

IPhO 1981

المسائل النظرية والحلول · فارنا، بلغاريا · 3 مسائل نظرية مع حلول كاملة

eulersolve.org/iphO/1981/

المسألة 1: إفراغ وعاء بتحرير مكبس وخروج الغاز

يوضع وعاء ساكن كتلته M وشكله أسطواناني في الفراغ. أحد طرفيه مغلق. يقسم مكبس مثبت كتلته m وسُمكه مهمل حجم الوعاء إلى جزأين متساويين. يحتوي الجزء المغلق على n مول من غاز مثالي أحادي الذرة، كتلته المولية M_0 ودرجة حرارته T . بعد تحرير المكبس، يخرج من الوعاء دون احتكاك. وبعد ذلك يخرج الغاز أيضاً من الوعاء. ما السرعة النهائية للوعاء؟

ثابت الغازات هو R . يمكن إهمال كمية حركة الغاز حتى خروج المكبس. لا يحدث تبادل حراري بين الغاز والوعاء والمكبس. ويمكن إهمال تغير درجة حرارة الغاز عند خروجه من الوعاء. أهمل جاذبية الأرض.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 1 — وفق تقريب الخروج الجزيئي الحر الموضح أدناه، يكون مقدار السرعة النهائية للوعاء

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}$$

ويكون اتجاهها نحو طرفه المغلق. لا يتضمن نص المسألة أي قيم عددية. ويصحّ الحد الثاني في إطار نموذج الخروج الجزيئي الحر المبين في الحل.

الحل

نختار الاتجاه الموجب لمحور x على امتداد الأسطوانة نحو طرفها المفتوح.

التمدد ما دام المكبس داخل الوعاء.

ليكن حجم الغاز الابتدائي V_0 . عندما يصل المكبس إلى الطرف المفتوح، يشغل الغاز حجماً مقداره $2V_0$.

بالنسبة إلى غاز مثالي أحادي الذرة،

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

باستخدام تقريب الضغط المنتظم والعملية شبه الساكنة المرتبط بإهمال قصور الغاز الذاتي، يكون التمدد كظومياً:

$$nC_V dT = -p dV = -\frac{nRT}{V} dV.$$

ومن ثم،

$$TV^{2/3} = \text{ثابت},$$

فتكون درجة الحرارة عند خروج المكبس

$$T_1 = T 2^{-2/3}.$$

نكتب سرعة الوعاء في تلك اللحظة على الصورة $-v_1$ ، حيث $v_1 > 0$ ، وسرعة المكبس على الصورة $u_1 > 0$. يعطي انحفاظ كمية الحركة، مع إهمال كمية حركة الغاز وفقاً لما ينص عليه السؤال،

$$-Mv_1 + mu_1 = 0, \quad u_1 = \frac{M}{m}v_1.$$

يتحول النقص في الطاقة الداخلية للغاز إلى طاقة حركية للمكبس والوعاء:

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 = \frac{3}{2}nR(T - T_1).$$

بالتعويض نحصل على

$$\frac{M(M+m)}{2m}v_1^2 = \frac{3}{2}nRT(1 - 2^{-2/3}),$$

ومن ثم

$$v_1 = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})}.$$

بعد خروج المكبس، لا تؤثر فيه أي قوة أخرى.

الارتداد أثناء خروج الجزيئات.

نستخدم في هذه المرحلة النموذج الجزيئي المثالي الآتي: تتحرك الجزيئات بحرية أثناء إفراغ الوعاء؛ وتحافظ انعكاساتها عن الجدار الجانبي الأسطواني على المركبة المحورية لسرعتها؛ أما انعكاسها عن الطرف المغلق فيعكس اتجاه تلك المركبة. ونهمل التغيرات في مقادير سرعات الجزيئات الناجمة عن حركة الوعاء.

يخرج مباشرة كل جزيء يتحرك في البداية نحو الفتحة. أما الجزيء الذي يتحرك في البداية نحو الطرف المغلق فينعكس ثم يخرج. وهكذا، إذا كانت سرعته المحورية الابتدائية v_x ، فإن سرعته المحورية النهائية تساوي تقريباً $|v_x|$.

