

IPhO 1977

理论题与解答 · 捷克斯洛伐克赫拉德茨-克拉洛韦 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1977/

题目 1：四冲程内燃机的奥托循环

一台四冲程内燃机的压缩比为 $\varepsilon = 9.5$ 。发动机吸入温度为 27°C 、压强为 $1\text{ atm} = 100\text{ kPa}$ 的空气和气体燃料。从点 1 到点 2 的压缩过程为绝热过程，见图 1。混合气点火燃烧期间（2—3），气缸内的压强增至原来的两倍。高温废气绝热膨胀至体积 V_2 ，推动活塞向下运动（3—4）。随后排气门打开，压强恢复到初始值 1 atm 。假设气缸内的所有过程均为理想过程。混合气和废气的泊松常数（即比热容之比 C_p/C_V ）均为 $\kappa = 1.40$ 。（压缩比是活塞位于最下端时的气缸容积与活塞位于最上端时的气缸容积之比。）

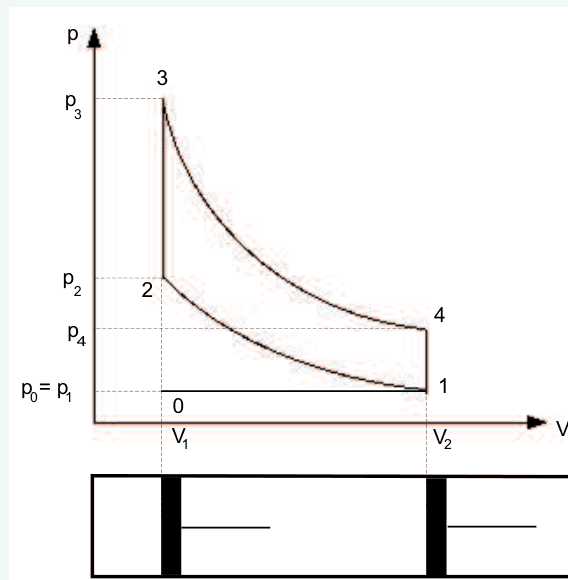


图 1:

- 点 0—1、2—3、4—1、1—0 之间分别发生什么过程？
- 求状态 1、2、3 和 4 的压强与温度。
- 求该循环的热效率。
- 讨论所得结果。它们符合实际吗？

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 0 → 1: 等压进气；2 → 3: 等容燃烧并吸热；4 → 1: 排气门打开时的等容降压过程，在理想奥托循环中用放热过程表示；1 → 0: 等压排气。
- b) 采用 $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$:

状态	压强	温度
1	100 kPa	300 K
2	2.34×10^3 kPa	738 K
3	4.68×10^3 kPa	1.48×10^3 K
4	200 kPa	600 K

- c) $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$ 。
- d) 所得压强和温度的数量级对内燃机而言是合理的。所得效率是一个偏乐观的理想值；传热、热容的变化、燃烧过程所需的有限时间以及换气损失都会降低实际效率，而摩擦还会进一步降低轴输出功。

解答

a) 各过程的判定

设气缸的最小和最大容积分别为

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

其中 V_1, V_2 是图中的体积标记。状态 2 和 3 对应的体积为 $V_{\min}$ ；状态 1 和 4 对应的体积为 $V_{\max}$ 。

- $0 \rightarrow 1$: **等压进气**。活塞向下运动，在外界压强 $p_0 = p_1$ 下吸入新鲜空气和气体燃料。
- $2 \rightarrow 3$: **等容燃烧**。在理想化的瞬时燃烧过程中，活塞保持在最上端，压强和温度升高。由于体积不变，气体不做体积功。
- $4 \rightarrow 1$: **等容降压**。活塞位于最下端时排气门打开，气体逸出，直到气缸内的压强降至外界压强。在理想的闭式奥托循环中，这一快速排气泄压过程用等容放热过程表示。
- $1 \rightarrow 0$: **等压排气**。活塞向上运动，在外界压强下排出废气。

