

IPhO 1979

Theorieaufgaben und Lösungen · Moskau, UdSSR · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1979/

Aufgabe 1: Landung eines Raumfahrzeugs aus einer Mondumlaufbahn

Eine Raumrakete mit der Masse $M = 12t$ bewegt sich auf einer Kreisbahn in der Höhe $h = 100 \text{ km}$ um den Mond. Das Triebwerk wird für kurze Zeit eingeschaltet, um auf die Mondlandebahn überzugehen. Die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gase beträgt $u = 10^4 \text{ m/s}$. Der Mondradius beträgt $R_M = 1,7 \cdot 10^3 \text{ km}$, die Fallbeschleunigung nahe der Mondoberfläche $g_M = 1.7 \text{ m/s}^2$

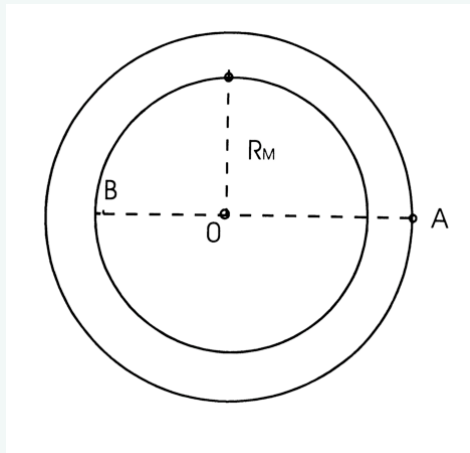


Abb.1

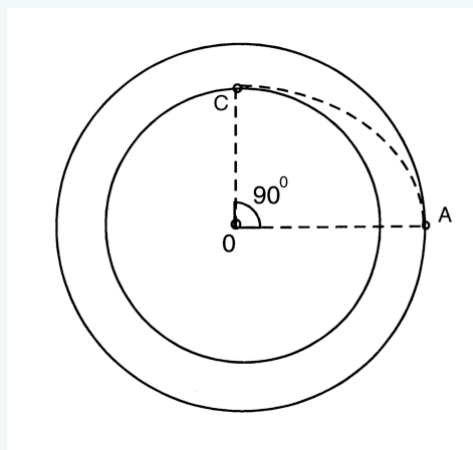


Abb.2

- 1). Welche Treibstoffmenge muss verbraucht werden, damit die Rakete beim Einschalten des Bremstriebwerks im Punkt A der Flugbahn im Punkt B auf dem Mond landet (Abb.1)?

2). Bei der zweiten Landevariante erhält die Rakete im Punkt A einen zum Mondmittelpunkt gerichteten Impuls, um sie auf eine Bahn zu bringen, die im Punkt C auf die Mondoberfläche trifft (Abb.2). Welche Treibstoffmenge wird in diesem Fall benötigt?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- 1). $\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}$, bei einer tangentialen Geschwindigkeitsänderung durch Abbremsen von 23.77 m/s .
- 2). $\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}$, bei einer radial nach innen gerichteten Geschwindigkeitsänderung von 97.18 m/s .

Die ideale Raketengleichung ergibt ungefähr 28.49 kg bzw. 116.05 kg , bevor auf die Genauigkeit der gegebenen Daten gerundet wird.

Lösung

Der Mond wird als kugelförmig angenommen, mit einem Gravitationsfeld, das dem inversen Quadratgesetz folgt. Das Triebwerk arbeitet so kurz, dass die Änderung der Position des Raumfahrzeugs und der Gravitationsimpuls während der Brenndauer vernachlässigt werden können. Die Ausströmgeschwindigkeit u wird relativ zum Raumfahrzeug gemessen.

