

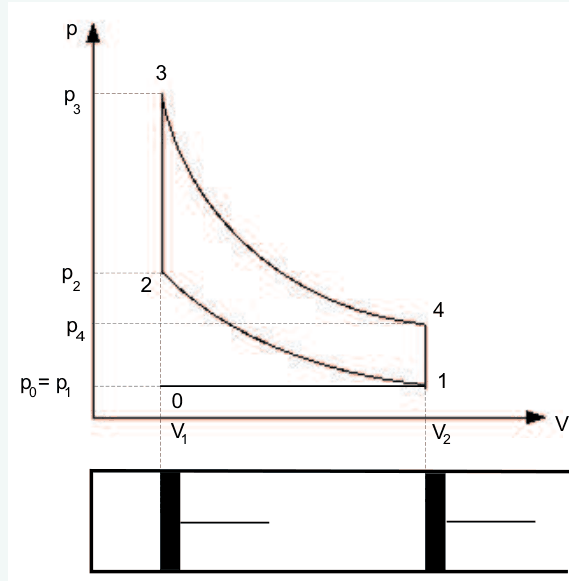
IPhO 1977

Teorik sorular ve çözümler · Hradec Králové, Çekoslovakya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1977/

Soru 1: Dört zamanlı bir içten yanmalı motorun Otto çevrimi

Dört zamanlı bir içten yanmalı motorun sıkıştırma oranı $\varepsilon = 9.5$ değerindedir. Motor, 27°C sıcaklıkta ve $1 \text{ atm} = 100 \text{ kPa}$ basınçta hava ve gaz yakıt emer. Sıkıştırma, 1 noktasından 2 noktasına kadar adyabatik bir süreç izler; bkz. Şekil 1. Karışımın ateşlenmesi sırasında (2–3) silindirdeki basınç iki katına çıkar. Sıcak egzoz gazı, pistonu aşağı doğru iterek adyabatik olarak V_2 hacmine kadar genişler (3–4). Ardından egzoz supabı açılır ve basınç başlangıçtaki 1 atm değerine döner. Silindirdeki tüm süreçlerin ideal olduğu varsayılmaktadır. Karışım ve egzoz gazı için Poisson sabiti (yani özgül ısıların oranı C_p/C_V) $\kappa = 1.40$ değerindedir. (Sıkıştırma oranı, piston en alt konumdayken silindirin hacminin, piston en üst konumdayken silindirin hacmine oranıdır.)



Şekil 1:

- 0–1, 2–3, 4–1, 1–0 noktaları arasında hangi süreçler gerçekleşir?
- 1, 2, 3 ve 4 durumlarındaki basınç ve sıcaklığı belirleyin.
- Çevrimin ısı verimini bulun.
- Elde edilen sonuçları tartışın. Gerçekçi midirler?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **a)** $0 \rightarrow 1$: sabit basınçta emme; $2 \rightarrow 3$: sabit hacimde yanma ve ısı girişi; $4 \rightarrow 1$: egzoz supabı açılırken sabit hacimde basınç düşüşü; ideal Otto çevriminde ısı atılmasıyla temsil edilir; $1 \rightarrow 0$: sabit basınçta egzoz.
- **b)** $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$ kullanılarak:

Durum	Basınç	Sıcaklık
1	100 kPa	300 K
2	$2.34 \times 10^3\text{ kPa}$	738 K
3	$4.68 \times 10^3\text{ kPa}$	$1.48 \times 10^3\text{ K}$
4	200 kPa	600 K

- **c)** $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$.
- **d)** Basınç ve sıcaklıkların büyüklük mertebeleri bir içten yanmalı motor için makuldür. Verim, iyimser bir ideal değerdir; ısı aktarımı, değişken ısı kapasiteleri, yanmanın sonlu sürede gerçekleşmesi ve gaz değişimi kayıpları gerçek verimi düşürür; sürtünme de mil çıkışını daha da azaltır.

Çözüm

a) Süreçlerin belirlenmesi

Silindirin en küçük ve en büyük hacimleri

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

olsun; burada V_1, V_2 şekildeki hacim etiketleridir. 2 ve 3 durumları $V_{\min}$ hacminde, 1 ve 4 durumları ise $V_{\max}$ hacminde gerçekleşir.

