

IPhO 1981

Theorieaufgaben und Lösungen · Warna, Bulgarien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/1981/

Aufgabe 1: Entleerung eines Behälters durch einen freigegebenen Kolben und ausströmendes Gas

Ein ruhender zylindrischer Behälter der Masse M befindet sich im Vakuum. Eines seiner Enden ist geschlossen. Ein festgehaltener Kolben der Masse m und vernachlässigbarer Dicke teilt das Volumen des Behälters in zwei gleiche Teile. Der geschlossene Teil enthält n Mol eines einatomigen idealen Gases mit der molaren Masse M_0 und der Temperatur T . Nach seiner Freigabe verlässt der Kolben den Behälter reibungsfrei. Danach verlässt auch das Gas den Behälter. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Behälters?

Die Gaskonstante ist R . Der Impuls des Gases kann bis zum Austritt des Kolbens vernachlässigt werden. Zwischen dem Gas, dem Behälter und dem Kolben findet kein Wärmeaustausch statt. Die Temperaturänderung des Gases beim Verlassen des Behälters kann vernachlässigt werden. Die Erdgravitation ist nicht zu berücksichtigen.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 1** — Unter der unten beschriebenen Näherung eines freien molekularen Ausströmens beträgt die Endgeschwindigkeit des Behälters

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

und ist **zu seinem geschlossenen Ende hin** gerichtet. Die Aufgabenstellung enthält keine Zahlenwerte. Der zweite Term gilt für das in der Lösung angegebene Modell des freien molekularen Ausströmens.

Lösung

Die positive x -Richtung verlaufe entlang des Zylinders zu seinem offenen Ende hin.

Expansion, solange sich der Kolben im Behälter befindet.

Das anfängliche Gasvolumen sei V_0 . Wenn der Kolben das offene Ende erreicht, nimmt das Gas das Volumen $2V_0$ ein.

Für ein einatomiges ideales Gas gilt

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

In der quasistatischen Näherung mit räumlich einheitlichem Druck, die mit der Vernachlässigung der Trägheit des Gases verbunden ist, verläuft die Expansion adiabatisch:

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

Folglich gilt

$$TV^{2/3} = \text{konstant},$$

sodass die Temperatur beim Austritt des Kolbens

$$T_1 = T 2^{-2/3}$$

beträgt.

Die Geschwindigkeit des Behälters zu diesem Zeitpunkt sei $-v_1$ mit $v_1 > 0$, die Geschwindigkeit des Kolbens sei $u_1 > 0$. Die Impulserhaltung ergibt unter der vorgegebenen Vernachlässigung des Gasimpulses

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

Die Abnahme der inneren Energie des Gases wird in kinetische Energie des Kolbens und des Behälters umgewandelt:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

Einsetzen liefert

$$\frac{M(M+m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

also

$$v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})}.$$

Nach dem Austritt wirkt keine weitere Kraft auf den Kolben.

Rückstoß beim molekularen Ausströmen.

Für diese Phase wird folgende molekulare Idealisierung verwendet: Die Moleküle bewegen sich während der Entleerung frei; bei Reflexionen an der zylindrischen Seitenwand bleibt ihre axiale Geschwindigkeitskomponente erhalten; bei einer Reflexion am geschlossenen Ende kehrt sich diese Komponente um. Änderungen der Molekülgeschwindigkeiten infolge der Bewegung des Behälters werden vernachlässigt.

Ein Molekül, das sich anfangs zur Öffnung hin bewegt, tritt direkt aus. Ein Molekül, das sich anfangs zum geschlossenen Ende hin bewegt, wird reflektiert und tritt anschließend aus. Ist seine anfängliche axiale Geschwindigkeit also v_x , so beträgt seine axiale Endgeschwindigkeit näherungsweise $|v_x|$.

Es sei μ die Masse eines Moleküls und k_B die Boltzmann-Konstante. Die anfängliche Maxwell-Verteilung der axialen Geschwindigkeiten bei der Temperatur T_1 lautet

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

Der benötigte Mittelwert, bei dem jedes anfangs vorhandene Molekül einmal gezählt wird, ist

$$\begin{aligned}\langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}.\end{aligned}$$

Das Gas hat die Gesamtmasse nM_0 . Sein axialer Endimpuls beträgt daher

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

und ist zur Öffnung hin gerichtet.

