

IPhO 1979

理论题与解答 · 苏联莫斯科 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1979/

题目 1：航天器从环月轨道着陆

一枚质量为 $M = 12\text{t}$ 的太空火箭正沿高度为 $h = 100\text{ km}$ 的圆形轨道绕月球运行。发动机短暂启动，使火箭转入月球着陆轨道。喷出气体的速度为 $u = 10^4\text{ m/s}$ 。月球半径为 $R_M = 1,7 \cdot 10^3\text{ km}$ ，月球表面附近的重力加速度为 $g_M = 1.7\text{ m/s}^2$ 。

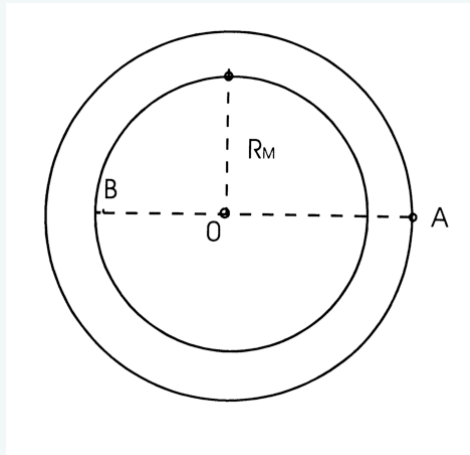


图1

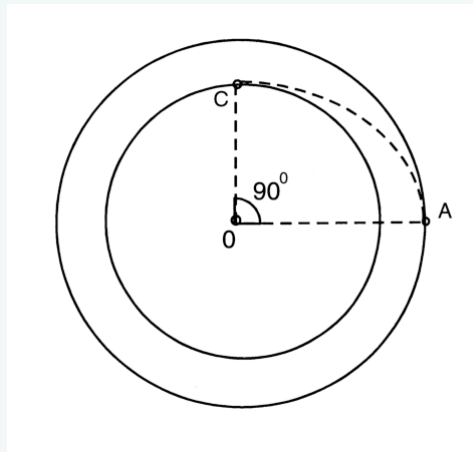


图2

- 1). 在轨迹上的 A 点启动制动发动机，使火箭在 B 点着陆于月球（图1），需要消耗多少燃料？
- 2). 在第二种着陆方案中，在 A 点给火箭一个指向月球中心的冲量，使其进入在 C 点与月球表面相接的轨道（图2）。这种情况下需要多少燃料？

题目译自官方英文原文。

答案

- 1). $\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}$, 对应的切向制动速度变化量为 23.77 m/s 。
- 2). $\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}$, 对应的径向向内速度变化量为 97.18 m/s 。

在按所给数据的精度取舍之前, 理想火箭方程给出的结果分别约为 28.49 kg 和 116.05 kg 。

解答

将月球视为球形, 其引力场遵循平方反比定律。发动机工作时间足够短, 因此可忽略燃烧期间航天器的位置变化以及引力的冲量。排气速度 u 是相对于航天器测量的。

记

$$R = R_M = 1.7 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_0 = R + h = 1.8 \times 10^6 \text{ m}.$$

月球的引力参数为

$$\mu = GM_{\text{月球}} = g_M R^2 = 4.913 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

因此, 初始圆轨道速率为

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \simeq 1652.10 \text{ m/s}.$$

对于产生大小为 Δv 的速度变化的发动机燃烧过程, 由动量守恒可得理想火箭方程:

$$\Delta v = u \ln \frac{M}{M - \Delta m}.$$

因此,

$$\Delta m = M \left(1 - e^{-\Delta v/u} \right).$$

当 $\Delta v/u \ll 1$ 时, 上式化为

$$\Delta m \simeq \frac{M \Delta v}{u}.$$

这里, 将到达月球表面理解为题目所要求的轨道与月面接触。航天器在该处仍具有非零的切向速度; 若要实现软着陆, 还需要进一步制动。

1). 在 A 点沿切向制动, 到达 B 点

制动冲量的方向与初始速度相反。制动后瞬间, 速度仍沿切向, 但速率小于圆轨道速率。因此, A 点是新椭圆轨道的远月点。与其隔着月心相对的近月点必须是 B 点, 该处到月心的距离为 R 。

设 v_A 和 v_B 分别为沿此椭圆轨道运动时在 A 点和 B 点的速率。由单位质量的角动量守恒可得

$$r_0 v_A = R v_B.$$

由单位质量的机械能守恒可得

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{\mu}{R}.$$

消去 v_B , 得到

$$v_A^2 \left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) = 2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right),$$

所以

$$v_A^2 = \frac{2\mu R}{r_0(r_0 + R)}.$$

因此，所需的速度减小量为

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} \right).$$

代入数值得

$$\Delta v_1 = 1652.10 \left(1 - \sqrt{\frac{3.4}{3.5}} \right) \simeq 23.77 \text{ m/s}.$$

