

IPhO 1981

Теоретические задачи и решения · Варна, Болгария · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1981/

Задача 1: Опорожнение сосуда при освобождении поршня и истечении газа

Неподвижный сосуд массой M , имеющий цилиндрическую форму, помещён в вакуум. Один из его торцов закрыт. Закреплённый поршень массой m и пренебрежимо малой толщины разделяет объём сосуда на две равные части. В закрытой части находится n молей одноатомного идеального газа с молярной массой M_0 и температурой T . После освобождения поршень без трения выходит из сосуда. Затем из сосуда выходит и газ. Какова конечная скорость сосуда?

Газовая постоянная равна R . Импульсом газа до момента выхода поршня можно пренебречь. Теплообмен между газом, сосудом и поршнем отсутствует. Изменением температуры газа при его выходе из сосуда можно пренебречь. Притяжение Земли не учитывать.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 1** — В описанном ниже приближении свободномолекулярного истечения модуль конечной скорости сосуда равен

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

и направлена она **к его закрытому торцу**. В условии не приведены численные значения. Второе слагаемое справедливо для модели свободномолекулярного истечения, принятой в решении.

Решение

Выберем положительное направление оси x вдоль цилиндра к его открытому торцу.

Расширение, пока поршень находится внутри сосуда.

Пусть начальный объём газа равен V_0 . Когда поршень достигает открытого торца, газ занимает объём $2V_0$.

Для одноатомного идеального газа

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

В квазистатическом приближении с однородным давлением, связанном с пренебрежением инерцией газа, расширение является адиабатическим:

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

Следовательно,

$$TV^{2/3} = \text{постоянная},$$

так что температура в момент выхода поршня равна

$$T_1 = T 2^{-2/3}.$$

Обозначим скорость сосуда в этот момент через $-v_1$, где $v_1 > 0$, а скорость поршня — через $u_1 > 0$. Закон сохранения импульса с учётом предписанного условием пренебрежения импульсом газа даёт

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

Убыль внутренней энергии газа превращается в кинетическую энергию поршня и сосуда:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

Подстановка даёт

$$\frac{M(M+m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})}.$$

После выхода из сосуда на поршень больше не действуют силы.

Отдача при вылете молекул.

Для этого этапа используем следующую идеализированную молекулярную модель: при опорожнении сосуда молекулы движутся свободно; при отражениях от цилиндрической боковой стенки осевая составляющая их скорости сохраняется; отражение от закрытого торца меняет знак этой составляющей. Изменениями скоростей молекул, вызванными движением сосуда, пренебрегаем.

Молекула, первоначально движущаяся к отверстию, вылетает непосредственно. Молекула, первоначально движущаяся к закрытому торцу, отражается и затем вылетает. Таким образом, если её начальная осевая скорость равна v_x , то её конечная осевая скорость приближённо равна $|v_x|$.

Пусть μ — масса одной молекулы, а k_B — постоянная Больцмана. Начальное распределение Максвелла для осевых скоростей при температуре T_1 имеет вид

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

Искомое среднее, при вычислении которого каждая первоначально находившаяся в сосуде молекула учитывается один раз, равно

$$\begin{aligned}\langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}.\end{aligned}$$

Полная масса газа равна nM_0 . Поэтому его конечный осевой импульс равен

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

и направлен к отверстию.

Теперь закон сохранения импульса для всей системы даёт

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

Поскольку $mu_1 = Mv_1$,

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

Подставляя $T_1 = T2^{-2/3}$, получаем

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0 RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

Оба вклада сообщают сосуду скорость в направлении его закрытого торца.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Лампа, питаемая от аккумулятора через реостат

Электрическая лампа сопротивлением $R_0 = 2 \Omega$, работающая при номинальном напряжении $U_0 = 4.5 \text{ V}$, подключена к аккумулятору с электродвижущей силой $E = 6 \text{ V}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением.

- Номинальное напряжение на лампе обеспечивается её подключением к аккумулятору по потенциометрической схеме с помощью реостата сопротивлением R . Каким должно быть сопротивление R и какова максимальная сила электрического тока $I_{\max}$, протекающего через реостат, если КПД системы должен быть не меньше $\eta_0 = 0.6$?
- Каков максимально возможный КПД η системы и как в этом случае следует подключить лампу к реостату?

Ответы

1. Полное сопротивление реостата должно удовлетворять условию

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \, \Omega.$$

Максимальная сила тока в участке реостата при заданном номинальном режиме работы равна

$$I_{\max} = 2.81 \, \text{A}.$$

В предельном случае сопротивления участков реостата составляют $8.00 \, \Omega$ для участка, подключённого параллельно лампе, и $0.533 \, \Omega$ для участка, подключённого последовательно с этим параллельным соединением.

