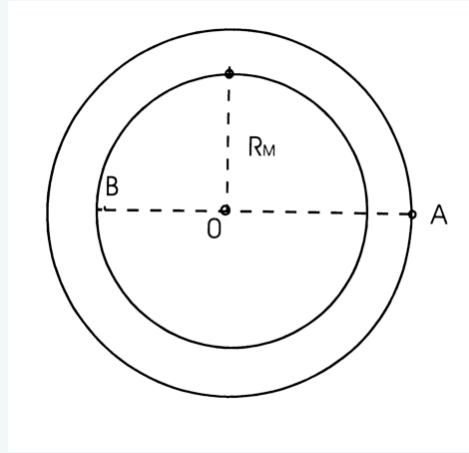
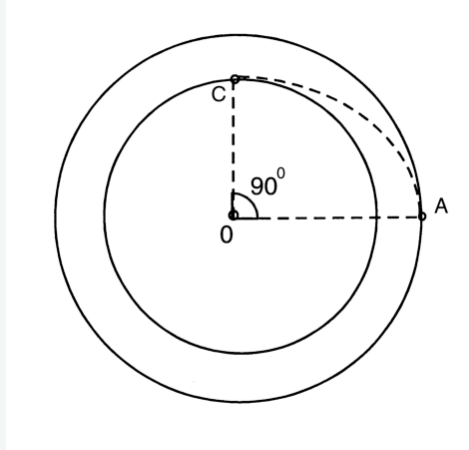


المسألة 1: إنزال مركبة فضائية من مدار حول القمر

يتحرك صاروخ فضائي كتلته $M = 12t$ حول القمر في مدار دائري على ارتفاع $h = 100 \text{ km}$. يُشغَّل المحرك مدة قصيرة للانتقال إلى مدار الهبوط على القمر. سرعة الغازات المنبعثة $u = 10^4 \text{ m/s}$. نصف قطر القمر $R_M = 1,7 \cdot 10^3 \text{ km}$ ، وتسارع الجاذبية قرب سطح القمر $g_M = 1.7 \text{ m/s}^2$



الشكل 1



الشكل 2

(1). ما كمية الوقود التي يجب استهلاكها لكي يهبط الصاروخ على القمر عند النقطة B عند تشغيل محرك الكبح في النقطة A من المسار (الشكل 1)؟

(2). في السيناريو الثاني للهبوط، يُعطى الصاروخ عند النقطة A دفعاً موجَّهاً نحو مركز القمر، لوضعه في مدار يلتقي سطح القمر عند النقطة C (الشكل 2). ما كمية الوقود اللازمة في هذه الحالة؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (1). $\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}$ ، لتغيّر مماسي في السرعة بفعل الكبح مقداره 23.77 m/s .
 - (2). $\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}$ ، لتغيّر شعاعي في السرعة نحو الداخل مقداره 97.18 m/s .
- تعطي معادلة الصاروخ المثالي نحو 28.49 kg و 116.05 kg ، على الترتيب، قبل التقريب بما يتوافق مع دقة المعطيات المقدّمة.

الحل

نعدّ القمر كروياً، ذا مجال جاذبية يتناسب عكسياً مع مربع المسافة. يعمل المحرك مدة قصيرة بما يكفي لإهمال تغيّر موضع المركبة الفضائية ودفع قوة الجاذبية أثناء تشغيله. تُقاس سرعة العادم u بالنسبة إلى المركبة الفضائية.

نكتب

$$R = R_M = 1.7 \times 10^6 \text{ m}, \quad r_0 = R + h = 1.8 \times 10^6 \text{ m}.$$

معامل الجاذبية للقمر هو

$$\mu = GM_{\text{القمر}} = g_M R^2 = 4.913 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

إنّ السرعة الابتدائية في المدار الدائري هي

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \simeq 1652.10 \text{ m/s}.$$

عند تشغيل المحرك لإحداث تغيّر في السرعة مقداره Δv ، يعطي حفظ كمية الحركة معادلة الصاروخ المثالي:

$$\Delta v = u \ln \frac{M}{M - \Delta m}.$$

وعليه،

$$\Delta m = M \left(1 - e^{-\Delta v/u} \right).$$

عندما يكون $\Delta v/u \ll 1$ ، تصبح هذه العلاقة

$$\Delta m \simeq \frac{M \Delta v}{u}.$$

يُقصد بالوصول إلى السطح هنا التماس المداري المطلوب. وتحتفظ المركبة الفضائية هناك بسرعة مماسية غير صفرية؛ أما الهبوط اللين فيتطلب كبحاً إضافياً.