于是

$$\Delta m_1 = 12000 \left(1 - e^{-23.7725/10000} \right) \text{ kg} \simeq 28.49 \text{ kg},$$

取合理的有效数字后为

$$\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}.$$

沿转移轨道运动时，到月心的距离从 r_0 减小到 R ，因此 B 点是轨道首次接触月球表面的点。

2). 在 A 点施加径向冲量，到达 C 点

设发动机赋予的径向向内速度大小为 w 。燃烧结束后瞬间，

$$v_r = -w, \quad v_t = v_0.$$

速度变化量的大小为

$$\Delta v_2 = w.$$

由于冲量沿径向，单位质量的角动量保持不变：

$$\ell = r_0 v_0, \quad \ell^2 = \mu r_0.$$

设 θ 为从 A 点起沿运动方向绕月心扫过的角度。题目要求的接触点 C 满足

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

为求出轨道，令 $q(\theta) = 1/r(\theta)$ 。由角动量守恒可得

$$\dot{r} = -\ell q',$$

其中，撇号表示对 θ 求导。对于平方反比引力，牛顿运动定律的径向方程随即给出

$$q'' + q = \frac{\mu}{\ell^2} = \frac{1}{r_0}.$$

在 A 点，

$$q(0) = \frac{1}{r_0}, \quad q'(0) = \frac{w}{\ell}.$$

满足这些条件的解为

$$q(\theta) = \frac{1}{r_0} + \frac{w}{\ell} \sin \theta,$$

即

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + (w/v_0) \sin \theta}.$$

代入条件 $r(\pi/2) = R$, 得到

$$R = \frac{r_0}{1 + w/v_0},$$

因此

$$\Delta v_2 = w = v_0 \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = v_0 \frac{h}{R} = h \sqrt{\frac{g_M}{R + h}}.$$

从 A 点到 C 点, 到月心的距离连续减小, 且其导数在 C 点为零。因此, C 点是近月点, 也是首次接触月球表面的点。

代入数值得

$$\Delta v_2 = 1652.10 \frac{100}{1700} \simeq 97.18 \text{ m/s}.$$

所需燃料质量为

$$\Delta m_2 = 12000 \left(1 - e^{-97.1825/10000} \right) \text{ kg} \simeq 116.05 \text{ kg},$$

因此

$$\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}.$$

采用燃料消耗量很小的近似, 第 1 问得到 28.53 kg, 第 2 问得到 116.62 kg, 均与取舍后的答案一致。

解答已与官方解答核对。

题目 2：在干燥空气和潮湿空气中称量样品

用黄铜砝码在分析天平上称量一个铝制样品。一次在干燥空气中称量, 另一次在水蒸气压为 $P_h = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ 的潮湿空气中称量。两种情况下的总大气压 ($P = 10^5 \text{ Pa}$) 和温度 ($t = 20^\circ \text{ C}$) 均相同。

若天平的灵敏度为 $m_0 = 0.1 \text{ mg}$, 样品的质量应为多大, 才能分辨出两次天平示值的差异?

铝的密度为 $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, 黄铜的密度为 $\rho_2 = .8500 \text{ kg/m}^3$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2. 样品的质量至少应约为

$$m_{\min} \simeq 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg} = 44 \text{ g}.$$

在潮湿空气中，天平示值较大；在恰好能够分辨的临界条件下，示值增加 0.1 mg。

解答

题目 2.

将干燥空气和水蒸气视为理想气体，并假定样品和砝码的质量及体积保持不变。我们采用黄铜密度 8500 kg/m^3 ，将题目中该数值前面的点视为印刷错误。

首先求空气密度的变化。对于摩尔质量为 M 的理想气体，

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

在潮湿空气中，由道尔顿分压定律可知，干燥空气的分压为 $P - P_h$ 。因此，以 M_a 和 M_v 分别表示干燥空气和水蒸气的摩尔质量，有

$$\rho_d = \frac{PM_a}{RT}, \quad \rho_h = \frac{(P - P_h)M_a + P_h M_v}{RT}.$$

于是，

$$\Delta\rho \equiv \rho_d - \rho_h = \frac{P_h(M_a - M_v)}{RT}.$$

水蒸气的摩尔质量小于干燥空气的摩尔质量，因此在总压强和温度相同的情况下，潮湿空气的密度较小。

采用常用的近似常量

$$M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad M_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol K)},$$

以及 $T = 293.15 \text{ K}$ ，得到

$$\Delta\rho = \frac{(2 \times 10^3)(29 - 18) \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \simeq 9.03 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

