

IPhO 1979

Problemas teóricos y soluciones · Moscú, URSS · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/1979/

Problema 1: Alunizaje de una nave espacial desde una órbita lunar

Un cohete espacial de masa $M = 12t$ se mueve alrededor de la Luna en una órbita circular a una altura de $h = 100 \text{ km}$. El motor se enciende durante un breve intervalo de tiempo para pasar a la órbita de alunizaje. La velocidad de los gases expulsados es $u = 10^4 \text{ m/s}$. El radio de la Luna es $R_M = 1,7 \cdot 10^3 \text{ km}$ y la aceleración de la gravedad cerca de la superficie lunar es $g_M = 1.7 \text{ m/s}^2$

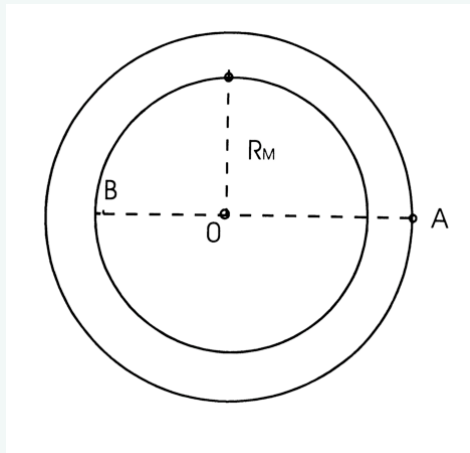


Fig.1

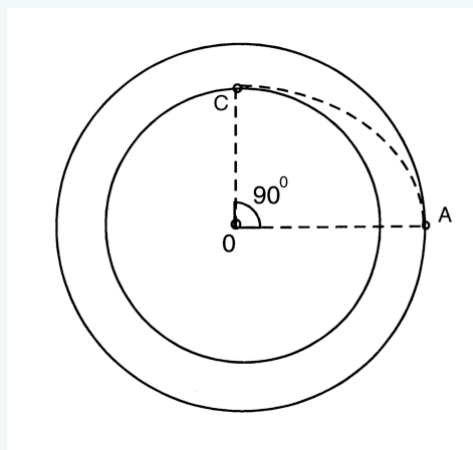


Fig.2

1). ¿Qué cantidad de combustible debe consumirse para que, al encender el motor de frenado en el punto A de la trayectoria, el cohete alunice en el punto B (Fig.1)?

2). En el segundo caso de alunizaje, en el punto A se comunica al cohete un impulso dirigido hacia el centro de la Luna, para situarlo en una órbita que alcance la superficie lunar en el punto C (Fig.2). ¿Qué cantidad de combustible se necesita en este caso?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 1). $\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}$, para una variación tangencial de la velocidad de frenado de 23.77 m/s .
- 2). $\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}$, para una variación radial de la velocidad hacia el interior de 97.18 m/s .

La ecuación ideal del cohete da aproximadamente 28.49 kg y 116.05 kg , respectivamente, antes de redondear a la precisión de los datos proporcionados.

Solución

Consideremos la Luna esférica, con un campo gravitatorio que sigue la ley del inverso del cuadrado de la distancia. El motor funciona durante un intervalo lo suficientemente breve como para que puedan despreciarse la variación de la posición de la nave y el impulso gravitatorio durante el encendido. La velocidad de escape de los gases u se mide con respecto a la nave.

Escribamos

$$R = R_M = 1.7 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_0 = R + h = 1.8 \times 10^6 \text{ m}.$$

El parámetro gravitatorio de la Luna es

$$\mu = GM_{\text{Luna}} = g_M R^2 = 4.913 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

Por tanto, la rapidez circular inicial es

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \simeq 1652.10 \text{ m/s}.$$

Para un encendido que produce una variación de la velocidad de módulo Δv , la conservación de la cantidad de movimiento da la ecuación ideal del cohete:

$$\Delta v = u \ln \frac{M}{M - \Delta m}.$$

En consecuencia,

$$\Delta m = M \left(1 - e^{-\Delta v/u} \right).$$

Cuando $\Delta v/u \ll 1$, esta expresión se convierte en

$$\Delta m \simeq \frac{M \Delta v}{u}.$$

Aquí, alcanzar la superficie se entiende como el contacto orbital solicitado. La nave conserva allí una velocidad tangencial no nula; un alunizaje suave requeriría un frenado adicional.