Wir setzen

$$R = R_M = 1.7 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_0 = R + h = 1.8 \times 10^6 \text{ m}.$$

Der Gravitationsparameter des Mondes ist

$$\mu = GM_{\text{Mond}} = g_M R^2 = 4.913 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

Damit beträgt die anfängliche Kreisbahngeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \simeq 1652.10 \text{ m/s}.$$

Für einen Triebwerksstoß, der eine Geschwindigkeitsänderung vom Betrag Δv erzeugt, ergibt die Impulserhaltung die ideale Raketengleichung:

$$\Delta v = u \ln \frac{M}{M - \Delta m}.$$

Folglich gilt

$$\Delta m = M \left(1 - e^{-\Delta v/u} \right).$$

Für $\Delta v/u \ll 1$ wird daraus

$$\Delta m \simeq \frac{M \Delta v}{u}.$$

Hier wird das Erreichen der Oberfläche als der geforderte Kontakt der Umlaufbahn mit der Oberfläche verstanden. Das Raumfahrzeug besitzt dort weiterhin eine von null verschiedene Tangentialgeschwindigkeit; eine weiche Landung würde weiteres Abbremsen erfordern.

1). Tangentiales Abbremsen bei A, Erreichen von B

Der Bremsimpuls wirkt entgegen der Anfangsgeschwindigkeit. Unmittelbar danach bleibt die Geschwindigkeit tangential, ist aber kleiner als die Kreisbahngeschwindigkeit. Daher ist A das Apozentrum der neuen elliptischen Bahn. Ihr diametral gegenüberliegendes Perizentrum muss B sein, beim Radius R .

Es seien v_A und v_B die Geschwindigkeiten auf dieser Ellipse bei A und B. Die Erhaltung des Drehimpulses pro Masseneinheit ergibt

$$r_0 v_A = R v_B.$$

Die Erhaltung der mechanischen Energie pro Masseneinheit ergibt

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{\mu}{R}.$$

Durch Eliminieren von v_B erhält man

$$v_A^2 \left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) = 2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right),$$

also

$$v_A^2 = \frac{2\mu R}{r_0(r_0 + R)}.$$

Die erforderliche Verringerung der Geschwindigkeit beträgt daher

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} \right).$$

Numerisch ergibt sich

$$\Delta v_1 = 1652.10 \left(1 - \sqrt{\frac{3.4}{3.5}} \right) \simeq 23.77 \text{ m/s}.$$

Somit gilt

$$\Delta m_1 = 12000 \left(1 - e^{-23.7725/10000} \right) \text{ kg} \simeq 28.49 \text{ kg},$$

oder, auf eine sinnvolle Anzahl signifikanter Stellen gerundet,

$$\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}.$$

Der Radius nimmt entlang der Übergangsbahn von r_0 auf R ab, sodass B der erste Punkt ist, an dem die Bahn die Mondoberfläche berührt.

2). Radialer Impuls bei A, Erreichen von C

Die vom Triebwerk verliehene, nach innen gerichtete Geschwindigkeit sei w . Unmittelbar nach dem Triebwerksstoß gilt

$$v_r = -w, \quad v_t = v_0.$$

Die Geschwindigkeitsänderung hat den Betrag

$$\Delta v_2 = w.$$

Da der Impuls radial gerichtet ist, bleibt der spezifische Drehimpuls unverändert:

$$\ell = r_0 v_0, \quad \ell^2 = \mu r_0.$$

Es sei θ der von A aus in Bewegungsrichtung um den Mond überstrichene Winkel. Für den geforderten Berührungspunkt C gilt

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

Um die Bahn zu bestimmen, setzen wir $q(\theta) = 1/r(\theta)$. Die Drehimpulserhaltung ergibt

$$\dot{r} = -\ell q',$$

wobei Striche Ableitungen nach θ bezeichnen. Die radiale Newtonsche Bewegungsgleichung für die dem inversen Quadratgesetz folgende Gravitation liefert dann

$$q'' + q = \frac{\mu}{\ell^2} = \frac{1}{r_0}.$$

Bei A gilt

$$q(0) = \frac{1}{r_0}, \quad q'(0) = \frac{w}{\ell}.$$

Die Lösung, die diese Bedingungen erfüllt, lautet

$$q(\theta) = \frac{1}{r_0} + \frac{w}{\ell} \sin \theta,$$

oder

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + (w/v_0) \sin \theta}.$$

Die Forderung $r(\pi/2) = R$ ergibt

$$R = \frac{r_0}{1 + w/v_0},$$

und somit

$$\Delta v_2 = w = v_0 \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = v_0 \frac{h}{R} = h \sqrt{\frac{g_M}{R + h}}.$$

Der Radius nimmt zwischen A und C stetig ab, und seine Ableitung verschwindet bei C. Somit ist C das Perizentrum und der erste Berührungspunkt mit der Mondoberfläche.