(1). الكبح المماسي عند A والوصول إلى B

يؤثر دفع الكبح بعكس اتجاه السرعة الابتدائية. وبعده مباشرةً، تظل السرعة مماسية، لكنها تصبح أقل من سرعة المدار الدائري. لذلك تكون A أوج المدار الإهليلجي الجديد. ويجب أن يكون حضيضه المقابل لها على امتداد القطر هو B، عند نصف القطر R .

لتكن v_A و v_B مقداري السرعة على هذا المدار الإهليلجي عند A و B. يعطي حفظ الزخم الزاوي لكل وحدة كتلة

$$r_0 v_A = R v_B.$$

ويعطي حفظ الطاقة الميكانيكية لكل وحدة كتلة

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{\mu}{R}.$$

بحذف v_B

$$v_A^2 \left(\frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) = 2\mu \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right),$$

ومن ثم

$$v_A^2 = \frac{2\mu R}{r_0(r_0 + R)}.$$

إذن مقدار التخفيض المطلوب في السرعة هو

$$\Delta v_1 = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} \right).$$

عددياً،

$$\Delta v_1 = 1652.10 \left(1 - \sqrt{\frac{3.4}{3.5}} \right) \simeq 23.77 \text{ m/s}.$$

وبالتالي

$$\Delta m_1 = 12000 \left(1 - e^{-23.7725/10000} \right) \text{ kg} \simeq 28.49 \text{ kg},$$

أو، بالتقريب إلى عدد مناسب من الأرقام المعنوية،

$$\Delta m_1 \simeq 29 \text{ kg}.$$

يتناقص نصف القطر من r_0 إلى R على طول مسار الانتقال، لذا تكون B أول نقطة يلامس فيها المدار سطح القمر.

(2). الدفع الشعاعي عند A والوصول إلى C

ليكن مقدار السرعة التي يمنحها المحرك نحو الداخل هو w . مباشرةً بعد تشغيل المحرك،

$$v_r = -w, \quad v_t = v_0.$$

يكون مقدار التغير في السرعة

$$\Delta v_2 = w.$$

لأن الدفع شعاعي، يبقى الزخم الزاوي لكل وحدة كتلة دون تغير:

$$\ell = r_0 v_0, \quad \ell^2 = \mu r_0.$$

لتكن θ الزاوية المقطوعة حول القمر انطلاقاً من A في اتجاه الحركة. عند نقطة التماس المطلوبة C، تكون

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

لتحديد المدار، نضع $q(\theta) = 1/r(\theta)$. يعطي حفظ الزخم الزاوي

$$\dot{r} = -\ell q',$$

حيث تدل الشروط على المشتقات بالنسبة إلى θ . وتُعطي عندئذٍ معادلة نيوتن للحركة الشعاعية تحت تأثير جاذبية تتناسب عكسياً مع مربع المسافة

$$q'' + q = \frac{\mu}{\ell^2} = \frac{1}{r_0}.$$

عند A،

$$q(0) = \frac{1}{r_0}, \quad q'(0) = \frac{w}{\ell}.$$

الحل الذي يحقق هذين الشرطين هو

$$q(\theta) = \frac{1}{r_0} + \frac{w}{\ell} \sin \theta,$$

أو

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + (w/v_0) \sin \theta}.$$

بفرض $r(\pi/2) = R$ نحصل على

$$R = \frac{r_0}{1 + w/v_0},$$

وبالتالي

$$\Delta v_2 = w = v_0 \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) = v_0 \frac{h}{R} = h \sqrt{\frac{g_M}{R + h}}.$$

