

IPhO 1979

Теоретические задачи и решения · Москва, СССР · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1979/

Задача 1: Посадка космического аппарата с окололунной орбиты

Космическая ракета массой $M = 12\text{t}$ движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h = 100\text{ km}$. Для перехода на орбиту посадки на Луну на короткое время включается двигатель. Скорость истечения газов $u = 10^4\text{ m/s}$. Радиус Луны $R_M = 1,7 \cdot 10^3\text{ km}$, ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны $g_M = 1.7\text{ m/s}^2$

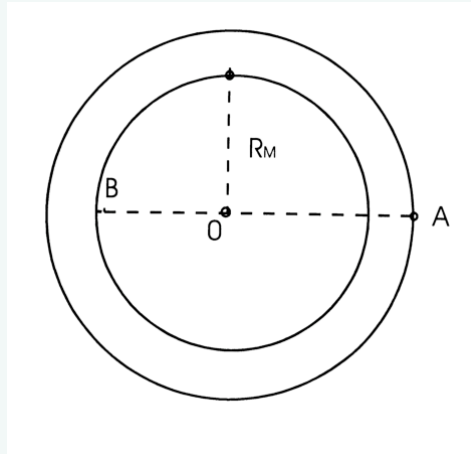


Рис.1

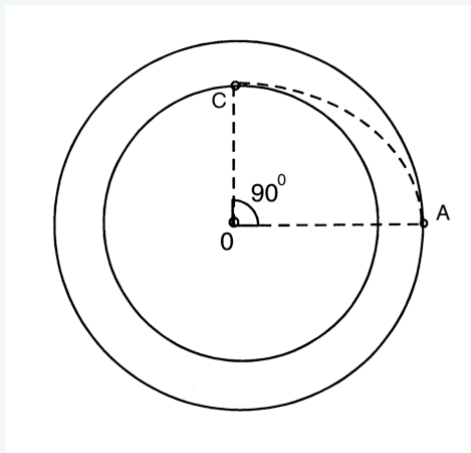


Рис.2

1). Какую массу топлива необходимо израсходовать, чтобы при включении тормозного двигателя в точке А траектории ракета совершила посадку на Луну в точке В (рис.1)?

2). Во втором варианте посадки в точке А ракете сообщают импульс, направленный к центру Луны, чтобы перевести ракету на орбиту, соприкасающуюся с поверхностью Луны в точке С (рис.2). Какая масса топлива необходима в этом случае?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 1). $\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}$, при уменьшении тангенциальной скорости на 23.77 m/s .
- 2). $\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}$, при изменении скорости на 97.18 m/s в радиальном направлении к центру Луны.

Идеальное уравнение движения ракеты даёт приблизительно 28.49 kg и 116.05 kg соответственно, до округления в соответствии с точностью исходных данных.

Решение

Будем считать Луну сферической, а её гравитационное поле — подчиняющимся закону обратных квадратов. Двигатель работает достаточно короткое время, чтобы изменением положения космического аппарата и импульсом силы тяжести за время его работы можно было пренебречь. Скорость истечения газов u измеряется относительно космического аппарата.

Запишем

$$R = R_M = 1.7 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_0 = R + h = 1.8 \times 10^6 \text{ m}.$$

Гравитационный параметр Луны равен

$$\mu = GM_{\text{Луны}} = g_M R^2 = 4.913 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

Следовательно, начальная круговая скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \simeq 1652.10 \text{ m/s}.$$

Для включения двигателя, вызывающего изменение скорости величиной Δv , из закона сохранения импульса следует идеальное уравнение движения ракеты:

$$\Delta v = u \ln \frac{M}{M - \Delta m}.$$

Следовательно,

$$\Delta m = M \left(1 - e^{-\Delta v/u} \right).$$

При $\Delta v/u \ll 1$ оно принимает вид

$$\Delta m \simeq \frac{M \Delta v}{u}.$$

Здесь под достижением поверхности понимается требуемое касание поверхности при движении по орбите. Космический аппарат сохраняет в этой точке ненулевую тангенциальную скорость; для мягкой посадки потребовалось бы дополнительное торможение.