Numerisch ergibt sich

$$\Delta v_2 = 1652.10 \frac{100}{1700} \simeq 97.18 \text{ m/s}.$$

Die erforderliche Treibstoffmenge beträgt

$$\Delta m_2 = 12000 \left(1 - e^{-97.1825/10000} \right) \text{ kg} \simeq 116.05 \text{ kg},$$

also

$$\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}.$$

Die Näherung für eine kleine Treibstoffmenge ergibt 28.53 kg für Teil 1 und 116.62 kg für Teil 2, in Übereinstimmung mit den gerundeten Antworten.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Wägen einer Probe in trockener und in feuchter Luft

Eine Probe aus Aluminium wird mit Messinggewichten auf einer Analysenwaage gewogen. Die Wägung erfolgt einmal in trockener Luft und ein weiteres Mal in feuchter Luft mit einem Wasserdampfpartialdruck von $P_h = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Der gesamte Luftdruck ($P = 10^5 \text{ Pa}$) und die Temperatur ($t = 20^\circ \text{ C}$) sind in beiden Fällen gleich.

Wie groß muss die Masse der Probe sein, damit sich ein Unterschied zwischen den Waagenanzeigen feststellen lässt, wenn die Empfindlichkeit der Waage $m_0 = 0.1 \text{ mg}$ beträgt?

Dichte von Aluminium $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$, Dichte von Messing $\rho_2 = 8500 \text{ kg/m}^3$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 2.** Die Probe muss eine Masse von mindestens ungefähr

$$m_{\min} \simeq 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg} = 44 \text{ g}.$$

haben. Die Waagenanzeige ist in feuchter Luft höher; an der Nachweisgrenze beträgt die Zunahme 0.1 mg.

Lösung

Aufgabe 2.

Wir behandeln trockene Luft und Wasserdampf als ideale Gase und nehmen an, dass die Massen und Volumina der Probe und der Gewichte unverändert bleiben. Wir verwenden die Messingdichte 8500 kg/m^3 und deuten den vorangestellten Punkt in der Aufgabenstellung als Druckfehler.

Zunächst bestimmen wir die Änderung der Luftdichte. Für ein ideales Gas mit der molaren Masse M gilt

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

In feuchter Luft beträgt der Partialdruck der trockenen Luft nach dem Dalton-Gesetz $P - P_h$.

Bezeichnen wir die molaren Massen der trockenen Luft und des Wasserdampfs mit M_a beziehungsweise M_v , so gilt daher

$$\rho_d = \frac{PM_a}{RT}, \quad \rho_h = \frac{(P - P_h)M_a + P_h M_v}{RT}.$$

Folglich ist

$$\Delta\rho \equiv \rho_d - \rho_h = \frac{P_h(M_a - M_v)}{RT}.$$

Wasserdampf hat eine kleinere molare Masse als trockene Luft, sodass feuchte Luft bei gleichem Gesamtdruck und gleicher Temperatur eine geringere Dichte hat.

Mit den üblichen Näherungswerten für die Konstanten

$$M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad M_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol K)},$$

und $T = 293.15 \text{ K}$ erhalten wir

$$\Delta\rho = \frac{(2 \times 10^3)(29 - 18) \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \simeq 9.03 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

Als Nächstes berücksichtigen wir den Auftrieb **sowohl** der Probe als auch der Messinggewichte. Es sei m die tatsächliche Masse der Probe und m_b die gesamte Messingmasse, die in Luft der Dichte ρ zum Herstellen des Gleichgewichts erforderlich ist. Ihre Volumina betragen m/ρ_1 und m_b/ρ_2 . Aus dem archimedischen Prinzip und der Gleichheit der scheinbaren Gewichtskräfte folgt

$$mg - \rho g \frac{m}{\rho_1} = m_b g - \rho g \frac{m_b}{\rho_2}.$$

Damit beträgt die Waagenanzeige

$$m_b(\rho) = m \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2}.$$

Die Differenz zwischen den Anzeigen in feuchter und in trockener Luft beträgt

$$\Delta m_b = \frac{m(\rho_d - \rho_h) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_2} \right) \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_2} \right)}.$$