- **$0 \rightarrow 1$: Sabit basınçta emme.** Piston aşağı doğru hareket ederek $p_0 = p_1$ dış basıncında taze hava ve gaz yakıt emer.
- **$2 \rightarrow 3$: Sabit hacimde yanma.** İdealleştirilmiş ani yanma, piston üst konumunda kalırken basıncı ve sıcaklığı artırır. Hacmi sabit olduğundan gaz sınır işi yapmaz.
- **$4 \rightarrow 1$: Sabit hacimde basınç düşüşü.** Piston alt konumdayken egzoz supabı açılır ve silindir basıncı dış basınca ulaşınca kadar gaz dışarı çıkar. Bu hızlı egzoz boşalması, ideal kapalı Otto çevriminde sabit hacimde ısı atılmasıyla temsil edilir.
- **$1 \rightarrow 0$: Sabit basınçta egzoz.** Piston yukarı doğru hareket ederek egzoz gazını dış basınçta dışarı atar.

Emme ve egzoz sırasında silindir sınırından madde geçişi olur. Bu süreçlerin idealleştirilmiş basınç–hacim yolları çıkarılır.

b) Basınçlar ve sıcaklıklar

Çalışma gazını, ısı kapasiteleri sabit ve $\kappa = C_p/C_V = 1.40$ olan ideal bir gaz olarak ele alalım. Her ideal adyabatik strok sırasında

$$pV^\kappa = \text{sabit}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{sabit}.$$

Bu bağıntılar, birinci yasa olan

$$nC_V dT = -p dV,$$

ile $pV = nRT$ ve $R/C_V = \kappa - 1$ bağıntılarının birlikte kullanılmasından elde edilir; burada C_V molar ısı kapasitesidir.

1 durumunda, verilen koşullardan

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

elde edilir.

Adyabatik sıkıştırma $1 \rightarrow 2$ sırasında

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$
$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

Sayısal olarak

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^\kappa = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

olduğundan

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

Sabit hacimde ateşleme $2 \rightarrow 3$ sırasında basınç iki katına çıkar. İdeal çalışma gazı yaklaşımında, sabit hacimde p/T sabittir; dolayısıyla

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

Böylece

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

Adyabatik genleşme $3 \rightarrow 4$ sırasında

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^\kappa = \frac{2p_1 \varepsilon^\kappa}{\varepsilon^\kappa} = 2p_1,$$
$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

c) Isıl verim

Gazın yaptığı işi pozitif kabul edelim. Emme ve egzoz stroklarının iş katkıları eşit büyüklükte ve zıt işaretlidir:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

Bu nedenle birbirlerini götürürler. Sabit hacimli süreçlerde sınır işi yapılmaz.

İki adyabatik strok için birinci yasa

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

sonucunu verir. Buna göre çevrim başına net iş

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

olur.

Yanma enerjisi, sabit hacimde verilen ısı ile temsil edilir:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

Buradan

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

$nC_V(T_4 - T_1)$ niceliği, kapalı Otto çevrimi gösteriminde atılan eşdeğer ısıdır.

$T_3 = 2T_2$ ve $T_4 = 2T_1$ olduğundan

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

Dolayısıyla

$$\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%.$$

Bu ideal modelde verim, sıkıştırma oranına ve κ değerine bağlıdır. Belirtilen basınç ikiye katlanması, sıcaklıkları ve silindire alınan her bir gaz dolumu başına yapılan işi belirler; ancak verim ifadesinde sadeleşir.

d) Gerçekçiliğin tartışılması

Sıkıştırma sonundaki sıcaklık yaklaşık 465°C , en yüksek sıcaklık yaklaşık 1200°C ve en yüksek basınç yaklaşık 4.68 MPa değerindedir. Bunlar, bir içten yanmalı motor için makul büyüklük mertebeleridir.

Genleşmenin sonunda gaz hâlâ yaklaşık 327°C sıcaklıkta ve atmosfer basıncının iki katı basınçtaadır. Dolayısıyla egzoz hâlâ önemli miktarda enerji taşır. İdeal çevrim bile verilen enerjinin

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

kadarını dışarı atar.

Gerçek bir motor, modelden çeşitli yönlerden farklılık gösterir:

- Sıcak gazdan silindir duvarlarına ısı geçer; bu nedenle sıkıştırma ve genleşme tam olarak adyabatik değildir.
- Yanma, piston hareket ederken sonlu bir sürede gerçekleşir; dolayısıyla ısı girişi tam olarak sabit hacimde olmaz.
- Isı kapasiteleri sıcaklığa ve bileşime bağlıdır. Yüksek sıcaklıkta artmaları, sabit $\kappa = 1.40$ kabulünü iyimser bir yaklaşım hâline getirir.
- Emme ve egzoz, supapların iki tarafı arasında basınç farkları gerektirir ve bu da pompalama kayıplarına yol açar; bu süreçlerin iş katkıları artık birbirini tam olarak götürmez.
- Eksik yanma ve mekanik sürtünme yararlı çıkışı azaltır.

