

IPhO 1981

Problemas teóricos y soluciones · Varna, Bulgaria · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1981/

Problema 1: Recipiente vaciado por la liberación de un pistón y el escape del gas

Un recipiente de masa M y forma cilíndrica se encuentra en reposo en el vacío. Uno de sus extremos está cerrado. Un pistón inmovilizado de masa m y espesor despreciable divide el volumen del recipiente en dos partes iguales. La parte cerrada contiene n moles de gas ideal monoatómico de masa molar M_0 y temperatura T . Tras liberar el pistón, este sale del recipiente sin rozamiento. Después, el gas también sale del recipiente. ¿Cuál es la velocidad final del recipiente?

La constante de los gases es R . Puede despreciarse la cantidad de movimiento del gas hasta que el pistón sale del recipiente. No hay intercambio de calor entre el gas, el recipiente y el pistón. Puede despreciarse el cambio de temperatura del gas al salir del recipiente. No se tenga en cuenta la gravedad terrestre.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 1** — Con la aproximación de escape molecular libre descrita a continuación, la rapidez final del recipiente es

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

y su movimiento se dirige **hacia su extremo cerrado**. El enunciado no proporciona valores numéricos. El segundo término es válido para el modelo de escape molecular libre planteado en la solución.

Solución

Tomemos el sentido positivo del eje x a lo largo del cilindro hacia su extremo abierto.

Expansión mientras el pistón permanece en el interior.

Sea V_0 el volumen inicial del gas. Cuando el pistón alcanza el extremo abierto, el gas ocupa $2V_0$.

Para un gas ideal monoatómico,

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Utilizando la aproximación cuasiestática de presión uniforme asociada a despreciar la inercia del gas, la expansión es adiabática:

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

Por consiguiente,

$$TV^{2/3} = \text{constante},$$

de modo que la temperatura cuando sale el pistón es

$$\boxed{T_1 = T 2^{-2/3}}.$$

Escribamos la velocidad del recipiente en ese instante como $-v_1$, con $v_1 > 0$, y la velocidad del pistón como $u_1 > 0$. La conservación de la cantidad de movimiento, despreciando la del gas según lo estipulado, da

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

La disminución de la energía interna del gas se transforma en energía cinética del pistón y del recipiente:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

Al sustituir, se obtiene

$$\frac{M(M+m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

por lo que

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})}}.$$

Después de salir, el pistón no experimenta ninguna fuerza adicional.

Retroceso durante el escape molecular.

Para esta etapa, utilizamos la siguiente idealización molecular: las moléculas se mueven libremente durante el vaciado; las reflexiones en la pared lateral cilíndrica conservan la componente axial de su velocidad; la reflexión en el extremo cerrado invierte esa componente. Se desprecian los cambios en las rapidezces moleculares causados por el movimiento del recipiente.

Una molécula que inicialmente se mueve hacia la abertura escapa directamente. Una molécula que inicialmente se mueve hacia el extremo cerrado se refleja y luego escapa. Por tanto, si su velocidad axial inicial es v_x , su velocidad axial final es aproximadamente $|v_x|$.

Sea μ la masa de una molécula y k_B la constante de Boltzmann. La distribución inicial de Maxwell de las velocidades axiales a la temperatura T_1 es

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

El valor medio requerido, contando una sola vez cada molécula presente inicialmente, es

$$\begin{aligned}\langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}.\end{aligned}$$

El gas tiene una masa total de nM_0 . Por tanto, su cantidad de movimiento axial final es

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

dirigida hacia la abertura.

La conservación de la cantidad de movimiento del sistema completo da ahora

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

Puesto que $mu_1 = Mv_1$,

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

Al introducir $T_1 = T2^{-2/3}$, se obtiene

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0 RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

Ambas contribuciones impulsan el recipiente hacia su extremo cerrado.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Lámpara alimentada por un acumulador a través de un reóstato

Una lámpara eléctrica de resistencia $R_0 = 2 \, \Omega$, que funciona a una tensión nominal $U_0 = 4.5 \, \text{V}$, está conectada a un acumulador de fuerza electromotriz $E = 6 \, \text{V}$ y resistencia interna despreciable.

1. La tensión nominal de la lámpara se garantiza conectándola al acumulador mediante un reóstato de resistencia R en una conexión potenciométrica. ¿Cuál debe ser la resistencia R y cuál es la corriente eléctrica máxima $I_{\max}$ que circula por el reóstato, si el rendimiento del sistema no debe ser inferior a $\eta_0 = 0.6$?
2. ¿Cuál es el máximo rendimiento posible η del sistema y cómo puede conectarse la lámpara al reóstato en este caso?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. La resistencia total del reóstato debe satisfacer

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \, \Omega.$$

La corriente máxima en un tramo del reóstato en las condiciones de funcionamiento nominal especificadas es

$$I_{\max} = 2.81 \, \text{A}.$$

En el diseño límite, los tramos del reóstato tienen resistencias de $8.00 \, \Omega$ en paralelo con la lámpara y de $0.533 \, \Omega$ en serie con esa combinación en paralelo.