Hier sind $\rho_d \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3$ und $\rho_h \simeq 1.181 \text{ kg/m}^3$, sodass der Nenner nur um etwa 0.028% von eins abweicht. Mit der erforderlichen Genauigkeit gilt

$$\Delta m_b \simeq m \Delta\rho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \simeq m(2.28 \times 10^{-6}).$$

Diese Differenz ist positiv: Die Aluminiumprobe hat ein größeres Volumen pro Masseneinheit, sodass eine Verringerung der Luftdichte ihre scheinbare Gewichtskraft stärker erhöht als diejenige der Messinggewichte.

Damit der Unterschied nachweisbar ist, muss gelten

$$\Delta m_b \geq m_0 = 0.1 \text{ mg} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

Somit ergibt sich

$$m_{\min} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(9.03 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{2700} - \frac{1}{8500} \right)} \simeq 4.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \simeq \boxed{44 \text{ g}}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Laserentfernungsmessung zum Mond

Bei dem sowjetisch-französischen Experiment zur optischen Entfernungsmessung zum Mond wurde der Lichtimpuls eines Rubinlasers ($\lambda = 0,69 \mu\text{m}$) mit einem Teleskop mit dem Spiegeldurchmesser $D = 2,6 \text{ m}$ auf die Mondoberfläche gerichtet. Der Reflektor auf der Mondoberfläche warf das Licht wie ein idealer Spiegel mit dem Durchmesser $d = 20 \text{ cm}$ zurück. Das reflektierte Licht wurde anschließend von demselben Teleskop aufgefangen und auf den Photodetektor fokussiert.

- 1) Mit welcher Genauigkeit muss die optische Achse des Teleskops bei diesem Experiment ausgerichtet werden?
- 2) Welcher Anteil der ausgesandten Laserenergie kann nach der Reflexion am Mond nachgewiesen werden, wenn die Lichtverluste in der Erdatmosphäre vernachlässigt werden?
- 3) Kann man einen reflektierten Lichtimpuls mit bloßem Auge sehen, wenn die Energie eines einzelnen Laserimpulses $E = 1 \text{ J}$ beträgt und die Empfindlichkeitsschwelle des Auges bei $n = 100$ Lichtquanten liegt?
- 4) Angenommen, die Mondoberfläche reflektiert $\alpha = 10\%$ des einfallenden Lichts in den Raumwinkel 2π Steradian. Schätzen Sie den Vorteil ab, den die Verwendung eines Reflektors bietet.

Die Entfernung von der Erde zum Mond beträgt $L = 380000 \text{ km}$. Der Pupillendurchmesser des Auges beträgt $d_p = 5 \text{ mm}$. Die Planck-Konstante beträgt $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die folgenden Zahlenwerte setzen eine gleichmäßige kohärente Ausleuchtung der kreisförmigen Teleskopöffnung, einen zentrierten Reflektor und eine ideale Lichtsammlung voraus.

1. Die erforderliche Ausrichtungsgenauigkeit liegt in der Größenordnung

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

2. Der vom Teleskop aufgefangene Anteil beträgt

$$\eta = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4 \approx 5.9 \times 10^{-12}.$$

3. **Nein.** Das bloße Auge empfängt ungefähr

$$N_{\text{eye}} \approx 76 \text{ Photonen} < 100.$$

4. Gegenüber der diffusen Reflexion an der gesamten beleuchteten Mondfläche erhöht der Reflektor die empfangene Energie ungefähr um den Faktor

$$G \approx 1.0 \times 10^7.$$

Die elementare Näherung gleichmäßig ausgeleuchteter Beugungsflecken liefert $\eta \approx 10^{-12}$, $N_{\text{eye}} \approx 12$ und $G \approx 1.7 \times 10^6$. Der Unterschied ergibt sich aus dem Intensitätsprofil des Beugungsbildes, wie im Folgenden erläutert wird.