Ayrıca gerçek egzoz boşalması açık bir süreçtir: dışarı çıkan gaz, silindirden enerji taşır ve emme sırasında taze bir gaz dolumu sağlanır. Sabit miktardaki bir gaz dolumunun sabit hacimde soğutulması, bunun ideal Otto çevrimindeki gösterimidir.

Dolayısıyla hesaplanan 59.4%, belirtilen ideal modelin verimidir; gerçek verim ve mil çıkışı daha düşük olacaktır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Sabun filminin renkleri

Çerçeve bir sabun çözeltisine daldırıldığında sabun, uzunluğu b ve yüksekliği h olan dikdörtgen bir film oluşturur. Beyaz ışık filme α açısıyla (normal doğrultusuna göre ölçülen) düşer. Yansıyan ışık, dalga boyu λ_0 olan yeşil bir renk gösterir.

a) Kalibrasyon doğruluğu 0.1 mg olan laboratuvar terazisi kullanılarak sabun filminin kütlesinin belirlenip belirlenemeyeceğini bulun.

b) Mümkün olan en ince sabun filmi, dik doğrultudan bakıldığında hangi renkte görünür? İlgili denklemleri türetin.

Sabitler ve verilen bilgiler: bağıl kırılma indisi $n = 1.33$, yansıyan yeşil ışığın dalga boyu $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, $\alpha = 30^\circ$, $b = 0.020 \text{ m}$, $h = 0.030 \text{ m}$, yoğunluk $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) İzin verilen kalınlıklar ve kütleler şunlardır:

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

En ince filmin kalınlığı $d_{\min} \simeq 0.10 \text{ }\mu\text{m}$ ve kütlesi $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$ olduğundan, kütlesi belirtilen teraziyle güvenilir biçimde belirlenemez. Daha yüksek mertebeler daha büyük kütleler verir; mertebe belirtilmeden, herhangi bir yeşil film için koşulsuz bir evet ya da hayır yanıtı verilemez.

- b) Aydınlatma açısı 30° olarak kaldığında, **normal doğrultusunda aynasal olarak yansıyan ışık yoktur**; dolayısıyla bu doğrultuda yansıyan ışıpta bir girişim rengi görülmez. İdeal film yansıyan ışıpta karanlık görünür. Aşağıda türetildiği gibi, aydınlatma da normal doğrultusunda olsaydı 540 nm dalga boyunda yeşil bir maksimum oluşurdu.

Çözüm

Filmi düzgün kalınlıklı, düzlem-paralel ve havayla çevrili kabul edin. Soğurmayı, kırılma indisinin dalga boyuna bağlı değişimini ve kenar kırınımını ihmal edin. Belirtilen yeşil dalga boyunu, yansıyan ışık şiddetinin bir maksimumu olarak yorumlayın.

a) Filmin kalınlığı d , film içindeki kırılma açısı ise r olsun. Snell yasası şunu verir:

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

Yansıyan ışık, ön yüzeyden gelen bir katkı ile filme girip arka yüzeyden yansıdıktan sonra dışarı çıkan başka bir katkı içerir. Bu katkıların yolları, dışarı çıkan ortak bir dalga cephesinde karşılaştırıldığında, geometriden kaynaklanan optik yol farkları şöyledir:

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

$\sin \alpha = n \sin r$ kullanılarak,

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

Öndeki hava-sabun arayüzünde yansıma, π büyüklüğünde bir faz terslenmesine yol açar; arkadaki sabun-hava arayüzünde yansıma ise böyle bir terslenmeye yol açmaz. Dolayısıyla, yansımada yapıcı girişim için şu koşul sağlanmalıdır:

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

ya da

$$\boxed{2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

λ_0 dalga boyunda gözlenen maksimum için,

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

En küçük kalınlık $j = 0$ değerine karşılık gelir:

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}.$$

Kütle, yoğunluk ile hacmin çarpımıdır:

$$M_j = \rho b h d_j.$$

Böylece

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

Bu değer, terazinin 0.1 mg olan kalibrasyon doğruluğundan küçüktür. Dolayısıyla, en küçük kalınlıktaki film bu teraziyle güvenilir biçimde tartılamaz.