Die Impulserhaltung für das Gesamtsystem ergibt nun

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

Da $mu_1 = Mv_1$, gilt

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

Einsetzen von $T_1 = T2^{-2/3}$ ergibt

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0 RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

Beide Beiträge treiben den Behälter zu seinem geschlossenen Ende hin an.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Über einen Schiebewiderstand aus einem Akkumulator gespeiste Lampe

Eine elektrische Lampe mit dem Widerstand $R_0 = 2 \Omega$, die bei der Nennspannung $U_0 = 4.5 \text{ V}$ betrieben wird, ist an einen Akkumulator mit der elektromotorischen Kraft $E = 6 \text{ V}$ und vernachlässigbarem Innenwiderstand angeschlossen.

1. Die Nennspannung der Lampe wird dadurch sichergestellt, dass die Lampe mithilfe eines Schiebewiderstands mit dem Widerstand R in einer Potentiometerschaltung an den Akkumulator angeschlossen wird. Wie groß muss der Widerstand R sein, und wie groß ist der maximale elektrische Strom $I_{\max}$, der im Schiebewiderstand fließt, wenn der Wirkungsgrad des Systems nicht kleiner als $\eta_0 = 0.6$ sein darf?

2. Wie groß ist der maximal mögliche Wirkungsgrad η des Systems, und wie kann die Lampe in diesem Fall an den Schiebewiderstand angeschlossen werden?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Für den Gesamtwiderstand des Schiebewiderstands muss gelten:

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \, \Omega.$$

Der maximale Strom in einem Abschnitt des Schiebewiderstands bei dem vorgegebenen Nennbetrieb beträgt

$$I_{\max} = 2.81 \, \text{A}.$$

Bei der Grenzauslegung betragen die Widerstände der Abschnitte des Schiebewiderstands $8.00 \, \Omega$ parallel zur Lampe und $0.533 \, \Omega$ in Reihe mit dieser Parallelschaltung.

2. Der maximale Wirkungsgrad beträgt

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

Die Lampe wird **in Reihe** mit einem wirksamen Widerstand des Schiebewiderstands von

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega,$$

angeschlossen, wobei der Schleifer und eine Endklemme verwendet werden; die andere Endklemme bleibt unbeschaltet.

Lösung

Wir betrachten einen stationären Gleichstrom, vernachlässigen den Widerstand der Verbindungsleitungen und verwenden den angegebenen Lampenwiderstand am Nennbetriebspunkt. Der Wirkungsgrad des Systems ist die der Lampe zugeführte elektrische Leistung geteilt durch die vom Akkumulator abgegebene Leistung:

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. Potentiometerschaltung

Die beiden Enden des Schiebewiderstands werden an die Pole des Akkumulators angeschlossen, und die Lampe wird zwischen den Schleifer und den Minuspol geschaltet. Die beiden Abschnitte des Schiebewiderstands werden wie folgt bezeichnet:

- R_s : zwischen dem Pluspol und dem Schleifer;
- R_p : zwischen dem Schleifer und dem Minuspol, parallel zur Lampe.

Damit gilt

$$R = R_s + R_p.$$

Bei der Nennspannung der Lampe ergibt sich nach dem ohmschen Gesetz der Lampenstrom

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ A.}$$

Der Strom im parallel geschalteten Abschnitt des Schiebewiderstands beträgt

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

Nach der kirchhoffschen Knotenregel beträgt der Strom durch den in Reihe geschalteten Abschnitt, der zugleich der Akkumulatorstrom ist,

$$I = I_0 + I_p.$$

Er ist somit der größere der Ströme in den beiden Abschnitten des Schiebewiderstands.

Die Lampenleistung beträgt

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W.}$$

Folglich gilt

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

Der größte zulässige Strom im Schiebewiderstand beträgt daher

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A.}$$

Die Spannung an R_s beträgt $E - U_0$, während die Spannung an R_p gleich U_0 ist. Daher gilt

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

und

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

Beide Terme nehmen für $I > I_0$ mit wachsendem I ab. Somit wird der kleinste Gesamtwiderstand, der mit der Wirkungsgradanforderung vereinbar ist, bei $I = I_{\text{max}}$ erreicht, wobei $\eta = \eta_0$ gilt.

