

IPhO 1977

Теоретические задачи и решения · Градец-Кралове, Чехословакия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1977/

Задача 1: Цикл Отто четырёхтактного двигателя внутреннего сгорания

Степень сжатия четырёхтактного двигателя внутреннего сгорания равна $\varepsilon = 9.5$. В двигатель поступают воздух и газообразное топливо при температуре 27°C и давлении $1\text{ atm} = 100\text{ kPa}$. Сжатие происходит адиабатически от точки 1 до точки 2, см. рис. 1. При воспламенении смеси (2–3) давление в цилиндре удваивается. Горячие продукты сгорания адиабатически расширяются до объёма V_2 , толкая поршень вниз (3–4). Затем открывается выпускной клапан, и давление возвращается к начальному значению 1 atm . Все процессы в цилиндре считаются идеальными. Показатель адиабаты (то есть отношение теплоёмкостей C_p/C_V) смеси и продуктов сгорания равен $\kappa = 1.40$. (Степень сжатия — это отношение объёма цилиндра при нижнем положении поршня к объёму при его верхнем положении.)

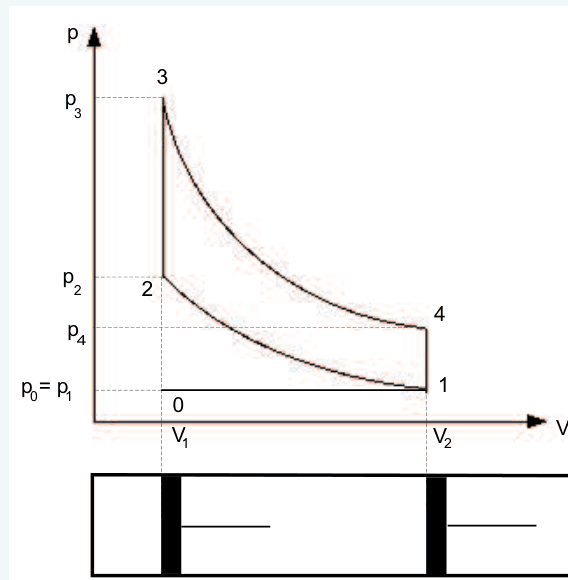


Рисунок 1:

- Какие процессы происходят между точками 0–1, 2–3, 4–1, 1–0?
- Определите давление и температуру в состояниях 1, 2, 3 и 4.
- Найдите термический КПД цикла.
- Обсудите полученные результаты. Реалистичны ли они?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **а)** $0 \rightarrow 1$: изобарный впуск; $2 \rightarrow 3$: сгорание и подвод теплоты при постоянном объёме; $4 \rightarrow 1$: понижение давления при постоянном объёме после открытия выпускного клапана, представляемое в идеальном цикле Отто отводом теплоты; $1 \rightarrow 0$: изобарный выпуск.
- **б)** При использовании приближения $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$:

Состояние	Давление	Температура
1	100 kPa	300 K
2	$2.34 \times 10^3\text{ kPa}$	738 K
3	$4.68 \times 10^3\text{ kPa}$	$1.48 \times 10^3\text{ K}$
4	200 kPa	600 K

- **с)** $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$.
- **д)** Полученные давления и температуры по порядку величины правдоподобны для двигателя внутреннего сгорания. КПД представляет собой оптимистичное идеальное значение; теплообмен, переменные теплоёмкости, конечная длительность сгорания и потери при газообмене снижают фактический КПД, а трение дополнительно уменьшает полезную работу на валу.

Решение

а) Определение процессов

Пусть минимальный и максимальный объёмы цилиндра равны

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

где V_1, V_2 — обозначения объёмов на рисунке. Состояния 2 и 3 соответствуют объёму $V_{\min}$, а состояния 1 и 4 — объёму $V_{\max}$.