Girişim mertebesi önemlidir: izin verilen bir sonraki kütle

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

olup belirtilen doğruluk değerini aşar; ancak bağıl belirsizlik yine de büyük olacaktır. Bu nedenle, yalnızca yeşil maksimumun gözlenmesi, herhangi bir filmin anlamlı bir tartım için yeterince büyük kütleye sahip olup olmadığını belirlemez.

b) Gelme doğrultusu 30° açısında sabit kalır.

Ön yüzeyden yansıyan ışın, normalle gelen ışının yaptığı açıya eşit bir açı yaparak uzaklaşır. Film içinde yansıyan ışın için yansıma, film içindeki r açısını korur ve dışarı çıkıştaki kırılma şunu verir:

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

Dolayısıyla

$$\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ.$$

Böylece, girişim yapan yansımış ışınların tümü 30° açısındaki aynasal yansıma doğrultusunda ilerler. Normal doğrultusunda, $\theta_{\text{out}} = 0$ yönünde bakan bir gözlemciye bu ışınların hiçbiri ulaşmaz. Belirtilen yaklaşımlar altında,

$$I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0.$$

Dolayısıyla film, izin verilen kalınlıklardan hangisine sahip olursa olsun, **normal doğrultusundan bakıldığında yansıyan ışıpta bir girişim rengi görülmez**. Ek aydınlatma veya saçılma söz konusu olsaydı daha fazla bilgi gerekirdi.

Konuyu tamamlamak için, aynı en küçük kalınlıktaki film, **normal doğrultusunda aydınlatma ve normal doğrultusunda gözlem** altında şu koşulu sağlardı:

$$2nd_{\text{min}} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}.$$

Bu durumda yansıyan ışığın ilk maksimumu

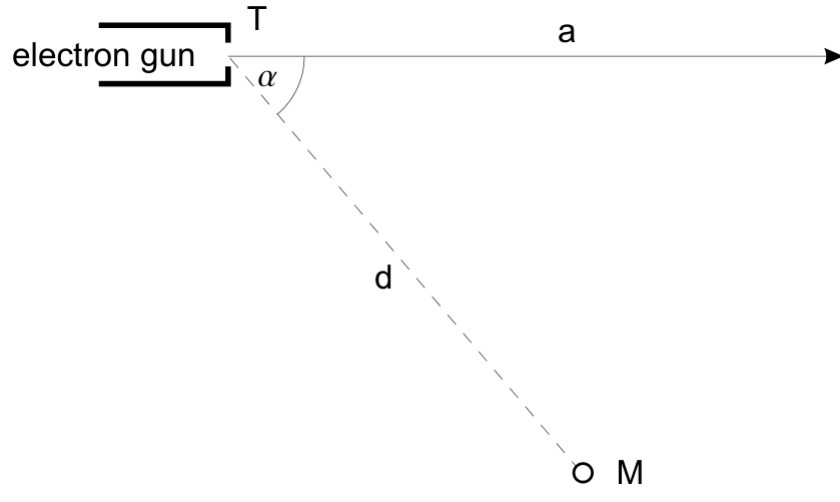
$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\text{min}} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

dalga boyunda olurdu; bu da yeşildir. Bu değer, değiştirilmiş olan bu aydınlatma geometrisi için geçerlidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Manyetik alanla bir hedefe yönlendirilen elektron demeti

Bir elektron tabancası T , vakumda U potansiyel farkıyla hızlandırılmış elektronları Şekil 2'de gösterildiği gibi a doğrusu yönünde yaymaktadır. M hedefi, elektron tabancasından d uzaklığa, T ve M noktalarını birleştiren doğru parçası ile a doğrusu arasında Şekil 2'de gösterildiği gibi α açısı olacak şekilde yerleştirilmiştir. Elektronların M hedefine çarpması için düzgün manyetik alanın



Şekil 2:

- a) a doğrusu ve M noktası tarafından belirlenen düzleme dik
b) TM doğru parçasına paralel

olduğu durumlarda manyetik indüksiyon B 'yi bulunuz. Önce genel çözümü bulunuz, ardından şu değerleri yerine koyunuz: $U = 1000 \text{ V}$, $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = 5.0 \text{ cm}$, $B < 0.030 \text{ T}$.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Alan, Şekil 2'de **sayfanın içine doğru** yönelmeli ve büyüklüğü

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T.}$$

olmalıdır.