1). Тангенциальное торможение в точке А, достижение точки В

Тормозной импульс направлен противоположно начальной скорости. Сразу после его сообщения скорость остаётся тангенциальной, но становится меньше круговой скорости. Поэтому А является апоцентром новой эллиптической орбиты. Её диаметрально противоположный перицентр должен находиться в точке В, на расстоянии R от центра Луны.

Обозначим через v_A и v_B скорости на этом эллипсе в точках А и В. Закон сохранения момента импульса на единицу массы даёт

$$r_0 v_A = R v_B.$$

Закон сохранения механической энергии на единицу массы даёт

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{\mu}{R}.$$

Исключая v_B , получаем

$$v_A^2 \left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) = 2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right),$$

откуда

$$v_A^2 = \frac{2\mu R}{r_0(r_0 + R)}.$$

Таким образом, требуемое уменьшение скорости равно

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} \right).$$

Численно,

$$\Delta v_1 = 1652.10 \left(1 - \sqrt{\frac{3.4}{3.5}} \right) \simeq 23.77 \text{ m/s}.$$

Следовательно,

$$\Delta m_1 = 12000 \left(1 - e^{-23.7725/10000} \right) \text{ kg} \simeq 28.49 \text{ kg},$$

или, с разумным числом значащих цифр,

$$\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}.$$

При движении по переходной орбите расстояние до центра Луны уменьшается от r_0 до R , поэтому В — первая точка, в которой орбита касается лунной поверхности.

2). Радиальный импульс в точке А, достижение точки С

Пусть скорость, сообщённая двигателем в направлении к центру Луны, равна w . Сразу после работы двигателя

$$v_r = -w, \quad v_t = v_0.$$

Величина изменения скорости равна

$$\Delta v_2 = w.$$

Поскольку импульс направлен радиально, удельный момент импульса не изменяется:

$$\ell = r_0 v_0, \quad \ell^2 = \mu r_0.$$

Пусть θ — угол поворота радиус-вектора относительно центра Луны, отсчитываемый от точки А в направлении движения. Для требуемой точки касания С

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

Чтобы определить орбиту, положим $q(\theta) = 1/r(\theta)$. Закон сохранения момента импульса даёт

$$\dot{r} = -\ell q',$$

где штрихи обозначают производные по θ . Тогда радиальное уравнение движения Ньютона для гравитационного поля, подчиняющегося закону обратных квадратов, даёт

$$q'' + q = \frac{\mu}{\ell^2} = \frac{1}{r_0}.$$

В точке А

$$q(0) = \frac{1}{r_0}, \quad q'(0) = \frac{w}{\ell}.$$

Решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид

$$q(\theta) = \frac{1}{r_0} + \frac{w}{\ell} \sin \theta,$$

или

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + (w/v_0) \sin \theta}.$$

Из условия $r(\pi/2) = R$ получаем

$$R = \frac{r_0}{1 + w/v_0},$$

и, следовательно,

$$\Delta v_2 = w = v_0 \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = v_0 \frac{h}{R} = h \sqrt{\frac{g_M}{R + h}}.$$

Расстояние до центра Луны непрерывно уменьшается между А и С, а его производная обращается в нуль в точке С. Таким образом, С является перигентром и точкой первого касания лунной поверхности.

Численно,

$$\Delta v_2 = 1652.10 \frac{100}{1700} \simeq 97.18 \text{ m/s}.$$

Требуемая масса топлива равна

$$\Delta m_2 = 12000 \left(1 - e^{-97.1825/10000} \right) \text{ kg} \simeq 116.05 \text{ kg},$$

откуда

$$\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}.$$

Использование приближения малого расхода топлива даёт 28.53 kg для части 1 и 116.62 kg для части 2, что согласуется с округлёнными ответами.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Взвешивание образца в сухом и влажном воздухе

Алюминиевый образец взвешивают на аналитических весах с помощью латунных гирь. Взвешивание проводят один раз в сухом воздухе, а другой — во влажном воздухе с давлением водяного пара $P_h = 2 \cdot 10^3$ Pa. Полное атмосферное давление ($P = 10^5$ Pa) и температура ($t = 20^\circ$ C) в обоих случаях одинаковы.

Какой должна быть масса образца, чтобы можно было обнаружить разницу в показаниях весов, если их чувствительность составляет $m_0 = 0.1$ mg?