1). Frenado tangencial en A para alcanzar B

El impulso de frenado actúa en sentido opuesto a la velocidad inicial. Inmediatamente después, la velocidad sigue siendo tangencial, pero su módulo es menor que la rapidez circular. Por tanto, A es el apocentro de la nueva órbita elíptica. Su pericentro, diametralmente opuesto, debe ser B, a una distancia radial R .

Sean v_A y v_B las rapidezces en esta elipse en A y B. La conservación del momento angular por unidad de masa da

$$r_0 v_A = R v_B.$$

La conservación de la energía mecánica por unidad de masa da

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{\mu}{R}.$$

Al eliminar v_B ,

$$v_A^2 \left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) = 2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right),$$

de modo que

$$v_A^2 = \frac{2\mu R}{r_0(r_0 + R)}.$$

La reducción de velocidad necesaria es, por tanto,

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} \right).$$

Numéricamente,

$$\Delta v_1 = 1652.10 \left(1 - \sqrt{\frac{3.4}{3.5}} \right) \simeq 23.77 \text{ m/s}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta m_1 = 12000 \left(1 - e^{-23.7725/10000} \right) \text{ kg} \simeq 28.49 \text{ kg},$$

o bien, con un número adecuado de cifras significativas,

$$\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}.$$

La distancia radial disminuye de r_0 a R a lo largo de la transferencia, de modo que B es el primer punto en el que la órbita toca la superficie lunar.

2). Impulso radial en A para alcanzar C

Sea w la rapidez hacia el interior impartida por el motor. Inmediatamente después del encendido,

$$v_r = -w, \quad v_t = v_0.$$

La variación de la velocidad tiene módulo

$$\Delta v_2 = w.$$

Como el impulso es radial, el momento angular específico no cambia:

$$\ell = r_0 v_0, \quad \ell^2 = \mu r_0.$$

Sea θ el ángulo barrido alrededor de la Luna desde A en el sentido del movimiento. El punto de contacto requerido C cumple

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar la órbita, hagamos $q(\theta) = 1/r(\theta)$. La conservación del momento angular da

$$\dot{r} = -\ell q',$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a θ . La ecuación radial de Newton para una gravedad que sigue la ley del inverso del cuadrado de la distancia da entonces

$$q'' + q = \frac{\mu}{\ell^2} = \frac{1}{r_0}.$$

En A,

$$q(0) = \frac{1}{r_0}, \quad q'(0) = \frac{w}{\ell}.$$

La solución que satisface estas condiciones es

$$q(\theta) = \frac{1}{r_0} + \frac{w}{\ell} \sin \theta,$$

o bien

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + (w/v_0) \sin \theta}.$$

Al imponer $r(\pi/2) = R$, se obtiene

$$R = \frac{r_0}{1 + w/v_0},$$

y, por tanto,

$$\Delta v_2 = w = v_0 \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = v_0 \frac{h}{R} = h \sqrt{\frac{g_M}{R + h}}.$$

La distancia radial disminuye continuamente entre A y C, y su derivada se anula en C. Por tanto, C es el pericentro y el primer punto de contacto con la superficie lunar.

Numéricamente,

$$\Delta v_2 = 1652.10 \frac{100}{1700} \simeq 97.18 \text{ m/s}.$$

La cantidad de combustible necesaria es

$$\Delta m_2 = 12000 \left(1 - e^{-97.1825/10000} \right) \text{ kg} \simeq 116.05 \text{ kg},$$

por lo que

$$\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}.$$

La aproximación para un consumo pequeño de combustible da 28.53 kg para la parte 1 y 116.62 kg para la parte 2, en concordancia con las respuestas redondeadas.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Pesaje de una muestra en aire seco y en aire húmedo

Se utilizan pesas de latón para pesar una muestra de aluminio en una balanza analítica. El pesaje se realiza una vez en aire seco y otra en aire húmedo con una presión de vapor de agua de $P_h = 2 \cdot 10^3$ Pa. La presión atmosférica total ($P = 10^5$ Pa) y la temperatura ($t = 20^\circ$ C) son las mismas en ambos casos.