لتكن μ كتلة الجزيء الواحد، و k_B ثابت بولتزمان. يكون توزيع ماكسويل الابتدائي للسرعات المحورية عند درجة الحرارة T_1 هو

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi k_B T_1}} \exp\left(-\frac{\mu v_x^2}{2k_B T_1}\right).$$

والمتوسط المطلوب، باحتساب كل جزيء موجود في البداية مرة واحدة، هو

$$\begin{aligned} \langle |v_x| \rangle &= 2 \int_0^\infty v_x f(v_x) dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2k_B T_1}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{2RT_1}{\pi M_0}}. \end{aligned}$$

تبلغ الكتلة الكلية للغاز nM_0 . لذلك تكون حركته المحورية النهائية

$$P_g = nM_0 \langle |v_x| \rangle = n \sqrt{\frac{2M_0 RT_1}{\pi}},$$

واتجاهها نحو الفتحة.

يعطي انحفاظ كمية الحركة للنظام الكامل الآن

$$-Mv_f + mu_1 + P_g = 0.$$

وبما أن $mu_1 = Mv_1$ ، فإن

$$v_f = v_1 + \frac{P_g}{M}.$$

بالتعويض بـ $T_1 = T2^{-2/3}$ نحصل على

$$v_f = \sqrt{\frac{3mnRT}{M(M+m)}(1 - 2^{-2/3})} + \frac{n}{M} \sqrt{\frac{2M_0RT}{\pi 2^{2/3}}}.$$

يدفع كلا الإسهامين الوعاء نحو طرفه المغلق.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: مصباح يُغذى من بطارية عبر مقاومة متغيرة

مصباح كهربائي مقاومته $R_0 = 2 \Omega$ ويعمل عند جهد اسمي $U_0 = 4.5 \text{ V}$ ، موصول ببطارية قوتها الدافعة الكهربائية $E = 6 \text{ V}$ ومقاومتها الداخلية مهملة.

1. يُؤمّن الجهد الاسمي للمصباح بتوصيله بالبطارية باستخدام مقاومة متغيرة مقدار مقاومتها R تعمل كمقسّم جهد. ما قيمة المقاومة R المطلوبة، وما أقصى تيار كهربائي $I_{\max}$ يسري في المقاومة المتغيرة، إذا كان يجب ألا تقل كفاءة المنظومة عن $\eta_0 = 0.6$ ؟

2. ما أقصى كفاءة ممكنة η للمنظومة، وكيف يمكن توصيل المصباح بالمقاومة المتغيرة في هذه الحالة؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. يجب أن تحقق المقاومة الكلية للمقاومة المتغيرة الشرط

$$R \geq R_{\min} = 8.53 \Omega.$$

أقصى تيار في أحد جزأي المقاومة المتغيرة في ظروف التشغيل الاسمية المحددة هو

$$I_{\max} = 2.81 \text{ A}.$$

عند التصميم الحدي، تكون مقاومة الجزء الموصول على التوازي مع المصباح 8.00Ω ، ومقاومة الجزء الموصول على التوالي مع مجموعة التوازي هذه 0.533Ω .

2. الكفاءة القصوى هي

$$\eta_{\max} = 0.75 = 75\%.$$

يُوصَل المصباح على التوالي مع جزء فعال من المقاومة المتغيرة مقاومته

$$R_{\text{series}} = \frac{2}{3} \Omega \approx 0.667 \Omega,$$

باستخدام المنزلق وأحد الطرفين؛ ويترك الطرف الآخر غير موصول.

الحل

نفترض تياراً مستمراً مستقرّاً، ونهمل مقاومة أسلاك التوصيل، ونستخدم مقاومة المصباح المعطاة عند نقطة تشغيله الاسمية. كفاءة المنظومة هي القدرة الكهربائية الواصلة إلى المصباح مقسومة على القدرة التي تزودها البطارية:

$$\eta = \frac{P_{\text{lamp}}}{P_{\text{source}}}.$$

1. التوصيل كمقسم جهد

نصل طرفي المقاومة المتغيرة بقطبي البطارية، ونصل المصباح بين المنزلق والقطب السالب. نرسم إلى جزأي المقاومة المتغيرة كما يأتي:

- R_s : بين القطب الموجب والمنزلق؛
- R_p : بين المنزلق والقطب السالب، على التوازي مع المصباح.