- b) TM 'ye paralel her iki yön de mümkündür. İzin verilen büyüklükler

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Verilen değerler ve $B < 0.030 \text{ T}$ koşulu altında yalnızca $n = 1, 2, 3, 4$ değerlerine izin verilir:

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T.}$$

Çözüm

$e > 0$, elektronun yükünün büyüklüğünü gösterebilir; bu durumda yükü $-e$ 'dir. Göreli olmayan mekaniği kullanıyor, hızlandırma öncesindeki başlangıç kinetik enerjisini ihmal ediyor ve elektronların tabancadan çıktıktan sonra düzgün manyetik alandaki hareketini ele alıyoruz.

Hızlandırıcı potansiyel farkı kinetik enerji sağlar:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Manyetik kuvvet

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

hıza diktir ve dolayısıyla iş yapmaz. Bu nedenle sürat, yörünge boyunca sabit kalır.

a) Şekil düzlemine dik alan

Hız, manyetik alana dik kalır. Manyetik kuvvet, çembersel hareket için gerekli merkezci kuvveti sağlar:

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

$T = (0, 0)$ alalım; başlangıç hızı pozitif x eksenini yönünde, pozitif y eksenini ise şekilde yukarı doğru olsun. Bu durumda

$$\mathbf{M} = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

Yörünge aşağıya doğru kıvrılmalıdır; dolayısıyla merkezi $C = (0, -R)$ 'dir. M 'nin bu çember üzerinde bulunması koşulu

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

eşitliğini verir. Böylece

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

R için geometrik ve dinamik ifadeleri birleştirirsek,

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

Yönü belirlemek için, başlangıçta sağa doğru hareket eden bir elektrona aşağıya doğru bir kuvvet etki etmesi gerektiğine dikkat edelim. Yükü negatif olduğundan, alan **sayfanın içine doğru** yönelmelidir.

Verilen değerler için,

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

bulunur; bu değer görelî olmayan yaklaşımla tutarlıdır. Gerekli yarıçap

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

ve alan

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

olarak bulunur. Bu, $B < 0.030 \text{ T}$ koşulunu sağlar.

b) TM 'ye paralel alan

Başlangıç hızını TM doğrultusundaki ve ona dik bileşenlerine ayıralım:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Manyetik kuvvetin alan doğrultusunda bir bileşeni olmadığından, paralel bileşen sabit kalır. Dik bileşen düzgün çembersel harekete yol açar; dolayısıyla tam yörünge, eksenini TM 'ye paralel olan bir helistir.

Çembersel hareket için,

$$ev_{\perp}B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

Buna göre periyodu

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

olur.

T ve M yalnızca alan doğrultusundaki konumları bakımından farklı olduğundan, elektron M 'ye ulaştığında başlangıçtaki enine konumuna dönmüş olmalıdır. $v_{\perp} \neq 0$ için bu, tam olarak bir tam sayı n kadar tam tur atıldıktan sonra gerçekleşir:

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bu süre boyunca TM doğrultusundaki yer değiştirme d 'ye eşit olmalıdır:

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

Dolayısıyla,

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Manyetik alanın yönünü tersine çevirmek dönme yönünü tersine çevirir, ancak hem periyodu hem de TM doğrultusundaki hareketi değiştirmez. Dolayısıyla **TM 'ye paralel her iki alan yönü de hedefe ulaşmayı sağlar.**

Verilen sayısal değerler için temel alan büyüklüğü

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ T}.$$

olur. Üst sınır şu koşulu gerektirir:

$$nB_1 < 0.030 \text{ T}, \quad n < 4.4743 \dots$$

Böylece izin verilen tam sayılar ve bunlara karşılık gelen, iki anlamlı basamağa yuvarlanmış alan değerleri şunlardır:

Tam tur sayısı n	Manyetik indüksiyon B_n
1	$6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$
2	$1.3 \times 10^{-2} \text{ T}$
3	$2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$
4	$2.7 \times 10^{-2} \text{ T}$

Bir sonraki değer olan $B_5 \simeq 0.0335 \text{ T}$, sınırı aşar.

Bu ayrıık çözümler, şekilde gösterilen sıfırdan farklı dar açı için geçerlidir. Eğer $\alpha = 0$ ise elektronlar zaten TM doğrultusunda hareket eder ve herhangi bir paralel manyetik alan bu doğrusal hareketi değiştirmez. Eğer $\cos \alpha \leq 0$ ise elektronlar, TM doğrultusunda pozitif bir uzaklıktaki hedefe ulaşamaz; çünkü bu yöndeki hız bileşenleri artamaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.