يتناقص نصف القطر باستمرار بين A وC، وتنعدم مشتقته عند C. ومن ثم تكون C الحضيض ونقطة التماس الأولى مع سطح القمر. عددياً،

$$\Delta v_2 = 1652.10 \frac{100}{1700} \simeq 97.18 \text{ m/s}.$$

كمية الوقود المطلوبة هي

$$\Delta m_2 = 12000 \left(1 - e^{-97.1825/10000} \right) \text{ kg} \simeq 116.05 \text{ kg},$$

ومن ثم

$$\Delta m_2 \simeq 1.2 \times 10^2 \text{ kg}.$$

يعطي استخدام تقريب كمية الوقود الصغيرة 28.53 kg للجزء 1 و 116.62 kg للجزء 2، بما يتفق مع الإجابات المقربة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: وزن عينة في الهواء الجاف وفي الهواء الرطب

تُستخدم أثقال من النحاس الأصفر لوزن عينة مصنوعة من الألومنيوم على ميزان تحليلي. يُجرى الوزن مرة في الهواء الجاف ومرة أخرى في الهواء الرطب، حيث يبلغ ضغط بخار الماء $P_h = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. ويكون الضغط الجوي الكلي ($P = 10^5 \text{ Pa}$) ودرجة الحرارة ($t = 20^\circ \text{ C}$) متماثلين في الحالتين.

كم يجب أن تكون كتلة العينة حتى يمكن تمييز الفرق بين قراءتي الميزان، إذا كانت حساسيته $m_0 = 0.1 \text{ mg}$ ؟

كثافة الألومنيوم $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$ ، وكثافة النحاس الأصفر $\rho_2 = 8500 \text{ kg/m}^3$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 2. يجب أن تكون كتلة العينة على الأقل نحو

$$m_{\min} \simeq 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg} = 44 \text{ g}.$$

تكون قراءة الميزان أعلى في الهواء الرطب؛ وعند الحد الأدنى، تكون الزيادة 0.1 mg.

الحل

المسألة 2.

نُعامل الهواء الجاف وبخار الماء بوصفهما غازين مثاليين، ونفترض أن كتل العينة والأثقال وحجومها تبقى ثابتة. نستخدم القيمة 8500 kg/m^3 لكثافة النحاس الأصفر، ونعدّ النقطة التي تسبقها في نص المسألة خطأً مطبعياً.

نحسب أولاً التغير في كثافة الهواء. لغاز مثالي كتلته المولية M ،

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

في الهواء الرطب، يعطي قانون دالتون الضغط الجزئي للهواء الجاف على الصورة $P - P_h$. ومن ثم، إذا رمزنا إلى الكتلتين الموليتين للهواء الجاف وبخار الماء بالرمزين M_a و M_v ، فإن

$$\rho_d = \frac{PM_a}{RT}, \quad \rho_h = \frac{(P - P_h)M_a + P_h M_v}{RT}.$$

وبالتالي،

$$\Delta\rho \equiv \rho_d - \rho_h = \frac{P_h(M_a - M_v)}{RT}.$$

الكتلة المولية لبخار الماء أصغر من الكتلة المولية للهواء الجاف، لذا يكون الهواء الرطب أقل كثافة عند الضغط الكلي ودرجة الحرارة نفسيهما.

باستخدام القيم التقريبية القياسية للثوابت

$$M_a = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad M_v = 18 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol K)},$$

و $T = 293.15 \text{ K}$ ، نحصل على

$$\Delta\rho = \frac{(2 \times 10^3)(29 - 18) \times 10^{-3}}{8.314 \times 293.15} \simeq 9.03 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3.$$

نأخذ بعد ذلك في الحسابان قوة الطفو المؤثرة في كلٍّ من العينة وأثقال النحاس الأصفر. لتكن m الكتلة الحقيقية للعينة، و m_b الكتلة الكلية لأثقال النحاس الأصفر اللازمة لتحقيق الاتزان في هواء كثافته ρ . ويكون حجمهما m/ρ_1 و m_b/ρ_2 . وبحسب مبدأ أرخميدس وتساوي الوزنين الظاهريين، نحصل على

$$mg - \rho g \frac{m}{\rho_1} = m_b g - \rho g \frac{m_b}{\rho_2}.$$

وعليه، تكون قراءة الميزان

$$m_b(\rho) = m \frac{1 - \rho/\rho_1}{1 - \rho/\rho_2}.$$

الفرق بين قراءة الميزان في الهواء الرطب وقراءته في الهواء الجاف هو

$$\Delta m_b = \frac{m(\rho_d - \rho_h) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_2} \right) \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_2} \right)}.$$