An diesem Grenzpunkt gilt

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A,}$$

also

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \text{ } \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \text{ } \Omega.$$

Daher gilt

$$R_{\text{min}} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \text{ } \Omega.$$

Größere Gesamtwiderstände erfüllen die Anforderung ebenfalls, wenn der Schleifer so eingestellt wird, dass U_0 aufrechterhalten wird; dabei fließt ein kleinerer Strom durch den Parallelzweig, und der Wirkungsgrad ist höher.

2. Maximal möglicher Wirkungsgrad

Bei Nennspannung muss durch die Lampe der fest vorgegebene Strom I_0 fließen. Bei einer passiven Widerstandsschaltung kann der Akkumulatorstrom nicht kleiner als I_0 sein; jeder zusätzliche Parallelzweig nimmt zusätzlichen Strom auf. Daher gilt

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

Gleichheit wird erreicht, wenn der Akkumulator nur den Lampenstrom liefert, wofür eine Reihenschaltung erforderlich ist:

$$\eta_{\text{max}} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

Am wirksamen Abschnitt des Schiebewiderstands muss die überschüssige Spannung $E - U_0 = 1.5 \text{ V}$ abfallen, während durch ihn der Strom $I_0 = 2.25 \text{ A}$ fließt:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \Omega \approx 0.667 \Omega.$$

Der Akkumulator, die Lampe und dieser Abschnitt des Schiebewiderstands werden in einem einzigen Stromkreis in Reihe geschaltet. Dabei werden eine Endklemme und der Schleifer verwendet; die andere Endklemme bleibt unbeschaltet.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Radiointerferometer am Meeresufer

Ein Detektor für Radiowellen in einem radioastronomischen Observatorium befindet sich am Meeresstrand in einer Höhe von $h = 2 \text{ m}$ über dem Meeresspiegel. Nachdem ein Stern, der elektromagnetische Wellen der Wellenlänge $\lambda = 21 \text{ cm}$ aussendet, über dem Horizont aufgegangen ist, registriert der Detektor eine Folge abwechselnder Maxima und Minima. Das registrierte Signal ist proportional zur Intensität der empfangenen Wellen. Der Detektor registriert Wellen, deren elektrischer Feldvektor parallel zur Meeresoberfläche schwingt.

1. Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Stern und dem Horizont zu den Zeitpunkten, zu denen der Detektor Maxima und Minima registriert (in allgemeiner Form).
2. Nimmt das Signal unmittelbar nach dem Aufgang des Sterns ab oder zu?
3. Bestimmen Sie das Verhältnis des Signals beim ersten Maximum zum Signal beim darauffolgenden Minimum. Bei der Reflexion der elektromagnetischen Welle an der Wasseroberfläche folgt das Verhältnis der elektrischen Feldstärken der reflektierten (E_r) und der einfallenden (E_i) Welle dem Gesetz:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

wobei n der Brechungsindex und φ der Einfallswinkel der Welle ist. Für die Grenzfläche „Luft–Wasser“ beträgt der Brechungsindex bei $\lambda = 21 \text{ cm}$ $n = 9$.

4. Nimmt das Verhältnis der Intensitäten aufeinanderfolgender Maxima und Minima mit zunehmender Höhe des Sterns zu oder ab?

Nehmen Sie an, dass die Meeresoberfläche eben ist.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Bezeichnet α die Höhe des Sterns über dem Horizont, so lauten die üblichen Winkelpositionen der Interferenzmaxima und -minima

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

Dabei gilt $m = 0, 1, 2, \dots$, beschränkt auf Werte, für die die Argumente nicht größer als 1 sind. Das erste Maximum liegt bei ungefähr 1.50° , das darauffolgende Minimum bei 3.01° . Die kleine Korrektur aufgrund der winkelabhängigen Reflexion wird weiter unten quantifiziert.

2. Das Signal **nimmt zu**, unmittelbar nachdem der Stern aufgegangen ist, ausgehend von einem Minimum am Horizont.
3. Das Signalverhältnis beträgt

$$\frac{S_{\text{erstes Maximum}}}{S_{\text{nächstes Minimum}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. Das Verhältnis aufeinanderfolgender Maximalsignale zu Minimalsignalen **nimmt ab**, während der Stern höher steigt.

Lösung

1. Wir betrachten den weit entfernten Stern als zeitlich konstante Quelle ebener Wellen und das ebene Meer als kohärenten, spiegelnd reflektierenden Reflektor. Es sei α die Höhe des Sterns und I_0 die Intensität der direkten Welle allein.

