, akümülatör yalnızca lamba akımını sağladığında elde edilir; bu da seri bağlantı gerektirir:

$$\eta_{\max} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

Reostanın etkin bölümü, üzerinden $I_0 = 2.25$ A akımı geçerken fazla gerilim olan $E - U_0 = 1.5$ V değerinde bir gerilim düşümü sağlamalıdır:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \Omega \approx 0.667 \Omega.$$

Akümülatörü, lambayı ve reostanın bu bölümünü tek bir seri devre oluşturacak şekilde bağlayın. Bir uç bağlantısını ve sürgüyü kullanın, diğer uç bağlantısını boşa bırakın.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 3: Deniz kıyısında radyo interferometresi

Bir radyoastronomi gözlemevindeki radyo dalgası dedektörü, deniz kıyısında deniz seviyesinden $h = 2$ m yükseğe yerleştirilmiştir. Dalga boyu $\lambda = 21$ cm olan elektromanyetik dalgalar yayan bir yıldız ufkun üzerine çıktıktan sonra dedektör, art arda gelen maksimum ve minimumlardan oluşan bir dizi kaydeder. Kaydedilen sinyal, algılanan dalgaların şiddetiyle orantılıdır. Dedektör, elektrik alan vektörü deniz yüzeyine paralel bir doğrultuda titreşen dalgaları algılar.

1. Dedektörün maksimum ve minimumları kaydettiği anlarda yıldız ile ufuk arasındaki açığı (genel biçimde) belirleyiniz.

2. Yıldız doğduktan hemen sonra sinyal azalır mı, artar mı?

3. İlk maksimumdaki sinyalin bir sonraki minimumdaki sinyale oranını belirleyiniz.

Elektromanyetik dalganın su yüzeyinden yansıması sırasında, yansıyan (E_r) ve gelen (E_i) dalgaların elektrik alan şiddetlerinin oranı şu yasaya uyar:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

burada n kırılma indisi, φ ise dalganın gelme açısıdır. "Hava-su" ara yüzeyi için $\lambda = 21$ cm dalga boyunda kırılma indisi $n = 9$ 'dur.

4. Yıldız yükseldikçe ardışık maksimum ve minimumların şiddetlerinin oranı artar mı, azalır mı?

Deniz yüzeyinin düz olduğunu varsayınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Yıldızın ufuk üzerindeki yükseklik açısı α ile gösterilirse, girişim saçaklarının alışılmış konumları

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

Burada $m = 0, 1, 2, \dots$ olup yalnızca ters sinüs fonksiyonlarının argümanlarının 1'i aşmadığı değerler alınır. İlk maksimum yaklaşık 1.50° 'de, onu izleyen minimum ise 3.01° 'dedir. Açıya bağlı yansımadan kaynaklanan küçük düzeltme aşağıda nicel olarak verilmektedir.

2. Yıldız doğduktan hemen sonra sinyal, ufuktaki bir minimumdan başlayarak **artar**.
3. Sinyal oranı

$$\frac{S_{\text{ilk maksimum}}}{S_{\text{sonraki minimum}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. Ardışık maksimum sinyallerin minimum sinyallere oranı, yıldız yükseldikçe **azalır**.

Çözüm

1. Uzaktaki yıldız, düzlem dalgalar yayan kararlı bir kaynak; düz denizi ise eşevreli, düzgün yansıma yapan bir yansıtıcı olarak ele alalım. Yıldızın yükseklik açısı α , yalnızca doğrudan gelen dalganın şiddeti ise I_0 olsun.

Yansıyan dalganın izlediği yol, h yüksekliğindeki dedektörün yerine h derinliğindeki ayna görüntüsü konularak hesaplanabilir. Dedektör ile görüntüsü arasındaki uzaklık $2h$ 'dir; bu uzaklığın yıldıza doğru olan doğrultudaki izdüşümü yol farkını verir:

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

Algılanan elektrik alan denize paralel ve gelme düzlemine diktir. Havadan optikçe daha yoğun olan suya geçişteki yansıma, bu elektrik alanın yönünü tersine çevirerek π kadar bir faz değişimine yol açar.

Yansıyan alan genliğinin gelen alan genliğine pozitif oranını r ile gösterelim ve yayılmadan kaynaklanan faz farkını şöyle tanımlayalım:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

Yansımadaki faz terslenmesi de hesaba katıldığında, bileşke şiddet

$$\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Bir saçak boyunca r yerel olarak sabit kabul edildiğinde, maksimumlar $\cos \delta = -1$ iken, minimumlar ise $\cos \delta = 1$ iken oluşur. Dolayısıyla

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m\lambda,$$

bağıntıları elde edilir; bunlar Cevaplar bölümündeki formülleri verir. Sayısal olarak,

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m + 1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

Ufuk, yani $m = 0$, bir minimumdur.

Eksiksiz olması için, verilen açıya bağlı yansıma katsayısının bu faz uyumu konumlarına göre küçük kaymalara yol açtığını da belirtelim. Gelme açısı yüzey normalinden ölçüldüğünden,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

$s = \sin \alpha$ ve $K = 4\pi h/\lambda$ alalım. O hâlde

$$r(s) = \frac{n-s}{n+s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n+s)^2}.$$

Şiddetin tam ifadesinin türevi alındığında, iç noktalardaki ekstremumlar için kesin koşul elde edilir:

$$r'(s) [r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s) \sin(Ks) = 0.$$

Faz uyumu formülleri, ilk maksimum ve onu izleyen minimum için 1.50419° ve 3.00941° değerlerini verir. r 'nin değişimi hesaba katıldığında ise sırasıyla 1.50241° ve 3.00940° elde edilir. Dolayısıyla basit formüller, her iki açıyı da yukarıda verilen duyarlılıkta doğru olarak verir.

2. Ufukta,

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

Bu nedenle doğrudan gelen ve yansıyan alanlar birbirini yok eder:

$$I(0) = 0.$$

Yıldız yükseldikçe, yayılmadan kaynaklanan faz farkı sıfırdan farklı hâle gelir ve alanlar artık birbirini yok etmez. Daha açık olarak, radyan cinsinden ölçülen küçük pozitif α için,

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

Bunun sonucunda,

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2} \right) \alpha^2 + O(\alpha^3).$$

Başat terimin katsayısı pozitifdir; dolayısıyla sinyal başlangıçta **yükseklik açısının karesiyle orantılı olarak artar**.

3. Verilen E_r/E_i oranı, elektrik alan genliklerinin oranıdır. Ölçülen sinyal, bileşke alanın karesiyle orantılıdır.

İlk maksimumda ve onu izleyen minimumda sırasıyla,

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

Bunların yansıma katsayıları farklıdır:

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184, \\ r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

Bir maksimumda alan genlikleri toplanırken, bir minimumda birbirinden çıkarılır. Bu nedenle

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

Şu bağıntılar kullanıldığında,

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

istenen oran şu hâli alır:

$$\begin{aligned}
R &= \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2 \\
&= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2 \\
&\simeq 29558.9.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{R \simeq 2.96 \times 10^4}.$$

1. kısımdaki kesin ekstremumlar kullanıldığında bu oran, bağıl olarak 10^{-5} 'ten daha az değişir ve verilen sonuç değişmeden kalır.

4. Yıldız yükseldikçe $\sin \alpha$ artar ve yansıma genliği azalır:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Yapıcı girişim zarfı

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

olup r azaldıkça azalır. Yıkıcı girişim zarfı ise

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

olup artar. Böylece sonraki maksimumlar zayıflarken sonraki minimumlar güçlenir; dolayısıyla maksimum sinyalin minimum sinyale oranı **azalır**.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.