2. Максимальный КПД равен

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

Подключить лампу **последовательно** с включённым в цепь участком реостата сопротивлением

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega,$$

используя ползунок и один из крайних выводов; другой крайний вывод оставить неподключённым.

Решение

Рассмотрим установившийся постоянный ток, пренебрежём сопротивлением соединительных проводов и будем использовать заданное сопротивление лампы в её номинальном режиме работы. КПД системы — это отношение электрической мощности, потребляемой лампой, к мощности, отдаваемой аккумулятором:

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. Потенциометрическое подключение

Подключим два крайних вывода реостата к клеммам аккумулятора, а лампу — между ползунком и отрицательной клеммой. Обозначим сопротивления двух участков реостата следующим образом:

- R_s : между положительной клеммой и ползунком;
- R_p : между ползунком и отрицательной клеммой, параллельно лампе.

Таким образом,

$$R = R_s + R_p.$$

При номинальном напряжении на лампе по закону Ома сила тока через неё равна

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ A.}$$

Сила тока в параллельном участке реостата равна

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

По первому закону Кирхгофа сила тока через последовательный участок, равная также силе тока через аккумулятор, составляет

$$I = I_0 + I_p.$$

Следовательно, это большая из сил токов в двух участках реостата.

Мощность лампы равна

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W.}$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

Таким образом, наибольшая допустимая сила тока через реостат равна

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A.}$$

Напряжение на R_s равно $E - U_0$, а на $R_p - U_0$. Поэтому

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

и

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

Оба слагаемых уменьшаются с увеличением I при $I > I_0$. Поэтому наименьшее полное сопротивление, удовлетворяющее требованию к КПД, достигается при $I = I_{\text{max}}$, когда $\eta = \eta_0$.

В этом предельном случае

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A,}$$

так что

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \text{ } \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \text{ } \Omega.$$

Следовательно,

$$R_{\text{min}} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \text{ } \Omega.$$

Большие значения полного сопротивления также удовлетворяют требованию, если положение ползунка выбрано так, чтобы поддерживать напряжение U_0 ; при этом ток через шунтирующий участок меньше, а КПД выше.

2. Максимально возможный КПД

При номинальном напряжении через лампу должен протекать ток фиксированной силы I_0 . При подключении с помощью пассивных резистивных элементов сила тока через аккумулятор не может быть меньше I_0 ; любая дополнительная параллельная ветвь потребляет дополнительный ток. Поэтому

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{E I_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

Равенство достигается, когда аккумулятор обеспечивает только ток лампы, для чего необходимо последовательное соединение:

$$\eta_{\max} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

На включённом в цепь участке реостата должно падать избыточное напряжение $E - U_0 = 1.5 \text{ V}$ при протекании через него тока $I_0 = 2.25 \text{ A}$:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \Omega \approx 0.667 \Omega.$$

Соединим аккумулятор, лампу и этот участок реостата последовательно в одну замкнутую цепь. Используем один крайний вывод и ползунок, оставив другой крайний вывод неподключённым.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Радиointерферометр на морском берегу

Детектор радиоволн радиоастрономической обсерватории расположен на морском берегу на высоте $h = 2 \text{ м}$ над уровнем моря. После восхода над горизонтом звезды, излучающей электромагнитные волны с длиной волны $\lambda = 21 \text{ см}$, детектор регистрирует последовательность чередующихся максимумов и минимумов. Регистрируемый сигнал пропорционален интенсивности принимаемых волн. Детектор регистрирует волны, вектор электрического поля которых колеблется в направлении, параллельном поверхности моря.

1. Определите угол между направлением на звезду и горизонтом в моменты, когда детектор регистрирует максимумы и минимумы (в общем виде).
2. Уменьшается или увеличивается сигнал сразу после восхода звезды?
3. Определите отношение сигнала в первом максимуме к сигналу в следующем за ним минимуме. При отражении электромагнитной волны от поверхности воды отношение напряжённостей электрического поля отражённой (E_r) и падающей (E_i) волн подчиняется закону:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

где n — показатель преломления, а φ — угол падения волны. Для границы раздела «воздух — вода» при $\lambda = 21 \text{ см}$ показатель преломления $n = 9$.

4. Увеличивается или уменьшается отношение интенсивностей в последовательных максимумах и минимумах по мере подъёма звезды над горизонтом?