Плотность алюминия $\rho_1 = 2700$ kg/m³, плотность латуни $\rho_2 = 8500$ kg/m³.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 2.** Масса образца должна быть не меньше приблизительно

$$m_{\min} \simeq 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg} = 44 \text{ g}.$$

Показание весов во влажном воздухе выше; при пороговой массе увеличение составляет 0.1 mg.

Решение

Задача 2.

Будем считать сухой воздух и водяной пар идеальными газами и предположим, что массы и объёмы образца и гирь остаются неизменными. Используем плотность латуни 8500 kg/m³, считая точку перед числом в условии опечаткой.

Сначала найдём изменение плотности воздуха. Для идеального газа с молярной массой M

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Согласно закону Дальтона, парциальное давление сухого воздуха во влажном воздухе равно $P - P_h$. Поэтому, обозначив молярные массы сухого воздуха и водяного пара через M_a и M_v , получим

$$\rho_d = \frac{PM_a}{RT}, \quad \rho_h = \frac{(P - P_h)M_a + P_h M_v}{RT}.$$

Следовательно,

$$\Delta\rho \equiv \rho_d - \rho_h = \frac{P_h(M_a - M_v)}{RT}.$$

Молярная масса водяного пара меньше молярной массы сухого воздуха, поэтому при одинаковых полном давлении и температуре влажный воздух имеет меньшую плотность.

Используя стандартные приближённые значения постоянных

$$M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad M_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol K)},$$

и $T = 293.15 \text{ K}$, получаем

$$\Delta\rho = \frac{(2 \times 10^3)(29 - 18) \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \simeq 9.03 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

Теперь учтём выталкивающую силу, действующую **как** на образец, **так и** на латунные гири.

Пусть m — истинная масса образца, а m_b — суммарная масса латунных гирь, необходимая для равновесия весов в воздухе плотностью ρ . Их объёмы равны m/ρ_1 и m_b/ρ_2 . Из закона Архимеда и равенства кажущихся весов следует

$$mg - \rho g \frac{m}{\rho_1} = m_b g - \rho g \frac{m_b}{\rho_2}.$$

Таким образом, показание весов равно

$$m_b(\rho) = m \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2}.$$

Разность показаний весов во влажном и сухом воздухе равна

$$\Delta m_b = \frac{m(\rho_d - \rho_h) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_2} \right) \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_2} \right)}.$$

Здесь $\rho_d \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3$ и $\rho_h \simeq 1.181 \text{ kg/m}^3$, поэтому знаменатель отличается от единицы всего примерно на 0.028%. С требуемой точностью

$$\Delta m_b \simeq m \Delta\rho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \simeq m(2.28 \times 10^{-6}).$$

Эта разность положительна: алюминиевый образец имеет больший объём на единицу массы, поэтому уменьшение плотности воздуха увеличивает его кажущийся вес сильнее, чем кажущийся вес латунных гирь.

Чтобы разность показаний можно было обнаружить, необходимо выполнение условия

$$\Delta m_b \geq m_0 = 0.1 \text{ mg} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

Отсюда

$$m_{\min} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(9.03 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{2700} - \frac{1}{8500} \right)} \simeq 4.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \simeq \boxed{44 \text{ g}}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Лазерная локация Луны

В ходе советско-французского эксперимента по оптической локации Луны световой импульс рубинового лазера ($\lambda = 0,69 \mu\text{m}$) направлялся на поверхность Луны с помощью телескопа с диаметром зеркала $D = 2,6 \text{ m}$. Отражатель на поверхности Луны отражал свет обратно как идеальное зеркало диаметром $d = 20 \text{ cm}$. Отражённый свет затем собирался тем же телескопом и фокусировался на фотоприёмнике.

- 1) Какой должна быть точность наведения оптической оси телескопа в этом эксперименте?
- 2) Какая доля излучённой лазером энергии может быть зарегистрирована после отражения от Луны, если пренебречь потерями света в атмосфере Земли?
- 3) Можно ли увидеть отражённый световой импульс невооружённым глазом, если энергия одного лазерного импульса $E = 1 \text{ J}$, а пороговая чувствительность глаза равна $n = 100$ квантам света?
- 4) Предполагая, что поверхность Луны отражает $\alpha = 10\%$ падающего света в телесный угол 2π стерадиан, оцените выигрыш от использования отражателя.