هنا $\rho_d \simeq 1.190 \text{ kg/m}^3$ و $\rho_h \simeq 1.181 \text{ kg/m}^3$ ، لذا لا يختلف المقام عن الواحد إلا بنحو 0.028% . وضمن الدقة المطلوبة،

$$\Delta m_b \simeq m \Delta\rho \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \simeq m(2.28 \times 10^{-6}).$$

هذا الفرق موجب: فعينة الألومنيوم ذات حجم أكبر لكل وحدة كتلة، ولذلك يؤدي خفض كثافة الهواء إلى زيادة وزنها الظاهري بمقدار أكبر من الزيادة في الوزن الظاهري لأثقال النحاس الأصفر.

لكي يكون الفرق قابلاً للكشف، نشترط

$$\Delta m_b \geq m_0 = 0.1 \text{ mg} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ kg}.$$

$$m_{\min} \simeq \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(9.03 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{2700} - \frac{1}{8500} \right)} \simeq 4.38 \times 10^{-2} \text{ kg} \simeq \boxed{44 \text{ g}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: تحديد موقع القمر بالليزر

أثناء التجربة السوفيتية الفرنسية لتحديد موقع القمر بصرياً، وُجِّهت نبضة ضوئية من ليزر الياقوت ($\lambda = 0,69 \mu\text{m}$) نحو سطح القمر باستخدام تلسكوب قطر مرآته $D = 2,6 \text{ m}$. وعكس العاكس الموجود على سطح القمر الضوء إلى الخلف كما تفعل مرآة مثالية قطرها $d = 20 \text{ cm}$. ثم جُمِعَ الضوء المنعكس بالتلسكوب نفسه وركَّز على الكاشف الضوئي.

(1) ما الدقة اللازمة لتوجيه المحور البصري للتلسكوب في هذه التجربة؟

(2) ما الجزء الذي يمكن كشفه من طاقة الليزر المنبعثة بعد انعكاسه عن القمر، إذا أهملنا فقد الضوء في الغلاف الجوي للأرض؟

(3) هل يمكننا رؤية النبضة الضوئية المنعكسة بالعين المجردة إذا كانت طاقة نبضة الليزر الواحدة $E = 1 \text{ J}$ ، وكانت عتبة حساسية العين تساوي $n = 100$ كمّ ضوئي؟

(4) بافتراض أن سطح القمر يعكس $\alpha = 10\%$ من الضوء الساقط ضمن زاوية مجسمة مقدارها 2π ستراديان، قدر مقدار التحسن الناتج عن استخدام عاكس.

المسافة من الأرض إلى القمر هي $L = 380000 \text{ km}$. وقطر حدقة العين هو $d_p = 5 \text{ mm}$. وثابت بلانك هو $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تفترض النتائج العددية أدناه إضاءة مترابطة منتظمة لفتحة التلسكوب الدائرية، وعاكساً متمركزاً على المحور، وجمعاً مثالياً للضوء.

1. دقة توجيه من رتبة

$$\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''.$$

2. نسبة الطاقة التي يجمعها التلسكوب هي

$$\eta = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4 \approx 5.9 \times 10^{-12}.$$

3. لا. تستقبل العين المجردة نحو

$$N_{\text{eye}} \approx 76 \text{ فوتوناً} < 100.$$

4. بالمقارنة مع الانعكاس المنتشر عن كامل البقعة المضاءة على سطح القمر، يزيد العاكس الطاقة المستقبلية بمعامل يبلغ تقريباً

$$G \approx 1.0 \times 10^7.$$

يعطي التقريب المبسط القائم على بقع حيود مضاءة بانتظام $\eta \approx 10^{-12}$ ، و $N_{\text{eye}} \approx 12$ ، و $G \approx 1.7 \times 10^6$. وينشأ هذا الاختلاف من شكل توزيع شدة الحيود، كما سيُشرح أدناه.