2. El rendimiento máximo es

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

Conecte la lámpara **en serie** con una resistencia activa del reóstato de

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega,$$

utilizando el cursor y uno de los terminales de los extremos; deje el otro terminal sin conectar.

Solución

Consideramos una corriente continua estacionaria, despreciamos la resistencia de los cables de conexión y utilizamos la resistencia de la lámpara dada para su punto de funcionamiento nominal. El rendimiento del sistema es la potencia eléctrica entregada a la lámpara dividida por la potencia suministrada por el acumulador:

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. Conexión potenciométrica

Conecte los dos extremos del reóstato a los bornes del acumulador y conecte la lámpara entre el cursor y el borne negativo. Denotamos los dos tramos del reóstato por:

- R_s : entre el borne positivo y el cursor;
- R_p : entre el cursor y el borne negativo, en paralelo con la lámpara.

Por tanto,

$$R = R_s + R_p.$$

A la tensión nominal de la lámpara, la ley de Ohm proporciona la corriente que circula por ella:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \, \text{A}.$$

La corriente en el tramo del reóstato en paralelo es

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

Según la ley de corrientes de Kirchhoff, la corriente que circula por el tramo en serie, que es también la corriente del acumulador, es

$$I = I_0 + I_p.$$

Por tanto, es la mayor de las corrientes que circulan por los dos tramos del reóstato.

La potencia de la lámpara es

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W}.$$

En consecuencia,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

La corriente máxima permitida en el reóstato es, por tanto,

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A}.$$

La tensión entre los extremos de R_s es $E - U_0$, mientras que la tensión entre los extremos de R_p es U_0 . Así pues,

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

y

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

Ambos términos disminuyen al aumentar I para $I > I_0$. Por tanto, la menor resistencia total compatible con el requisito de rendimiento se obtiene para $I = I_{\text{max}}$, cuando $\eta = \eta_0$.

En este punto límite,

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A},$$

de modo que

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \Omega.$$

Por tanto,

$$R_{\text{min}} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \Omega.$$

Las resistencias totales mayores también satisfacen el requisito cuando se ajusta el cursor para mantener U_0 ; hacen que circule menos corriente por la derivación y proporcionan un mayor rendimiento.

2. Máximo rendimiento posible

A la tensión nominal, la lámpara debe recibir la corriente fija I_0 . Con una conexión resistiva pasiva, la corriente del acumulador no puede ser inferior a I_0 ; cualquier rama adicional en paralelo consume corriente adicional. Por tanto,

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

La igualdad se alcanza cuando el acumulador suministra únicamente la corriente de la lámpara, lo que requiere una conexión en serie:

$$\eta_{\text{max}} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

El tramo activo del reóstato debe producir una caída de tensión igual al exceso de tensión $E - U_0 = 1.5 \text{ V}$ mientras circula por él $I_0 = 2.25 \text{ A}$:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \Omega \approx 0.667 \Omega.$$

Conecte el acumulador, la lámpara y este tramo del reóstato en un único circuito en serie. Utilice uno de los terminales de los extremos y el cursor, dejando el otro terminal sin conectar.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Radiointerferómetro en la orilla del mar

Un detector de ondas de radio de un observatorio radioastronómico está situado en una playa a una altura de $h = 2 \text{ m}$ sobre el nivel del mar. Tras la aparición sobre el horizonte de una estrella que emite ondas electromagnéticas de longitud de onda $\lambda = 21 \text{ cm}$, el detector registra una serie de máximos y mínimos alternos. La señal registrada es proporcional a la intensidad de las ondas detectadas. El detector registra ondas cuyo vector eléctrico oscila en una dirección paralela a la superficie del mar.

1. Determine el ángulo entre la estrella y el horizonte en el momento en que el detector registra máximos y mínimos (en forma general).
2. ¿Disminuye o aumenta la señal inmediatamente después de la aparición de la estrella sobre el horizonte?
3. Determine el cociente entre la señal del primer máximo y la del mínimo siguiente. Cuando la onda electromagnética se refleja en la superficie del agua, el cociente entre las intensidades del campo eléctrico de la onda reflejada (E_r) y de la onda incidente (E_i) obedece a la ley:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

donde n es el índice de refracción y φ es el ángulo de incidencia de la onda. Para la interfaz «aire-agua», con $\lambda = 21 \text{ cm}$, el índice de refracción es $n = 9$.

4. ¿Aumenta o disminuye el cociente entre las intensidades de máximos y mínimos consecutivos a medida que asciende la estrella?