接下来考虑样品和黄铜砝码两者所受的浮力。设 m 为样品的真实质量， m_b 为在密度为 ρ 的空气中使天平平衡所需的黄铜砝码总质量。它们的体积分别为 m/ρ_1 和 m_b/ρ_2 。根据阿基米德原理以及视重相等的条件，有

$$mg - \rho g \frac{m}{\rho_1} = m_b g - \rho g \frac{m_b}{\rho_2}.$$

因此，天平示值为

$$m_b(\rho) = m \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2}.$$

潮湿空气中的示值与干燥空气中的示值之差为

$$\Delta m_b = \frac{m(\rho_d - \rho_h) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_2} \right) \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_2} \right)}.$$

这里, $\rho_d \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3$, $\rho_h \simeq 1.181 \text{ kg/m}^3$, 因此分母与 1 的差异仅约为 0.028%。在所需的精度范围内,

$$\Delta m_b \simeq m \Delta \rho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \simeq m(2.28 \times 10^{-6}).$$

这个差值为正: 铝制样品的单位质量所占体积较大, 因此空气密度降低时, 其视重的增加量大于黄铜砝码视重的增加量。

要使这一差异能够被分辨, 需满足

$$\Delta m_b \geq m_0 = 0.1 \text{ mg} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

因此,

$$m_{\min} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(9.03 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{2700} - \frac{1}{8500} \right)} \simeq 4.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \simeq \boxed{44 \text{ g}}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3: 月球激光测距

在苏法合作开展的月球光学测距实验中, 利用反射镜直径为 $D = 2.6 \text{ m}$ 的望远镜, 将红宝石激光器 ($\lambda = 0.69 \mu\text{m}$) 发出的光脉冲射向月球表面。月球表面的反射器如同直径为 $d = 20 \text{ cm}$ 的理想反射镜, 将光反射回来。随后, 同一架望远镜收集反射光, 并将其聚焦到光电探测器上。

- 1) 在这个实验中, 望远镜光轴的指向精度必须达到多少?
- 2) 如果忽略光在地球大气中的损耗, 激光发射能量中有多大比例能在月球反射后被探测到?
- 3) 如果单个激光脉冲的能量为 $E = 1 \text{ J}$, 而人眼的灵敏度阈值为 $n = 100$ 个光子, 能否用肉眼看到反射回来的光脉冲?
- 4) 假设月球表面将入射光的 $\alpha = 10\%$ 反射到 2π 球面度的立体角内, 估算使用反射器的增益。

地球到月球的距离为 $L = 380000 \text{ km}$ 。人眼瞳孔直径为 $d_p = 5 \text{ mm}$ 。普朗克常量为 $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

以下数值结果假定圆形望远镜孔径受到均匀相干照明, 反射器位于光束中心, 且光的收集过程是理想的。

1. 指向精度应达到如下量级：

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

2. 望远镜收集到的能量比例为

$$\eta = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4 \approx 5.9 \times 10^{-12}.$$

3. 不能。肉眼接收到的光子数约为

$$N_{\text{eye}} \approx 76 \text{ 个光子} < 100.$$

4. 相对于整个受照月面区域的漫反射，使用反射器使接收到的能量增大约

$$G \approx 1.0 \times 10^7.$$

采用衍射光斑内光照均匀的初等近似，可得 $\eta \approx 10^{-12}$ 、 $N_{\text{eye}} \approx 12$ 和 $G \approx 1.7 \times 10^6$ 。这一差别源于衍射强度分布，下文将作说明。

解答

取

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad L = 3.8 \times 10^8 \text{ m}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

忽略大气吸收、光学损耗以及探测器效率不足造成的损失。激光以相干方式充满望远镜孔径，反射器位于出射光束的中心。

1) 所需的指向精度

有限孔径会产生衍射。对于直径为 a 的孔径，其特征发散角为

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

对于均匀照明的圆孔，第一暗环的位置为

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

对于发射望远镜，

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{6.9 \times 10^{-7}}{2.6} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0547''.$$

第一暗环的角半径为 $3.24 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0668''$ 。

月球上对应的中央衍射光斑半径为

$$r_1 = L\theta_1 \approx 123 \text{ m},$$

远大于反射器的半径 0.10 m。

指向误差 $\delta\theta$ 会使光束中心移动 $L\delta\theta$ 。要使反射器保持在中央衍射光斑内，这一位移必须小于约 10^2 m 。因此