Lösung

Wir verwenden

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad L = 3.8 \times 10^8 \text{ m}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Wir vernachlässigen die Absorption in der Atmosphäre, optische Verluste und eine unvollständige Nachweiseffizienz des Detektors. Der Laser leuchtet die Teleskopöffnung kohärent aus, und der Reflektor befindet sich im Zentrum des ausgesandten Strahls.

1) Erforderliche Ausrichtungsgenauigkeit

Eine endliche Öffnung verursacht Beugung. Für eine Öffnung mit dem Durchmesser a beträgt die charakteristische Winkelaufweitung

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

Bei einer gleichmäßig ausgeleuchteten kreisförmigen Öffnung liegt der erste dunkle Ring bei

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

Für das sendende Teleskop gilt

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{6.9 \times 10^{-7}}{2.6} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0547''.$$

Der Winkel zum ersten dunklen Ring beträgt $3.24 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0668''$.

Der entsprechende zentrale Beugungsfleck auf dem Mond hat den Radius

$$r_1 = L\theta_1 \approx 123 \text{ m},$$

der viel größer als der Radius des Reflektors von 0.10 m ist.

Ein Ausrichtungsfehler $\delta\theta$ verschiebt das Strahlzentrum um $L\delta\theta$. Damit der Reflektor innerhalb des zentralen Beugungsflecks bleibt, muss diese Verschiebung kleiner als ungefähr 10^2 m sein. Somit gilt

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

Für ein nahezu maximales Rücksignal sollte der Ausrichtungsfehler deutlich kleiner als diese charakteristische Winkelbreite sein.

2) Anteil der nach der Reflexion aufgefangenen Laserenergie

Beugung tritt zweimal auf: zunächst am sendenden Teleskop und dann am Reflektor auf dem Mond.

Um den Zahlenfaktor für die kreisförmige Öffnung beizubehalten, betrachten wir eine gleichmäßig ausgeleuchtete Öffnung mit der Fläche A . Im Fernfeld treffen die Beiträge aller Teile der Öffnung auf ihrer Achse phasengleich ein. Die Huygens-Fresnel-Formel liefert für die Feldamplitude auf der Achse, bis auf einen gemeinsamen Phasenfaktor,

$$u(0, L) = \frac{u_0 A}{i\lambda L}.$$

Da die ausgesandte Energie proportional zu $|u_0|^2 A$ ist, beträgt die Energie pro Flächeneinheit auf der Achse, auch Fluenz genannt,

$$\mathcal{F}(0, L) = \frac{EA}{\lambda^2 L^2}.$$

Eine kleine Empfangsöffnung mit der Fläche B , deren Mittelpunkt auf der Achse liegt, fängt folglich den Anteil

$$\frac{E_B}{E} \approx \frac{AB}{\lambda^2 L^2}$$

auf.

Hier betragen die Flächen von Teleskopöffnung und Reflektor

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} = 5.31 \text{ m}^2, \quad A_d = \frac{\pi d^2}{4} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

Der Reflektor ist im Vergleich zum Beugungsfleck des ausgesandten Strahls winzig, sodass die einfallende Fluenz über seine Fläche praktisch konstant ist. Der Anteil, der ihn erreicht, beträgt daher

$$f_{\text{out}} = \frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Der beleuchtete Reflektor wirkt wie eine kohärent ausgeleuchtete Öffnung mit dem Durchmesser d . Im Beugungsbild des zurücklaufenden Strahls hat der erste dunkle Ring den Radius

$$r_{\text{return}} = 1.22 \frac{\lambda L}{d} \approx 1.60 \times 10^3 \text{ m}.$$

Das Teleskop ist im Vergleich zu diesem Beugungsbild winzig, sodass dieselbe Berechnung mit der Fluenz im Zentrum anwendbar ist:

$$f_{\text{back}} = \frac{A_d A_D}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

Die Multiplikation der beiden Anteile ergibt

$$\eta = f_{\text{out}} f_{\text{back}} = \left(\frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} \right)^2 = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4.$$