¿Qué masa debe tener la muestra para que se pueda distinguir la diferencia entre las lecturas de la balanza, si su sensibilidad es $m_0 = 0.1$ mg?

Densidad del aluminio $\rho_1 = 2700$ kg/m³, densidad del latón $\rho_2 = .8500$ kg/m³.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2.** La muestra debe tener una masa de al menos aproximadamente

$$m_{\min} \simeq 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg} = 44 \text{ g.}$$

La lectura de la balanza es mayor en aire húmedo; en el umbral de detección, el aumento es de 0.1 mg.

Solución

Problema 2.

Tratamos el aire seco y el vapor de agua como gases ideales y suponemos que las masas y los volúmenes de la muestra y de las pesas permanecen invariables. Utilizamos la densidad del latón de 8500 kg/m³, interpretando el punto que precede al valor en el enunciado como una errata.

Primero calculamos la variación de la densidad del aire. Para un gas ideal de masa molar M ,

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

En el aire húmedo, la ley de Dalton establece que la presión parcial del aire seco es $P - P_h$. Así, denotando por M_a y M_v las masas molares del aire seco y del vapor de agua,

$$\rho_d = \frac{PM_a}{RT}, \quad \rho_h = \frac{(P - P_h)M_a + P_h M_v}{RT}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\rho \equiv \rho_d - \rho_h = \frac{P_h(M_a - M_v)}{RT}.$$

El vapor de agua tiene una masa molar menor que la del aire seco, por lo que el aire húmedo es menos denso a la misma presión total y temperatura.

Utilizando los valores aproximados habituales de las constantes

$$M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad M_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol K)},$$

y $T = 293.15 \text{ K}$, obtenemos

$$\Delta\rho = \frac{(2 \times 10^3)(29 - 18) \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \simeq 9.03 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

A continuación tenemos en cuenta el empuje que actúa **tanto** sobre la muestra **como** sobre las pesas de latón. Sea m la masa real de la muestra y m_b la masa total de latón necesaria para equilibrar la balanza en aire de densidad ρ . Sus volúmenes son m/ρ_1 y m_b/ρ_2 . El principio de Arquímedes y la igualdad de los pesos aparentes dan

$$mg - \rho g \frac{m}{\rho_1} = m_b g - \rho g \frac{m_b}{\rho_2}.$$

Por tanto, la lectura de la balanza es

$$m_b(\rho) = m \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2}.$$

La diferencia entre las lecturas en aire húmedo y en aire seco es

$$\Delta m_b = \frac{m(\rho_d - \rho_h) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_2} \right) \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_2} \right)}.$$

Aquí $\rho_d \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_h \simeq 1.181 \text{ kg/m}^3$, por lo que el denominador difiere de la unidad en tan solo un 0.028% aproximadamente. Con la precisión requerida,

$$\Delta m_b \simeq m \Delta\rho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \simeq m(2.28 \times 10^{-6}).$$

Esta diferencia es positiva: la muestra de aluminio tiene un mayor volumen por unidad de masa, por lo que la reducción de la densidad del aire aumenta su peso aparente más que el de las pesas de latón.

Para que la diferencia sea detectable, exigimos

$$\Delta m_b \geq m_0 = 0.1 \text{ mg} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

Por tanto,

$$m_{\min} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(9.03 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{2700} - \frac{1}{8500} \right)} \simeq 4.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \simeq \boxed{44 \text{ g}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Localización de la Luna mediante láser

Durante el experimento soviético-francés de localización óptica de la Luna, el pulso luminoso de un láser de rubí ($\lambda = 0,69 \mu\text{m}$) se dirigió hacia la superficie lunar mediante un telescopio cuyo espejo tenía un diámetro $D = 2,6 \text{ m}$. El reflector situado en la superficie lunar devolvió la luz como un espejo ideal de diámetro $d = 20 \text{ cm}$. La luz reflejada fue recogida por el mismo telescopio y enfocada sobre el fotodetector.