إذن،

$$R = R_s + R_p.$$

عند الجهد الاسمي للمصباح، يعطي قانون أوم تيار المصباح

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ A}.$$

التيار في جزء المقاومة المتغيرة الموصل على التوازي هو

$$I_p = \frac{U_0}{R_p}.$$

وفقاً لقانون كيرشوف للتيار، فإن التيار المار في الجزء الموصل على التوالي، وهو أيضاً تيار البطارية، يساوي

$$I = I_0 + I_p.$$

ومن ثم فهو الأكبر بين التيارين المارين في جزأي المقاومة المتغيرة.

قدرة المصباح هي

$$P_{\text{lamp}} = U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 10.125 \text{ W}.$$

وبالتالي،

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{EI} \geq \eta_0 \implies I \leq \frac{U_0 I_0}{E \eta_0}.$$

إذن، أكبر تيار مسموح به في المقاومة المتغيرة هو

$$I_{\text{max}} = \frac{4.5 \times 2.25}{6 \times 0.6} = 2.8125 \text{ A} \approx 2.81 \text{ A}.$$

الجهد بين طرفي R_s هو $E - U_0$ ، بينما الجهد بين طرفي R_p هو U_0 . ومن ثم

$$R_s = \frac{E - U_0}{I}, \quad R_p = \frac{U_0}{I - I_0},$$

و

$$R = \frac{E - U_0}{I} + \frac{U_0}{I - I_0}.$$

يتناقص كلا الحدين مع ازدياد I عندما يكون $I > I_0$. لذلك نتحقق أصغر مقاومة كلية متوافقة مع شرط الكفاءة عند $I = I_{\text{max}}$ ، حيث $\eta = \eta_0$.

عند هذه النقطة الحدية،

$$I_p = 2.8125 - 2.25 = 0.5625 \text{ A},$$

ومن ثم

$$R_p = \frac{4.5}{0.5625} = 8.00 \Omega, \quad R_s = \frac{6 - 4.5}{2.8125} = 0.5333 \dots \Omega.$$

إذن،

$$R_{\min} = 8.00 + 0.5333 \dots = 8.53 \, \Omega.$$

تحقق المقاومات الكلية الأكبر الشرط أيضاً عند ضبط المنزلق للحفاظ على U_0 ؛ إذ تسحب تياراً أقل في الفرع الموازي وتؤدي إلى كفاءة أعلى.

2. أقصى كفاءة ممكنة

عند الجهد الاسمي، يجب أن يمر في المصباح التيار الثابت I_0 . عند استخدام توصيل مقاومي بعناصر غير فعّالة، لا يمكن أن يكون تيار البطارية أصغر من I_0 ؛ فأي فرع إضافي على التوازي يسحب تياراً إضافياً. لذلك،

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{E I_{\text{source}}} \leq \frac{U_0}{E}.$$

تتحقق المساواة عندما تزود البطارية تيار المصباح وحده، وهو ما يتطلب توصيلاً على التوالي:

$$\eta_{\max} = \frac{4.5}{6} = 0.75 = 75\%.$$

يجب أن يُحدث الجزء الفعّال من المقاومة المتغيرة هبوطاً في الجهد يساوي الجهد الزائد $E - U_0 = 1.5 \, \text{V}$ عند مرور التيار $I_0 = 2.25 \, \text{A}$ فيه:

$$R_{\text{series}} = \frac{E - U_0}{I_0} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3} \, \Omega \approx 0.667 \, \Omega.$$

نصل البطارية والمصباح وهذا الجزء من المقاومة المتغيرة على التوالي في حلقة واحدة. نستخدم أحد الطرفين والمنزلق، ونترك الطرف الآخر غير موصول.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: مقياس تداخل راديوي على شاطئ البحر

وُضع كاشف للموجات الراديوية في مرصد فلكي راديوي على شاطئ البحر على ارتفاع $h = 2 \, \text{m}$ فوق مستوى سطح البحر. بعد طلوع نجم يشع موجات كهرومغناطيسية طولها الموجي $\lambda = 21 \, \text{cm}$ فوق الأفق، يسجل الكاشف سلسلة من القيم العظمى والصغرى المتناوبة. تتناسب الإشارة المسجلة طردياً مع شدة الموجات المكتشفة. يسجل الكاشف الموجات التي يهتز متجه مجالها الكهربائي في اتجاه موازٍ لسطح البحر.

1. حدد الزاوية بين اتجاه النجم والأفق في اللحظات التي يسجل فيها الكاشف القيم العظمى والصغرى (بصيغة عامة).