Расстояние от Земли до Луны равно $L = 380000 \text{ km}$. Диаметр зрачка глаза равен $d_p = 5 \text{ mm}$. Постоянная Планка равна $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Приведённые ниже численные результаты получены в предположении равномерного когерентного освещения круглой апертуры телескопа, расположения отражателя на оси пучка и идеального сбора света.

1. Точность наведения порядка

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

2. Доля энергии, собираемая телескопом, равна

$$\eta = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4 \approx 5.9 \times 10^{-12}.$$

3. **Нет.** В невооружённый глаз попадает приблизительно

$$N_{\text{eye}} \approx 76 \text{ фотонов} < 100.$$

4. По сравнению с диффузным отражением от всего освещённого участка Луны отражатель даёт выигрыш в принимаемой энергии приблизительно

$$G \approx 1.0 \times 10^7.$$

Элементарное приближение равномерно освещённых дифракционных пятен даёт $\eta \approx 10^{-12}$, $N_{\text{eye}} \approx 12$ и $G \approx 1.7 \times 10^6$. Различие связано с профилем интенсивности дифракционной картины, как поясняется ниже.

Решение

Принимаем

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7} \text{ м}, \quad L = 3.8 \times 10^8 \text{ м}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ м с}^{-1}.$$

Пренебрегаем поглощением в атмосфере, оптическими потерями и потерями из-за несовершенства фотоприёмника. Лазерное излучение когерентно заполняет апертуру телескопа, а отражатель расположен в центре исходящего пучка.

1) Требуемая точность наведения

Конечная апертура вызывает дифракцию. Для апертуры диаметром a характерная угловая расходимость составляет

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

Для равномерно освещённой круглой апертуры первое тёмное кольцо наблюдается под углом

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

Для передающего телескопа

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{6.9 \times 10^{-7}}{2.6} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ рад} = 0.0547''.$$

Угловой радиус первого тёмного кольца равен $3.24 \times 10^{-7} \text{ рад} = 0.0668''$.

Соответствующее центральное дифракционное пятно на Луне имеет радиус

$$r_1 = L\theta_1 \approx 123 \text{ м},$$

что гораздо больше радиуса отражателя 0.10 м.

Ошибка наведения $\delta\theta$ смещает центр пучка на $L\delta\theta$. Чтобы отражатель оставался в центральном дифракционном пятне, это смещение должно быть меньше примерно 10^2 м . Следовательно,

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ рад} \approx 0.06''.$$

Чтобы энергия возвращённого сигнала была близка к максимальной, ошибка наведения должна быть существенно меньше этой характерной угловой ширины.

2) Доля энергии лазера, собираемая после отражения

Дифракция происходит дважды: сначала на передающем телескопе, а затем на лунном отражателе.

Чтобы учесть численный коэффициент для круглой апертуры, рассмотрим равномерно освещённую апертуру площадью A . В дальней зоне вклады от всех частей апертуры приходят на её ось в одинаковой фазе. Формула Гюйгенса — Френеля даёт следующую амплитуду поля на оси, с точностью до общего фазового множителя:

$$u(0, L) = \frac{u_0 A}{i \lambda L}.$$

Поскольку излучённая энергия пропорциональна $|u_0|^2 A$, энергия на единицу площади на оси, или энергетическая экспозиция, равна

$$\boxed{\mathcal{F}(0, L) = \frac{EA}{\lambda^2 L^2}}.$$

Следовательно, малая приёмная апертура площадью B , центр которой расположен на оси, перехватывает долю энергии

$$\frac{E_B}{E} \approx \frac{AB}{\lambda^2 L^2}.$$

В данном случае площади телескопа и отражателя равны

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} = 5.31 \text{ m}^2, \quad A_d = \frac{\pi d^2}{4} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

Отражатель очень мал по сравнению с дифракционным пятном исходящего пучка, поэтому энергетическая экспозиция падающего света практически постоянна по всей его поверхности. Таким образом, доля энергии, достигающая отражателя, равна

$$f_{\text{out}} = \frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Освещённый отражатель действует как когерентная апертура диаметром d . Радиус первого тёмного кольца дифракционной картины возвращающегося пучка равен

$$r_{\text{return}} = 1.22 \frac{\lambda L}{d} \approx 1.60 \times 10^3 \text{ m}.$$