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

要使回波能量接近最大值，指向误差应明显小于这一特征角宽度。

2) 反射后收集到的激光能量比例

衍射发生两次：第一次发生在发射望远镜处，第二次发生在月球反射器处。

为保留圆孔对应的数值因子，考虑一个面积为 A 、受到均匀照明的孔径。在远场，孔径各部分发出的光在轴线上同相叠加。除去一个整体相位因子，惠更斯-菲涅耳公式给出的轴上场振幅为

$$u(0, L) = \frac{u_0 A}{i\lambda L}.$$

由于发射能量正比于 $|u_0|^2 A$ ，轴上单位面积接收的能量，即能量面密度，为

$$\mathcal{F}(0, L) = \frac{EA}{\lambda^2 L^2}.$$

因此，一个面积为 B 、中心位于轴线上的小接收孔径截获的能量比例为

$$\frac{E_B}{E} \approx \frac{AB}{\lambda^2 L^2}.$$

这里，望远镜和反射器的面积分别为

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} = 5.31 \text{ m}^2, \quad A_d = \frac{\pi d^2}{4} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

与出射光束的衍射光斑相比，反射器非常小，因此其表面各处的入射能量面密度基本相同。所以，到达反射器的能量比例为

$$f_{\text{out}} = \frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

受到照明的反射器相当于一个直径为 d 的相干孔径。其返回光束的衍射图样中，第一暗环的半径为

$$r_{\text{return}} = 1.22 \frac{\lambda L}{d} \approx 1.60 \times 10^3 \text{ m}.$$

与这一衍射图样相比，望远镜非常小，因此可以采用相同的中央能量面密度计算方法：

$$f_{\text{back}} = \frac{A_d A_D}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

将这两个比例相乘，得

$$\eta = f_{\text{out}} f_{\text{back}} = \left(\frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} \right)^2 = \left(\frac{\pi D d}{4\lambda L} \right)^4.$$

因此

$$\eta = 5.9 \times 10^{-12}.$$

3) 肉眼能否看到

返回光束的能量面密度在望远镜孔径范围内，以及在小得多的瞳孔范围内，都基本均匀。因此，进入肉眼的能量为

$$E_{\text{eye}} = E \eta \frac{A_p}{A_D} = E \eta \left(\frac{d_p}{D} \right)^2.$$

代入数值得

$$E_{\text{eye}} = (1)(5.9 \times 10^{-12}) \left(\frac{0.005}{2.6} \right)^2 = 2.18 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

一个光子的能量为

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{6.9 \times 10^{-7}} = 2.87 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

因此

$$N_{\text{eye}} = \frac{E_{\text{eye}}}{\varepsilon_\gamma} \approx 75.9.$$

由于

$$\boxed{N_{\text{eye}} \approx 76 < 100},$$

即使在这些理想假设下，该脉冲也未达到题目给定的肉眼可见阈值。

在孔径和发射能量给定的条件下，均匀、同相的照明使轴上能量面密度达到最大。因此，若照明分布产生的中央强度更低，也不会改善这一结果。

4) 相对于月球表面反射的增益

为进行题目要求的估算，假设漫反射能量 αE 均匀分布在 2π 球面度的立体角内。接收望远镜所张的立体角为

$$\Omega_D \approx \frac{A_D}{L^2}.$$

从漫反射表面收集到的能量占发射能量的比例为

$$\eta_{\text{diffuse}} = \alpha \frac{\Omega_D}{2\pi} = \frac{\alpha A_D}{2\pi L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2}.$$

代入数值得

$$\eta_{\text{diffuse}} = \frac{0.10(2.6)^2}{8(3.8 \times 10^8)^2} = 5.85 \times 10^{-19}.$$

这里包括了整个受照月面区域的反射。

因此，反射器的增益为

$$G = \frac{\eta}{\eta_{\text{diffuse}}} = \frac{5.89 \times 10^{-12}}{5.85 \times 10^{-19}} \approx 1.01 \times 10^7.$$

所以

$$\boxed{G \approx 10^7}.$$

衍射光斑的初等近似

一种更简单的估算方法是将每束光视为均匀分布在一个圆盘上，其半径为

$$r \approx \frac{\lambda L}{a},$$

其中 a 是发射孔径的直径。由此得到

$$r_{\text{Moon}} \approx 101 \text{ m}, \quad r_{\text{Earth}} \approx 1311 \text{ m}.$$

再以面积比作为截获的能量比例，可得

$$\eta_{\text{spot}} \approx \frac{(d/2)^2}{r_{\text{Moon}}^2} \frac{(D/2)^2}{r_{\text{Earth}}^2} = \left(\frac{Dd}{2\lambda L} \right)^4 = 9.7 \times 10^{-13}.$$

对应的结果为

$$N_{\text{eye,spot}} \approx 12, \quad G_{\text{spot}} \approx 1.7 \times 10^6.$$

这是一种有用的初等估算。圆孔计算得到的回波能量更大，是因为实际衍射图样的强度在中央达到峰值，而两次接收所用的孔径都只截取其中央区域。

解答已与官方解答核对。