Считайте поверхность моря плоской.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. Обозначая через α угловую высоту звезды над горизонтом, получаем обычные положения интерференционных полос:

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$, причём допустимы только значения, при которых аргументы не превышают 1. Первый максимум наблюдается приблизительно при 1.50° , а следующий за ним минимум — при 3.01° . Ниже дана количественная оценка малой поправки, обусловленной зависимостью отражения от угла.

2. Сразу после восхода звезды сигнал **увеличивается**, начиная с минимума на горизонте.
3. Отношение сигналов равно

$$\frac{S_{\text{первый максимум}}}{S_{\text{следующий минимум}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. Отношение сигналов в последовательных максимумах к сигналам в минимумах **уменьшается** по мере подъёма звезды над горизонтом.

Решение

1. Будем считать далёкую звезду стационарным источником плоских волн, а плоскую поверхность моря — зеркальным отражателем, сохраняющим когерентность волн. Пусть α — угловая высота звезды, а I_0 — интенсивность одной лишь прямой волны.

Длину пути отражённой волны можно вычислить, заменив детектор, расположенный на высоте h , его зеркальным изображением на глубине h . Расстояние между детектором и его изображением равно $2h$; проекция этого отрезка на направление к звезде даёт разность хода

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

Электрическое поле принимаемой волны параллельно поверхности моря и перпендикулярно плоскости падения. При отражении волны, падающей из воздуха на оптически более плотную воду, направление этого электрического поля меняется на противоположное, что соответствует изменению фазы на π .

Обозначим через r положительное отношение амплитуды поля отражённой волны к амплитуде поля падающей волны и определим разность фаз, обусловленную распространением:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

С учётом изменения фазы при отражении результирующая интенсивность равна

$$\boxed{\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}.$$

Считая r локально постоянным в пределах одной интерференционной полосы, получаем, что максимумы возникают при $\cos \delta = -1$, а минимумы — при $\cos \delta = 1$. Следовательно,

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m\lambda,$$

откуда получаются формулы, приведённые в разделе «Ответы». Численно,

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m + 1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

Горизонту, $m = 0$, соответствует минимум.

Для полноты отметим, что заданная зависимость коэффициента отражения от угла вызывает небольшие смещения относительно положений, определяемых этими фазовыми условиями.

Поскольку угол падения отсчитывается от нормали к поверхности,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

Положим $s = \sin \alpha$ и $K = 4\pi h/\lambda$. Тогда

$$r(s) = \frac{n - s}{n + s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n + s)^2}.$$

Дифференцирование полного выражения для интенсивности даёт точное условие экстремумов во внутренних точках:

$$\boxed{r'(s) [r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s) \sin(Ks) = 0.}$$

Формулы, основанные на фазовых условиях, дают для первого максимума и следующего за ним минимума значения 1.50419° и 3.00941° . Учёт изменения r даёт соответственно 1.50241° и 3.00940° . Таким образом, простые формулы правильно определяют оба угла с указанной выше точностью.

2. На горизонте

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

Поэтому поля прямой и отражённой волн взаимно компенсируются:

$$I(0) = 0.$$

По мере подъёма звезды разность фаз, обусловленная распространением, становится ненулевой, и компенсация нарушается. Более явно, при малых положительных α , выраженных в радианах,

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

Следовательно,

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2} \right) \alpha^2 + O(\alpha^3).$$

Коэффициент при главном члене положителен, поэтому вначале сигнал **возрастает квадратично с угловой высотой**.

3. Заданное отношение E_r/E_i представляет собой отношение амплитуд электрического поля. Измеряемый сигнал пропорционален квадрату результирующего поля.

В первом максимуме и следующем за ним минимуме соответственно

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

Соответствующие коэффициенты отражения различны:

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184,$$

$$r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

В максимуме амплитуды полей складываются, а в минимуме — вычитаются. Поэтому

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

Используя соотношения

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

получаем искомое отношение:

$$R = \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2$$

$$= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2$$

$$\simeq 29558.9.$$

Следовательно,

$$\boxed{R \simeq 2.96 \times 10^4}.$$

Использование точных экстремумов из пункта 1 изменяет это отношение менее чем на 10^{-5} в относительных единицах, так что приведённый результат остаётся неизменным.

4. По мере подъёма звезды $\sin \alpha$ увеличивается, а амплитудный коэффициент отражения уменьшается:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Огибающая, соответствующая конструктивной интерференции, имеет вид

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

и убывает при уменьшении r . Огибающая, соответствующая деструктивной интерференции, имеет вид

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

и возрастает. Таким образом, последующие максимумы становятся слабее, а последующие минимумы — сильнее, поэтому отношение сигнала в максимуме к сигналу в минимуме **уменьшается**.

Решение проверено по официальному решению.