- 1) ¿Cuál debe ser la precisión de apuntamiento del eje óptico del telescopio en este experimento?
- 2) ¿Qué fracción de la energía emitida por el láser puede detectarse tras la reflexión en la Luna, si se desprecian las pérdidas de luz en la atmósfera terrestre?
- 3) ¿Podemos ver un pulso de luz reflejada a simple vista si la energía de un solo pulso láser es $E = 1 \text{ J}$ y el umbral de sensibilidad del ojo es igual a $n = 100$ cuantos de luz?
- 4) Suponiendo que la superficie lunar refleja $\alpha = 10\%$ de la luz incidente en un ángulo sólido de 2π estereorradianes, estime la ventaja de utilizar un reflector.

La distancia de la Tierra a la Luna es $L = 380000 \text{ km}$. El diámetro de la pupila del ojo es $d_p = 5 \text{ mm}$. La constante de Planck es $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los resultados numéricos que se presentan a continuación suponen una iluminación coherente y uniforme de la abertura circular del telescopio, un reflector centrado y una recogida ideal de la luz.

1. Una precisión de apuntamiento del orden de

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

2. La fracción recogida por el telescopio es

$$\eta = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4 \approx 5.9 \times 10^{-12}.$$

3. **No.** El ojo sin ayuda de instrumentos recibe aproximadamente

$$N_{\text{eye}} \approx 76 \text{ fotones} < 100.$$

4. En comparación con la reflexión difusa de toda la zona lunar iluminada, el reflector aumenta la energía recibida en un factor aproximado de

$$G \approx 1.0 \times 10^7.$$

La aproximación elemental de manchas de difracción uniformemente iluminadas da $\eta \approx 10^{-12}$, $N_{\text{eye}} \approx 12$ y $G \approx 1.7 \times 10^6$. La diferencia se debe al perfil de intensidad de difracción, como se explica a continuación.

Solución

Tomamos

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad L = 3.8 \times 10^8 \text{ m}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Despreciamos la absorción atmosférica, las pérdidas ópticas y la ineficiencia del detector. El láser ilumina de forma coherente toda la abertura del telescopio, y el reflector está centrado en el haz de ida.

1) Precisión de apuntamiento requerida

Una abertura finita produce difracción. Para una abertura de diámetro a , la divergencia angular característica es

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

Para una abertura circular uniformemente iluminada, el primer anillo oscuro aparece en

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

Para el telescopio emisor,

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{6.9 \times 10^{-7}}{2.6} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0547''.$$

El ángulo del primer anillo oscuro es $3.24 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0668''$.

La mancha central de difracción correspondiente en la Luna tiene un radio

$$r_1 = L\theta_1 \approx 123 \text{ m},$$

mucho mayor que el radio del reflector, 0.10 m.

Un error de apuntamiento $\delta\theta$ desplaza el centro del haz una distancia $L\delta\theta$. Para mantener el reflector dentro de la mancha central de difracción, este desplazamiento debe ser menor que aproximadamente 10^2 m . Por tanto,

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

Para que la energía de retorno sea casi máxima, el error de apuntamiento debe ser apreciablemente menor que esta anchura característica.

2) Fracción de la energía del láser recogida tras la reflexión

La difracción se produce dos veces: primero en el telescopio emisor y después en el reflector lunar.

Para conservar el factor numérico correspondiente a una abertura circular, consideremos una abertura uniformemente iluminada de área A . En el campo lejano, las contribuciones de todas las partes de la abertura llegan en fase a su eje. La fórmula de Huygens–Fresnel da la amplitud del campo sobre el eje, salvo una fase global, como

$$u(0, L) = \frac{u_0 A}{i\lambda L}.$$

Como la energía transmitida es proporcional a $|u_0|^2 A$, la energía por unidad de área sobre el eje, o fluencia, es

$$\mathcal{F}(0, L) = \frac{EA}{\lambda^2 L^2}.$$

En consecuencia, una pequeña abertura receptora de área B , centrada en el eje, intercepta la fracción

$$\frac{E_B}{E} \approx \frac{AB}{\lambda^2 L^2}.$$

En este caso, las áreas del telescopio y del reflector son

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} = 5.31 \text{ m}^2, \quad A_d = \frac{\pi d^2}{4} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

El reflector es muy pequeño en comparación con la mancha de difracción del haz de ida, por lo que la fluencia incidente es prácticamente constante en toda su superficie. Por tanto, la fracción que lo alcanza es

$$f_{\text{out}} = \frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

El reflector iluminado actúa como una abertura coherente de diámetro d . En su patrón de difracción de retorno, el radio del primer anillo oscuro es

$$r_{\text{return}} = 1.22 \frac{\lambda L}{d} \approx 1.60 \times 10^3 \text{ m}.$$