Suponga que la superficie del mar es plana.

Respuestas

1. Si se denota por α la elevación de la estrella sobre el horizonte, las posiciones habituales de las franjas de interferencia son

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

Aquí $m = 0, 1, 2, \dots$, restringido a los valores para los que los argumentos no superan 1. El primer máximo se encuentra aproximadamente a 1.50° , y el mínimo siguiente, a 3.01° . La pequeña corrección debida a la dependencia angular de la reflexión se cuantifica más adelante.

2. La señal **aumenta** inmediatamente después de que la estrella aparezca sobre el horizonte, partiendo de un mínimo en el horizonte.
3. El cociente entre las señales es

$$\frac{S_{\text{primer máximo}}}{S_{\text{mínimo siguiente}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. El cociente entre las señales de máximos y mínimos sucesivos **disminuye** a medida que asciende la estrella.

Solución

1. Consideremos la estrella distante como una fuente constante de ondas planas y el mar plano como un reflector especular coherente. Sean α la elevación de la estrella e I_0 la intensidad de la onda directa por sí sola.

La trayectoria reflejada puede calcularse sustituyendo el detector, situado a una altura h , por su imagen especular a una profundidad h . La separación entre el detector y su imagen es $2h$; su proyección sobre la dirección hacia la estrella da la diferencia de caminos

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

El campo eléctrico detectado es paralelo al mar y perpendicular al plano de incidencia. La reflexión desde el aire hacia el agua, ópticamente más densa, invierte este campo eléctrico e introduce un cambio de fase de π .

Sea r el cociente positivo entre las amplitudes de los campos reflejado e incidente, y definamos la diferencia de fase debida a la propagación

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

Incluyendo la inversión de fase por reflexión, la intensidad resultante es

$$\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Si se considera r localmente constante a lo largo de una franja, los máximos se producen cuando $\cos \delta = -1$, mientras que los mínimos se producen cuando $\cos \delta = 1$. Por tanto,

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m \lambda,$$

lo que da las fórmulas de la sección Respuestas. Numéricamente,

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m + 1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

El horizonte, $m = 0$, es un mínimo.

Para completar el análisis, el coeficiente de reflexión proporcionado, que depende del ángulo, provoca pequeños desplazamientos respecto a estas posiciones de alineación de fases. Puesto que el ángulo de incidencia se mide desde la normal a la superficie,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

Definamos $s = \sin \alpha$ y $K = 4\pi h / \lambda$. Entonces

$$r(s) = \frac{n - s}{n + s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n + s)^2}.$$

Al derivar la expresión completa de la intensidad se obtiene la condición exacta para los extremos interiores:

$$r'(s)[r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s) \sin(Ks) = 0.$$

Las fórmulas de alineación de fases dan 1.50419° y 3.00941° para el primer máximo y el mínimo siguiente. Si se tiene en cuenta la variación de r , se obtienen 1.50241° y 3.00940° , respectivamente. Por tanto, las fórmulas sencillas dan ambos ángulos correctamente con la precisión indicada anteriormente.

2. En el horizonte,

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

Por consiguiente, los campos directo y reflejado se anulan entre sí:

$$I(0) = 0.$$

A medida que asciende la estrella, la diferencia de fase debida a la propagación deja de ser nula y los campos dejan de cancelarse. Más explícitamente, para valores positivos pequeños de α , medidos en radianes,

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

En consecuencia,

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2}\right) \alpha^2 + O(\alpha^3).$$

El coeficiente del término dominante es positivo, de modo que la señal inicialmente **aumenta cuadráticamente con la elevación**.

3. El cociente dado E_r/E_i es un cociente entre amplitudes del campo eléctrico. La señal medida es proporcional al cuadrado del campo resultante.

En el primer máximo y en el mínimo siguiente, respectivamente,

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

Sus coeficientes de reflexión son distintos:

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184,$$

$$r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

En un máximo, las amplitudes de los campos se suman, mientras que en un mínimo se restan. Por tanto,

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

Utilizando

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

el cociente solicitado queda

$$R = \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2$$

$$= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2$$

$$\simeq 29558.9.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{R \simeq 2.96 \times 10^4}.$$

El uso de los extremos estrictos del apartado 1 modifica este cociente en menos de 10^{-5} en términos relativos, por lo que el resultado indicado no cambia.

4. A medida que asciende la estrella, $\sin \alpha$ aumenta y la amplitud de reflexión disminuye:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

La envolvente de interferencia constructiva es

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

que disminuye a medida que disminuye r . La envolvente de interferencia destructiva es

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

que aumenta. Así, los máximos posteriores se debilitan mientras que los mínimos posteriores se intensifican, de modo que el cociente entre la señal máxima y la mínima **disminuye**.

La solución se comprobó con la solución oficial.