进气和排气过程中均有物质穿过气缸边界。这两个过程的理想化压强-体积路径相互重合。

b) 压强与温度

将工质气体视为热容恒定的理想气体，且 $\kappa = C_p/C_V = 1.40$ 。在每个理想绝热冲程中，

$$pV^\kappa = \text{常量}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{常量}.$$

这些关系可由热力学第一定律

$$nC_V dT = -p dV,$$

结合 $pV = nRT$ 和 $R/C_V = \kappa - 1$ 得到，其中 C_V 为摩尔热容。

在状态 1，由给定条件可得

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

在绝热压缩 $1 \rightarrow 2$ 过程中，

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

代入数值得

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^{\kappa} = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

因此

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

在等容点火燃烧 $2 \rightarrow 3$ 过程中, 压强增至原来的两倍。在理想工质气体近似下, 体积不变时 p/T 为常量, 因此

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

于是

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

在绝热膨胀 $3 \rightarrow 4$ 过程中,

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa} = \frac{2p_1 \varepsilon^{\kappa}}{\varepsilon^{\kappa}} = 2p_1,$$
$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

因此,

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

c) 热效率

规定气体对外做功为正。进气和排气冲程所做的功大小相等、符号相反:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

因此, 两者相互抵消。等容过程中不做体积功。

对于两个绝热冲程, 由热力学第一定律可得

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

因此, 每个循环的净功为

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

燃烧释放的能量用等容吸热表示:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

因此

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

在闭式奥托循环的描述中, $nC_V(T_4 - T_1)$ 是等效的放热量。

由于 $T_3 = 2T_2$ 且 $T_4 = 2T_1$,

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

因此,

$$\boxed{\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%}.$$

在这一理想模型中，效率取决于压缩比和 κ 。题设中压强增至两倍的条件决定了各状态的温度以及每次充气所做的功，但在效率表达式中会被消去。

d) 对实际符合程度的讨论

压缩终了的温度约为 465°C ，最高温度约为 1200°C ，最高压强约为 4.68 MPa 。对于内燃机而言，这些数量级是合理的。

膨胀结束时，气体温度仍约为 327°C ，压强仍为大气压的两倍。因此，废气仍携带相当多的能量。即使是理想循环，也会放出占输入能量

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

的能量。

实际发动机在以下几个方面偏离这一模型：

- 热量会从高温气体传递到气缸壁，因此压缩和膨胀并非完全绝热。
- 燃烧需要一定时间，在此期间活塞仍在运动，因此吸热过程并非严格等容。
- 热容取决于温度和组分。高温下热容增大，因此将 $\kappa = 1.40$ 视为常量是一种偏乐观的近似。
- 进气和排气需要气门两侧存在压强差，从而产生泵气损失；这两个过程所做的功不再严格抵消。
- 不完全燃烧和机械摩擦会降低有效输出。

此外，实际的排气泄压是一个开放过程：逸出的气体将能量带出气缸，而进气则补充新鲜混合气。将定量气体等容冷却，是这一过程在理想奥托循环中的表示方式。

因此，计算得到的 59.4% 是题设理想模型的效率；实际效率和轴输出功都会更低。

解答已与官方解答核对。

题目 2：肥皂膜的颜色

将框架浸入肥皂液中，肥皂液形成一层长为 b 、高为 h 的矩形薄膜。白光以角度 α （相对于法线方向测量）照射薄膜。反射光呈现波长为 λ_0 的绿色。

a) 判断能否使用校准精度为 0.1 mg 的实验室天平测定肥皂膜的质量。

b) 从垂直于膜面的方向观察时，可能的最薄肥皂膜呈现什么颜色？推导相关方程。

常量及已知数据：相对折射率 $n = 1.33$ ，反射绿光的波长 $\lambda_0 = 500\text{ nm}$ ， $\alpha = 30^\circ$ ， $b = 0.020\text{ m}$ ， $h = 0.030\text{ m}$ ，密度 $\rho = 1000\text{ kg m}^{-3}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 允许的厚度和质量为