El telescopio es muy pequeño en comparación con este patrón, por lo que se aplica el mismo cálculo de la fluencia central:

$$f_{\text{back}} = \frac{A_d A_D}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Multiplicando las dos fracciones,

$$\eta = f_{\text{out}} f_{\text{back}} = \left(\frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} \right)^2 = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4.$$

Por tanto,

$$\boxed{\eta = 5.9 \times 10^{-12}}.$$

3) Visibilidad a simple vista

La fluencia de retorno es prácticamente uniforme tanto sobre la abertura del telescopio como sobre la pupila, mucho más pequeña. Por tanto, la energía que entra en un ojo sin ayuda de instrumentos es

$$E_{\text{eye}} = E \eta \frac{A_p}{A_D} = E \eta \left(\frac{d_p}{D} \right)^2.$$

Sustituyendo los valores se obtiene

$$E_{\text{eye}} = (1)(5.89 \times 10^{-12}) \left(\frac{0.005}{2.6} \right)^2 = 2.18 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

La energía de un fotón es

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{6.9 \times 10^{-7}} = 2.87 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

De ahí que

$$N_{\text{eye}} = \frac{E_{\text{eye}}}{\varepsilon_\gamma} \approx 75.9.$$

Puesto que

$$\boxed{N_{\text{eye}} \approx 76 < 100},$$

el pulso no alcanza el umbral de visibilidad a simple vista indicado, ni siquiera bajo estas hipótesis ideales.

Una iluminación uniforme y en fase maximiza la fluencia sobre el eje para una abertura y una energía transmitida dadas. Por tanto, un perfil de iluminación que produzca una intensidad central menor no mejoraría esta conclusión.

4) Ventaja respecto a la reflexión en la superficie lunar

Para la estimación solicitada, supongamos que la energía reflejada de forma difusa αE se distribuye uniformemente en 2π estereorradianes. El telescopio receptor subtiende el ángulo sólido

$$\Omega_D \approx \frac{A_D}{L^2}.$$

La fracción de la energía emitida que se recoge de la superficie difusora es

$$\eta_{\text{diffuse}} = \alpha \frac{\Omega_D}{2\pi} = \frac{\alpha A_D}{2\pi L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2}.$$

Numéricamente,

$$\eta_{\text{diffuse}} = \frac{0.10(2.6)^2}{8(3.8 \times 10^8)^2} = 5.85 \times 10^{-19}.$$

Esto incluye la reflexión de **toda la zona lunar iluminada**.

Por tanto, la ventaja del reflector es

$$G = \frac{\eta}{\eta_{\text{diffuse}}} = \frac{5.89 \times 10^{-12}}{5.85 \times 10^{-19}} \approx 1.01 \times 10^7.$$

Por tanto,

$$\boxed{G \approx 10^7}.$$

Aproximación elemental mediante manchas de difracción

Una estimación más sencilla considera que cada haz se distribuye uniformemente sobre un disco de radio

$$r \approx \frac{\lambda L}{a},$$

donde a es el diámetro de la abertura emisora. Se obtiene

$$r_{\text{Moon}} \approx 101 \text{ m}, \quad r_{\text{Earth}} \approx 1311 \text{ m}.$$

Tomando las fracciones de energía interceptadas como cocientes de áreas, se obtiene entonces

$$\eta_{\text{spot}} \approx \frac{(d/2)^2}{r_{\text{Moon}}^2} \frac{(D/2)^2}{r_{\text{Earth}}^2} = \left(\frac{Dd}{2\lambda L} \right)^4 = 9.7 \times 10^{-13}.$$

Los resultados correspondientes son

$$N_{\text{eye,spot}} \approx 12, \quad G_{\text{spot}} \approx 1.7 \times 10^6.$$

Esta es una estimación elemental útil. El cálculo para una abertura circular da una energía de retorno mayor porque el patrón real de difracción presenta un máximo central, y ambas aberturas receptoras recogen luz de su región central.

La solución se comprobó con la solución oficial.