Телескоп очень мал по сравнению с этой дифракционной картиной, поэтому применим тот же расчёт энергетической экспозиции в центре:

$$f_{\text{back}} = \frac{A_d A_D}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Перемножая эти две доли, получаем

$$\eta = f_{\text{out}} f_{\text{back}} = \left(\frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} \right)^2 = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4.$$

Таким образом,

$$\boxed{\eta = 5.9 \times 10^{-12}}.$$

3) Видимость невооружённым глазом

Энергетическая экспозиция возвращающегося света практически одинакова по всей площади как апертуры телескопа, так и гораздо меньшего зрачка. Поэтому энергия, попадающая в невооружённый глаз, равна

$$E_{\text{eye}} = E \eta \frac{A_p}{A_D} = E \eta \left(\frac{d_p}{D} \right)^2.$$

Подстановка даёт

$$E_{\text{eye}} = (1)(5.89 \times 10^{-12}) \left(\frac{0.005}{2.6} \right)^2 = 2.18 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

Энергия одного фотона равна

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{6.9 \times 10^{-7}} = 2.87 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Отсюда

$$N_{\text{eye}} = \frac{E_{\text{eye}}}{\varepsilon_\gamma} \approx 75.9.$$

Поскольку

$$\boxed{N_{\text{eye}} \approx 76 < 100},$$

импульс не достигает заданного порога видимости невооружённым глазом даже при этих идеальных предположениях.

Равномерное синфазное освещение обеспечивает максимальную энергетическую экспозицию на оси при заданных апертуре и излучённой энергии. Поэтому профиль освещения, дающий меньшую интенсивность в центре, не позволил бы улучшить этот результат.

4) Выигрыш по сравнению с отражением от поверхности Луны

Для требуемой оценки предположим, что диффузно отражённая энергия αE равномерно распределена по телесному углу 2π стерadian. Приёмный телескоп виден с Луны под телесным углом

$$\Omega_D \approx \frac{A_D}{L^2}.$$

Доля излучённой энергии, собираемая после диффузного отражения от поверхности, равна

$$\eta_{\text{diffuse}} = \alpha \frac{\Omega_D}{2\pi} = \frac{\alpha A_D}{2\pi L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2}.$$

Численно

$$\eta_{\text{diffuse}} = \frac{0.10(2.6)^2}{8(3.8 \times 10^8)^2} = 5.85 \times 10^{-19}.$$

Здесь учтено отражение от **всего освещённого участка Луны**.

Таким образом, выигрыш от использования отражателя равен

$$G = \frac{\eta}{\eta_{\text{diffuse}}} = \frac{5.89 \times 10^{-12}}{5.85 \times 10^{-19}} \approx 1.01 \times 10^7.$$

Следовательно,

$$\boxed{G \approx 10^7}.$$

Элементарное приближение дифракционных пятен

В более простой оценке каждый пучок считается равномерно распределённым по диску радиусом

$$r \approx \frac{\lambda L}{a},$$

где a — диаметр излучающей апертуры. Это даёт

$$r_{\text{Moon}} \approx 101 \text{ m}, \quad r_{\text{Earth}} \approx 1311 \text{ m}.$$

Принимая доли перехватываемой энергии равными отношениям площадей, получаем

$$\eta_{\text{spot}} \approx \frac{(d/2)^2}{r_{\text{Moon}}^2} \frac{(D/2)^2}{r_{\text{Earth}}^2} = \left(\frac{Dd}{2\lambda L} \right)^4 = 9.7 \times 10^{-13}.$$

Соответствующие результаты равны

$$N_{\text{eye,spot}} \approx 12, \quad G_{\text{spot}} \approx 1.7 \times 10^6.$$

Это полезная элементарная оценка. Расчёт для круглой апертуры даёт большую энергию возвращённого сигнала, поскольку реальная дифракционная картина имеет максимум в центре, а обе приёмные апертуры перехватывают свет из её центральной области.

Решение проверено по официальному решению.