Der reflektierte Strahlengang lässt sich berechnen, indem man den Detektor in der Höhe h durch sein Spiegelbild in der Tiefe h ersetzt. Der Abstand zwischen Detektor und Spiegelbild beträgt $2h$; seine Projektion auf die Richtung zum Stern ergibt den Gangunterschied

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

Das empfangene elektrische Feld ist parallel zum Meer und senkrecht zur Einfallsebene. Bei der Reflexion aus der Luft am optisch dichteren Wasser kehrt sich dieses elektrische Feld um, wodurch ein Phasensprung von π entsteht.

Es bezeichne r das positive Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Feldamplitude. Wir definieren die durch die Ausbreitung bedingte Phasendifferenz als

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

Unter Berücksichtigung des Phasensprungs bei der Reflexion ergibt sich die resultierende Intensität zu

$$\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

Betrachtet man r innerhalb eines Interferenzstreifens als lokal konstant, so treten Maxima bei $\cos \delta = -1$ und Minima bei $\cos \delta = 1$ auf. Somit gilt

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m \lambda,$$

woraus sich die Formeln im Abschnitt Antworten ergeben. Numerisch gilt

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m + 1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

Am Horizont, $m = 0$, liegt ein Minimum.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass der angegebene winkelabhängige Reflexionskoeffizient kleine Verschiebungen gegenüber diesen durch die Phasenbedingungen bestimmten Positionen verursacht. Da der Einfallswinkel gegenüber der Flächennormalen gemessen wird, gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

Wir setzen $s = \sin \alpha$ und $K = 4\pi h / \lambda$. Dann gilt

$$r(s) = \frac{n - s}{n + s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n + s)^2}.$$

Die Ableitung des vollständigen Intensitätsausdrucks liefert die exakte Bedingung für Extrema im Inneren des Definitionsbereichs:

$$r'(s) [r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s) \sin(Ks) = 0.$$

Die aus den Phasenbedingungen gewonnenen Formeln ergeben 1.50419° und 3.00941° für das erste Maximum beziehungsweise das darauffolgende Minimum. Berücksichtigt man die Änderung von r , erhält man 1.50241° beziehungsweise 3.00940° . Die einfachen Formeln liefern somit beide Winkel mit der oben angegebenen Genauigkeit korrekt.

2. Am Horizont gilt

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

Das direkte und das reflektierte Feld löschen sich daher aus:

$$I(0) = 0.$$

Wenn der Stern höher steigt, wird die durch die Ausbreitung bedingte Phasendifferenz ungleich null, und die Auslöschung ist nicht mehr vollständig. Genauer gilt für kleine positive α , im Bogenmaß gemessen,

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

Folglich ist

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2} \right) \alpha^2 + O(\alpha^3).$$

Der Koeffizient des führenden Terms ist positiv, sodass das Signal anfangs **quadratisch mit der Höhe über dem Horizont zunimmt**.

3. Das angegebene Verhältnis E_r/E_i ist ein Verhältnis elektrischer Feldamplituden. Das gemessene Signal ist proportional zum Quadrat des resultierenden Feldes.

Beim ersten Maximum beziehungsweise beim darauffolgenden Minimum gilt

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

Die zugehörigen Reflexionskoeffizienten sind verschieden:

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184,$$

$$r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

Bei einem Maximum addieren sich die Feldamplituden, während sie bei einem Minimum voneinander subtrahiert werden. Daher gilt

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

Mit

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

ergibt sich das gesuchte Verhältnis zu

$$R = \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2$$

$$= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2$$

$$\simeq 29558.9.$$

Somit gilt

$$\boxed{R \simeq 2.96 \times 10^4}.$$

Verwendet man die exakten Extrema aus Teil 1, so ändert sich dieses Verhältnis relativ um weniger als 10^{-5} ; das angegebene Ergebnis bleibt daher unverändert.

4. Wenn der Stern höher steigt, nimmt $\sin \alpha$ zu und die Reflexionsamplitude ab:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Einhüllende für konstruktive Interferenz lautet

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

und nimmt mit abnehmendem r ab. Die Einhüllende für destruktive Interferenz lautet

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

und nimmt zu. Spätere Maxima werden somit schwächer, während spätere Minima stärker werden, sodass das Verhältnis des Maximalsignals zum Minimalsignal **abnimmt**.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.