الحل

نأخذ

$$\lambda = 6.9 \times 10^{-7} \text{ m}, \quad L = 3.8 \times 10^8 \text{ m}, \quad c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

نهمل الامتصاص في الغلاف الجوي، والفواقد البصرية، وعدم كمال كفاءة الكاشف. يملأ ضوء الليزر فتحة التلسكوب بصورة مترابطة، ويتمركز العاكس في الحزمة الصادرة.

(1) دقة التوجيه المطلوبة

تحدث الفتحة المحدودة حيوداً. وفتحة قطرها a ، يكون الانتشار الزاوي المميز

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

ولفتحة دائرية مضاءة بانتظام، تقع الحلقة المظلمة الأولى عند

$$\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

بالنسبة إلى التلسكوب المرسل،

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{6.9 \times 10^{-7}}{2.6} = 2.65 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0547''.$$

زاوية الحلقة المظلمة الأولى هي $3.24 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0668''$

يبلغ نصف قطر بقعة الحيود المركزية المقابلة على القمر

$$r_1 = L\theta_1 \approx 123 \text{ m},$$

وهو أكبر بكثير من نصف قطر العاكس البالغ 0.10 m .

يُزيح خطأ توجيهه مقداره $\delta\theta$ مركز الحزمة بمقدار $L\delta\theta$. ولإبقاء العاكس داخل بقعة الحيود المركزية، يجب أن تكون هذه الإزاحة أصغر من نحو 10^2 m . ومن ثم

$$\boxed{\delta\theta \lesssim 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.06''}.$$

وللحصول على طاقة عائدة قريبة من قيمتها العظمى، ينبغي أن يكون خطأ التوجيه أصغر بكثير من هذا العرض المميز.

(2) نسبة طاقة الليزر التي تُجمع بعد الانعكاس

يحدث الحيود مرتين: أولاً عند التلسكوب المرسل، ثم عند العاكس الموجود على القمر.

للاحتفاظ بالمعامل العددي الخاص بالفتحة الدائرية، لننظر في فتحة مضاءة بانتظام مساحتها A . في المجال البعيد، تصل المساهمات من جميع أجزاء الفتحة متفقة في الطور على محورها. وتعطي صيغة هويغنز-فريزل سعة المجال على المحور، باستثناء عامل طور كلي، على الصورة

$$u(0, L) = \frac{u_0 A}{i\lambda L}.$$

ولأن الطاقة المرسله تتناسب مع $|u_0|^2 A$ ، فإن الطاقة لكل وحدة مساحة على المحور، أو الفلوانس، تساوي

$$\boxed{\mathcal{F}(0, L) = \frac{EA}{\lambda^2 L^2}}.$$

وبالتالي، فإن فتحة استقبال صغيرة مساحتها B ، ومتمركزة على المحور، تعترض النسبة

$$\frac{E_B}{E} \approx \frac{AB}{\lambda^2 L^2}.$$

هنا مساحتا التلسكوب والعاكس هما

$$A_D = \frac{\pi D^2}{4} = 5.31 \text{ m}^2, \quad A_d = \frac{\pi d^2}{4} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

العاكس صغير جداً مقارنة ببقعة حيود الحزمة الصادرة، لذا يكون الفلوانس الساقط ثابتاً تقريباً على امتداده. ومن ثم فإن نسبة الطاقة التي تصل إليه هي

$$f_{\text{out}} = \frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

يعمل العاكس المضاء كفتحة مترابطة قطرها d . ويبلغ نصف قطر الحلقة المظلمة الأولى في نمط حيود الضوء العائد منه

$$r_{\text{return}} = 1.22 \frac{\lambda L}{d} \approx 1.60 \times 10^3 \text{ m}.$$

التلسكوب صغير جداً مقارنة بهذا النمط، لذا ينطبق الحساب نفسه للفلوانس المركزي:

$$f_{\text{back}} = \frac{A_d A_D}{\lambda^2 L^2} = 2.43 \times 10^{-6}.$$

بضرب النسبتين،

$$\eta = f_{\text{out}} f_{\text{back}} = \left(\frac{A_D A_d}{\lambda^2 L^2} \right)^2 = \left(\frac{\pi D d}{4 \lambda L} \right)^4.$$