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

最薄的膜具有厚度 $d_{\min} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}$ 和质量 $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$, 因此无法用给定的天平可靠地测定其质量。更高的干涉级次对应更大的质量; 若未指定级次, 对于任意呈绿色的薄膜, 就无法无条件地回答能或不能。

- b) 当照明角度保持为 30° 时, 沿法线方向没有镜面反射光, 因此该方向上没有反射干涉色。理想薄膜在反射光下呈暗色。如果照明也沿法线方向入射, 则会出现 540 nm 的绿光极大值, 推导见下文。

解答

将薄膜视为均匀、两表面平行且周围为空气的平面薄膜。忽略吸收、折射率色散和边缘衍射。将题目给出的绿光波长理解为反射光强极大值所对应的波长。

a) 设 d 为薄膜厚度, r 为膜内的折射角。由斯涅尔定律可得

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

反射光包含在前表面反射的光, 以及进入薄膜、在后表面反射后再射出的光。在同一出射波前上比较这两束光的路径, 其几何光程差为

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

利用 $\sin \alpha = n \sin r$, 可得

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

在前侧空气—肥皂液界面上的反射会引入 π 的相位突变; 在后侧肥皂液—空气界面上的反射则不会。因此, 反射光发生相长干涉的条件为

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

即

$$\boxed{2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

对于在 λ_0 处观测到的极大值,

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

最小厚度对应于 $j = 0$:

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}.$$

质量等于密度乘以体积：

$$M_j = \rho b h d_j.$$

因此

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

这一质量小于天平的校准精度 0.1 mg。因此，无法用该天平可靠地称量厚度最小的薄膜。

干涉级次会影响判断：下一个允许的质量为

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

这一质量超过了给定的精度，尽管相对不确定度仍然很大。因此，仅凭绿光极大值，无法判断任意薄膜的质量是否足够大，能否进行有实际意义的称量。

b) 入射方向保持不变，入射角为 30° 。

前表面反射光线射出时与法线的夹角等于入射光线与法线的夹角。对于在膜内反射的光线，反射保持其膜内角度 r 不变，而出射时的折射满足

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

因此

$$\boxed{\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ}.$$

因此，所有参与干涉的反射光线都沿 30° 的镜面反射方向传播。沿法线方向观察的观察者，即 $\theta_{\text{out}} = 0$ ，接收不到这些光线。在上述近似下，

$$\boxed{I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0}.$$

因此，无论薄膜取哪一个允许的厚度，沿法线观察时都没有反射干涉色。若存在额外照明或散射，则需要进一步的信息。

为完整起见，同一厚度最小的薄膜在垂直入射照明并沿法线观察时，将满足

$$2nd_{\min} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}.$$

此时，其第一个反射极大值对应的波长为

$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\min} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

对应绿色。这一数值适用于改变后的照明几何条件。

解答已与官方解答核对。

题目 3：利用磁场使电子束射中靶

如图 2 所示，电子枪 T 在真空中发射经电势差 U 加速的电子，发射方向沿直线 a 。靶 M 放置在距电子枪 d 处，使连接 T 点与 M 点的线段与直线 a 成角 α ，如图 2 所示。求匀强磁场的磁感应强度 B ，其方向分别为

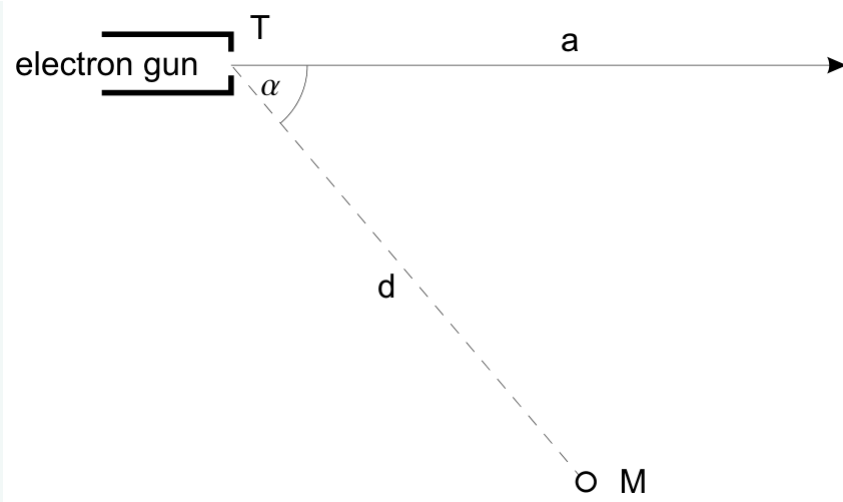


图 2:

- a) 垂直于直线 a 和点 M 所确定的平面
- b) 平行于线段 TM

使电子击中靶 M 。先求一般解，再代入以下数值： $U = 1000 \text{ V}$ 、 $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ 、 $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ 、 $\alpha = 60^\circ$ 、 $d = 5.0 \text{ cm}$ 、 $B < 0.030 \text{ T}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 磁场必须指向图 2 的纸面内，其大小为

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

- b) 平行于 TM 的两个方向均可。允许的磁感应强度大小为

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

代入所给数值，并考虑 $B < 0.030 \text{ T}$ 的限制，只有 $n = 1, 2, 3, 4$ 满足条件：

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

解答

用 $e > 0$ 表示电子电荷量的大小，因此电子所带电荷为 $-e$ 。采用非相对论力学，忽略电子加速前的初动能，并考察电子离开电子枪后在匀强磁场中的运动。

加速电势差提供动能：

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

磁场力

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

垂直于速度，因此不做功。所以，电子在整个运动过程中速率保持不变。

a) 磁场垂直于图示平面

速度始终垂直于磁场。磁场力为圆周运动提供向心力：

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

取 $T = (0, 0)$ ，初速度沿 x 轴正方向， y 轴正方向在图中向上。于是

$$M = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

轨道必须向下弯曲，因此其圆心为 $C = (0, -R)$ 。要求 M 位于此圆上，可得

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

因此

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

联立由几何关系和动力学关系得到的 R 的表达式，得

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

要确定磁场方向，注意到初始向右运动的电子必须受到向下的力。由于电子带负电，磁场必须指向纸面内。

代入所给数据，

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

这与非相对论近似相符。所需的半径为

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

磁感应强度为

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

这满足 $B < 0.030 \text{ T}$ 。

b) 磁场平行于 TM

将初速度分解为沿 TM 的分量和垂直于它的分量：

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

由于磁场力沿磁场方向的分量为零，平行分量保持不变。垂直分量对应匀速圆周运动，因此完整轨迹是一条轴线平行于 TM 的螺旋线。

对于圆周运动，

$$ev_{\perp} B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

所以其周期为

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

由于 T 和 M 仅在沿磁场方向的位置上存在差异，电子到达 M 时必须回到初始的横向位置。当 $v_{\perp} \neq 0$ 时，这恰好发生在电子转过整数圈 n 之后：

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

在这段时间内，沿 TM 的位移必须等于 d ：

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

因此，

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

将磁场反向会使旋转方向反转，但周期和沿 TM 的运动均保持不变。因此，平行于 TM 的两个磁场方向均可。

代入所给数值，基准磁感应强度大小为

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ T}.$$

上限条件要求

$$nB_1 < 0.030 \text{ T}, \quad n < 4.4743 \dots$$

因此，允许的整数及其对应的磁感应强度如下，数值保留两位有效数字：

完整转动的圈数 n	磁感应强度 B_n
1	$6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$
2	$1.3 \times 10^{-2} \text{ T}$
3	$2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$
4	$2.7 \times 10^{-2} \text{ T}$

下一个值 $B_5 \simeq 0.0335 \text{ T}$ 超过了限制。

这些离散解适用于图示的非零锐角。如果 $\alpha = 0$ ，电子本来就沿 TM 运动，任何平行磁场都不会改变这一直线运动。如果 $\cos \alpha \leq 0$ ，电子就无法到达沿 TM 正方向距离为正的靶，因为其在该方向上的速度分量不可能增大。

解答已与官方解答核对。