2. هل تنخفض الإشارة أم تزداد مباشرة بعد طلوع النجم؟

3. حدد نسبة الإشارة عند القيمة العظمى الأولى إلى الإشارة عند القيمة الصغرى التالية. عند انعكاس الموجة الكهرومغناطيسية على سطح الماء، تخضع نسبة شدتي المجال الكهربائي للموجة المنعكسة (E_r) والموجة الساقطة (E_i) للقانون:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

حيث n هو معامل الانكسار و φ هي زاوية سقوط الموجة. بالنسبة إلى السطح الفاصل «هواء-ماء» عند $\lambda = 21 \, \text{cm}$ ، فإن معامل الانكسار هو $n = 9$.

4. هل تزداد نسبة الشدتين عند القيم العظمى والصغرى المتتالية أم تنخفض مع ارتفاع النجم؟

افترض أن سطح البحر مستوٍ.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. إذا رمزنا إلى زاوية ارتفاع النجم فوق الأفق بـ α ، فإن المواضع المعتادة لأهداب التداخل هي

$$\alpha_m^{\max} \simeq \arcsin\left(\frac{(2m+1)\lambda}{4h}\right), \quad \alpha_m^{\min} \simeq \arcsin\left(\frac{m\lambda}{2h}\right).$$

هنا $m = 0, 1, 2, \dots$ ، على أن تقتصر قيمه على تلك التي لا تتجاوز عندها حجج الدالة 1. تقع القيمة العظمى الأولى عند نحو 1.50° ، والقيمة الصغرى التالية عند 3.01° . ويُحسب أدناه مقدار التصحيح الصغير الناجم عن اعتماد الانعكاس على الزاوية.

2. تزداد الإشارة مباشرة بعد طلوع النجم، انطلاقاً من قيمة صغرى عند الأفق.

3. نسبة الإشارتين هي

$$\frac{S_{\text{القيمة العظمى الأولى}}}{S_{\text{القيمة الصغرى التالية}}} \simeq 2.96 \times 10^4.$$

4. تنخفض نسبة الإشارات العظمى إلى الإشارات الصغرى المتتالية مع ارتفاع النجم.

الحل

1. نعامل النجم البعيد بوصفه مصدرًا ثابتًا لموجات مستوية، والبحر المستوي بوصفه عاكسًا مرآويًا يحافظ على الترابط. لتكن α زاوية ارتفاع النجم I_0 شدة الموجة المباشرة وحدها.

يمكن حساب المسار المنعكس باستبدال الكاشف، الواقع على ارتفاع h ، بصورته المرآوية الواقعة على عمق h . تبلغ المسافة بين الكاشف وصورته $2h$ ؛ ويعطي إسقاطها على الاتجاه نحو النجم فرق المسار

$$\Delta = 2h \sin \alpha.$$

المجال الكهربائي المكتشف موازٍ لسطح البحر وعمودي على مستوى السقوط. ويعكس الانعكاس من الهواء إلى الماء، الأعلى كثافة ضوئية، اتجاه هذا المجال الكهربائي، مُحدِّثًا تغييرًا في الطور مقداره π .

لنرمز بـ r إلى النسبة الموجبة لسعة المجال المنعكس إلى سعة المجال الساقط، ولنعرّف فرق الطور الناتج عن الانتشار كما يلي

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi h}{\lambda} \sin \alpha.$$

بأخذ انقلاب الطور عند الانعكاس في الحسبان، تكون الشدة المحصلة

$$\frac{I}{I_0} = 1 + r^2 - 2r \cos \delta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

باعتبار r ثابتًا محليًا على امتداد هذب واحد، تحدث القيم العظمى عندما $\cos \delta = -1$ ، بينما تحدث القيم الصغرى عندما $\cos \delta = 1$. ومن ثم

$$2h \sin \alpha_m^{\max} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2h \sin \alpha_m^{\min} = m\lambda,$$

وهو ما يعطي الصيغ الواردة في قسم الإجابات. وعدديًا،

$$\sin \alpha_m^{\max} = 0.02625(2m+1), \quad \sin \alpha_m^{\min} = 0.05250m.$$

يمثل الأفق، حيث $m = 0$ ، موضع قيمة صغرى.