إذن

$$\boxed{\eta = 5.9 \times 10^{-12}}.$$

(3) إمكانية الرؤية بالعين المجردة

يكون الفلوانس العائد منتظماً تقريباً على امتداد كل من فتحة التلسكوب وهدقة العين الأصغر منها بكثير. ولذلك فإن الطاقة الداخلة إلى العين المجردة هي

$$E_{\text{eye}} = E \eta \frac{A_p}{A_D} = E \eta \left(\frac{d_p}{D} \right)^2.$$

بالتعويض نحصل على

$$E_{\text{eye}} = (1)(5.89 \times 10^{-12}) \left(\frac{0.005}{2.6} \right)^2 = 2.18 \times 10^{-17} \text{ J}.$$

طاقة الفوتون الواحد هي

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{6.9 \times 10^{-7}} = 2.87 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

ومن ثم

$$N_{\text{eye}} = \frac{E_{\text{eye}}}{\varepsilon_\gamma} \approx 75.9.$$

وبما أن

$$\boxed{N_{\text{eye}} \approx 76 < 100},$$

فإن النبضة لا تبلغ عتبة الرؤية بالعين المجردة المذكورة، حتى في ظل هذه الافتراضات المثالية.

تجعل الإضاءة المنتظمة والمتفقة في الطور الفلوانس على المحور أعظماً عند ثبات الفتحة والطاقة المرسلة. ولذلك فإن توزيع إضاءة يعطي شدة مركزية أقل لن يحسن هذه النتيجة.

4 مقدار التحسن مقارنة بالانعكاس عن سطح القمر

لإجراء التقدير المطلوب، نفترض أن الطاقة المنعكسة انعكاسًا منتشرًا αE موزعة بانتظام على 2π ستراديان. يقابل التلسكوب المستقبل زاوية مجسمة مقدارها

$$\Omega_D \approx \frac{A_D}{L^2}.$$

نسبة الطاقة المنبعثة التي تُجمع من السطح العاكس انعكاسًا منتشرًا هي

$$\eta_{\text{diffuse}} = \alpha \frac{\Omega_D}{2\pi} = \frac{\alpha A_D}{2\pi L^2} = \frac{\alpha D^2}{8L^2}.$$

عديًا،

$$\eta_{\text{diffuse}} = \frac{0.10(2.6)^2}{8(3.8 \times 10^8)^2} = 5.85 \times 10^{-19}.$$

يشمل ذلك الانعكاس عن كامل البقعة المضاءة على سطح القمر.

وعليه، فإن معامل التحسن الناتج عن العاكس هو

$$G = \frac{\eta}{\eta_{\text{diffuse}}} = \frac{5.89 \times 10^{-12}}{5.85 \times 10^{-19}} \approx 1.01 \times 10^7.$$

إذن

$$\boxed{G \approx 10^7}.$$

التقريب المبسط لبقعة الحيود

في تقدير أبسط، تُعامل كل حزمة على أنها موزعة بانتظام على قرص نصف قطره

$$r \approx \frac{\lambda L}{a},$$

حيث a هو قطر الفتحة المرسل. ويعطي هذا التقدير

$$r_{\text{Moon}} \approx 101 \text{ m}, \quad r_{\text{Earth}} \approx 1311 \text{ m}.$$

وباعتبار نسب الطاقة المعترضة مساوية لنسب المساحات، نحصل عندئذ على

$$\eta_{\text{spot}} \approx \frac{(d/2)^2}{r_{\text{Moon}}^2} \frac{(D/2)^2}{r_{\text{Earth}}^2} = \left(\frac{Dd}{2\lambda L} \right)^4 = 9.7 \times 10^{-13}.$$

والنتائج المقابلة هي

$$N_{\text{eye,spot}} \approx 12, \quad G_{\text{spot}} \approx 1.7 \times 10^6.$$

هذا تقدير مبسط مفيد. ويعطي حساب الفتحة الدائرية طاقة عائدة أكبر لأن نمط الحيود الفعلي له ذروة عند المركز، ولأن كلتا فتحتي الاستقبال تستقبلان الضوء من منطقتي المركز.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.