Somit gilt

$$\eta = 5.9 \times 10^{-12}.$$

3) Sichtbarkeit mit bloßem Auge

Die Fluenz des zurückkehrenden Lichts ist sowohl über die Teleskopöffnung als auch über die viel kleinere Pupille praktisch gleichmäßig. Die in ein unbewaffnetes Auge eintretende Energie beträgt daher

$$E_{\text{eye}} = E \eta \frac{A_p}{A_D} = E \eta \left(\frac{d_p}{D} \right)^2.$$

Einsetzen ergibt

$$E_{\text{eye}} = (1)(5.89 \times 10^{-12}) \left(\frac{0.005}{2.6} \right)^2 = 2.18 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

Die Energie eines Photons beträgt

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{6.9 \times 10^{-7}} = 2.87 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Daraus folgt

$$N_{\text{eye}} = \frac{E_{\text{eye}}}{\varepsilon_\gamma} \approx 75.9.$$

Da

$$\boxed{N_{\text{eye}} \approx 76 < 100},$$

erreicht der Impuls selbst unter diesen idealen Annahmen nicht die angegebene Schwelle für die Sichtbarkeit mit bloßem Auge.

Eine gleichmäßige, phasengleiche Ausleuchtung maximiert bei vorgegebener Öffnung und ausgesandter Energie die Fluenz auf der Achse. Ein Ausleuchtungsprofil mit geringerer Intensität im Zentrum würde daher zu keinem günstigeren Ergebnis führen.

4) Vorteil gegenüber der Reflexion an der Mondoberfläche

Für die geforderte Abschätzung nehmen wir an, dass die diffus reflektierte Energie αE gleichmäßig über 2π Steradian verteilt ist. Das empfangende Teleskop nimmt den Raumwinkel

$$\Omega_D \approx \frac{A_D}{L^2}$$

ein. Der Anteil der ausgesandten Energie, der nach diffuser Reflexion an der Oberfläche aufgefangen wird, beträgt

$$\eta_{\text{diffuse}} = \alpha \frac{\Omega_D}{2\pi} = \frac{\alpha A_D}{2\pi L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\eta_{\text{diffuse}} = \frac{0.10(2.6)^2}{8(3.8 \times 10^8)^2} = 5.85 \times 10^{-19}.$$

Dies umfasst die Reflexion an der **gesamten beleuchteten Mondfläche**.

Der Vorteil des Reflektors beträgt daher

$$G = \frac{\eta}{\eta_{\text{diffuse}}} = \frac{5.89 \times 10^{-12}}{5.85 \times 10^{-19}} \approx 1.01 \times 10^7.$$

Somit gilt

$$\boxed{G \approx 10^7}.$$

Elementare Näherung mit Beugungsflecken

Eine einfachere Abschätzung behandelt jeden Strahl als gleichmäßig über eine Kreisscheibe mit dem Radius

$$r \approx \frac{\lambda L}{a},$$

verteilt, wobei a der Durchmesser der sendenden Öffnung ist. Sie liefert

$$r_{\text{Moon}} \approx 101 \text{ m}, \quad r_{\text{Earth}} \approx 1311 \text{ m}.$$

Setzt man die aufgefangenen Energieanteile als Flächenverhältnisse an, erhält man

$$\eta_{\text{spot}} \approx \frac{(d/2)^2}{r_{\text{Moon}}^2} \frac{(D/2)^2}{r_{\text{Earth}}^2} = \left(\frac{Dd}{2\lambda L} \right)^4 = 9.7 \times 10^{-13}.$$

Die entsprechenden Ergebnisse lauten

$$N_{\text{eye,spot}} \approx 12, \quad G_{\text{spot}} \approx 1.7 \times 10^6.$$

Dies ist eine nützliche elementare Abschätzung. Die Berechnung für die kreisförmige Öffnung ergibt ein stärkeres Rücksignal, weil das tatsächliche Beugungsbild ein Intensitätsmaximum im Zentrum aufweist und beide Empfangsöffnungen Licht aus seinem zentralen Bereich aufnehmen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.