استكمالاً للحل، يسبب معامل الانعكاس المعطى، المعتمد على الزاوية، انزياحات صغيرة عن هذه المواضع المحددة بعلاقة الطور. وبما أن زاوية السقوط تُقاس من العمود على السطح، فإن

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \cos \varphi = \sin \alpha.$$

نضع $K = 4\pi h/\lambda$ و $s = \sin \alpha$ عندئذٍ

$$r(s) = \frac{n-s}{n+s}, \quad r'(s) = -\frac{2n}{(n+s)^2}.$$

يعطي اشتقاق التعبير الكامل للشدة الشرط الدقيق للقيم القصوى داخل المجال:

$$r'(s)[r(s) - \cos(Ks)] + Kr(s)\sin(Ks) = 0.$$

تعطي الصيغ المحددة بعلاقة الطور 1.50419° و 3.00941° للقيمة العظمى الأولى والقيمة الصغرى التالية. ويعطي أخذ تغير r في الحسابان 1.50241° و 3.00940° ، على الترتيب. لذا تعطي الصيغ البسيطة كلتا الزاويتين على نحو صحيح ضمن الدقة المذكورة أعلاه.

2. عند الأفق،

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad r = 1.$$

لذلك يلغي المجالان المباشر والمنعكس أحدهما الآخر:

$$I(0) = 0.$$

مع ارتفاع النجم، يصبح فرق الطور الناتج عن الانتشار غير صفري، ويزول الإلغاء. وبصورة أكثر صراحة، عند قيم α الموجبة الصغيرة، مقيسة بالراديان،

$$r = 1 - \frac{2\alpha}{n} + O(\alpha^2), \quad \delta = K\alpha + O(\alpha^3).$$

وبالتالي،

$$\frac{I}{I_0} = \left(K^2 + \frac{4}{n^2}\right)\alpha^2 + O(\alpha^3).$$

معامل الحد الرئيس موجب، لذا فإن الإشارة في البداية تزداد تناسباً مع مربع زاوية الارتفاع.

3. النسبة المعطاة E_r/E_i هي نسبة سعتي المجال الكهربائي. وتتناسب الإشارة المقيسة طردياً مع مربع المجال المحصل.

عند القيمة العظمى الأولى والقيمة الصغرى التالية، على الترتيب،

$$s_1 = \frac{\lambda}{4h} = 0.02625, \quad s_2 = \frac{\lambda}{2h} = 0.05250.$$

يختلف معامل الانعكاس عندهما:

$$r_1 = \frac{9 - 0.02625}{9 + 0.02625} \simeq 0.994184,$$

$$r_2 = \frac{9 - 0.05250}{9 + 0.05250} \simeq 0.988401.$$

عند القيمة العظمى تُجمع سعتا المجال، بينما تُطرح إحداها من الأخرى عند القيمة الصغرى. ومن ثم

$$I_{\max,1} = I_0(1 + r_1)^2, \quad I_{\min,1} = I_0(1 - r_2)^2.$$

وباستخدام

$$1 + r_1 = \frac{2n}{n + s_1}, \quad 1 - r_2 = \frac{2s_2}{n + s_2},$$

تصبح النسبة المطلوبة

$$\begin{aligned}
 R &= \left[\frac{n(n + s_2)}{s_2(n + s_1)} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{9(9 + 0.05250)}{0.05250(9 + 0.02625)} \right]^2 \\
 &\simeq 29558.9.
 \end{aligned}$$

وعليه،

$$R \simeq 2.96 \times 10^4.$$

يؤدي استخدام القيم القصوى الدقيقة من الجزء 1 إلى تغير نسبي في هذه النسبة يقل عن 10^{-5} ، فتظل النتيجة المذكورة دون تغيير.

4. مع ارتفاع النجم، تزداد $\sin \alpha$ وتتناقص سعة الانعكاس:

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{2n \cos \alpha}{(n + \sin \alpha)^2} < 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

غلاف التداخل البناء هو

$$I_{\text{upper}} = I_0(1 + r)^2,$$

وهو يتناقص مع تناقص r . أما غلاف التداخل الهدام فهو

$$I_{\text{lower}} = I_0(1 - r)^2,$$

وهو يتزايد. وهكذا تصبح القيم العظمى اللاحقة أضعف، بينما تصبح القيم الصغرى اللاحقة أقوى، لذا فإن نسبة الإشارة العظمى إلى الإشارة الصغرى **تنخفض**.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.