- **$0 \rightarrow 1$: Изобарный впуск.** Поршень движется вниз, всасывая свежий воздух и газообразное топливо при внешнем давлении $p_0 = p_1$.
- **$2 \rightarrow 3$: Изохорное сгорание.** Идеализированное мгновенное сгорание повышает давление и температуру, пока поршень остаётся в верхнем положении. Газ не совершает работы по перемещению своей границы, поскольку его объём постоянен.
- **$4 \rightarrow 1$: Изохорное понижение давления.** Выпускной клапан открывается при нижнем положении поршня, и газ выходит до тех пор, пока давление в цилиндре не сравняется с внешним. В идеальном замкнутом цикле Отто этот быстрый выпуск газа представляется отводом теплоты при постоянном объёме.
- **$1 \rightarrow 0$: Изобарный выпуск.** Поршень движется вверх, вытесняя продукты сгорания при внешнем давлении.

При впуске и выпуске вещество пересекает границу цилиндра. Идеализированные траектории этих процессов на диаграмме давление–объём совпадают.

б) Давления и температуры

Будем считать рабочий газ идеальным, с постоянными теплоёмкостями и $\kappa = C_p/C_V = 1.40$. В ходе каждого идеального адиабатического такта

$$pV^\kappa = \text{постоянная}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{постоянная}.$$

Эти соотношения следуют из первого начала термодинамики,

$$nC_V dT = -p dV,$$

совместно с $pV = nRT$ и $R/C_V = \kappa - 1$, где C_V — молярная теплоёмкость.

Для **состояния 1** из заданных условий получаем

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

При **адиабатическом сжатии** $1 \rightarrow 2$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

Численно

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^\kappa = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

поэтому

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

При **воспламенении при постоянном объёме** $2 \rightarrow 3$ давление удваивается. В приближении идеального рабочего газа отношение p/T при фиксированном объёме постоянно, следовательно,

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

Таким образом,

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

При **адиабатическом расширении** $3 \rightarrow 4$

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^\kappa = \frac{2p_1 \varepsilon^\kappa}{\varepsilon^\kappa} = 2p_1,$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

Следовательно,

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

с) Термический КПД

Будем считать работу, совершаемую газом, положительной. Работы в тактах впуска и выпуска равны по модулю и противоположны по знаку:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

Поэтому они взаимно компенсируются. В процессах при постоянном объёме работа по перемещению границы газа не совершается.

Для двух адиабатических тактов первое начало термодинамики даёт

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

Следовательно, суммарная работа за цикл равна

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

Энергия сгорания представляется теплотой, подведённой при постоянном объёме:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

Отсюда

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Величина $nC_V(T_4 - T_1)$ — эквивалентная отведённая теплота в представлении процесса замкнутым циклом Отто.

Поскольку $T_3 = 2T_2$ и $T_4 = 2T_1$,

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%.$$

В рамках этой идеальной модели КПД зависит от степени сжатия и κ . Заданное удвоение давления определяет температуры и работу в расчёте на одну порцию рабочей смеси, но сокращается в выражении для КПД.

d) Обсуждение реалистичности результатов

Температура в конце сжатия составляет приблизительно 465°C , максимальная температура — приблизительно 1200°C , а максимальное давление — приблизительно 4.68 МПа. По порядку величины эти значения разумны для двигателя внутреннего сгорания.

В конце расширения температура газа всё ещё составляет приблизительно 327°C , а давление вдвое превышает атмосферное. Таким образом, отработавшие газы по-прежнему уносят значительную энергию. Даже в идеальном цикле отводится

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

подведённой энергии.

Реальный двигатель отличается от модели в нескольких отношениях:

- Теплота передаётся от горячего газа стенкам цилиндра, поэтому сжатие и расширение не являются строго адиабатическими.
- Сгорание занимает конечное время, в течение которого поршень движется, поэтому подвод теплоты не является строго изохорным.
- Теплоёмкости зависят от температуры и состава. Их увеличение при высокой температуре делает постоянное значение $\kappa = 1.40$ оптимистичным приближением.

- Для впуска и выпуска необходимы перепады давления на клапанах, что приводит к насосным потерям; работы этих процессов уже не компенсируются в точности.
- Неполное сгорание и механическое трение уменьшают полезную работу.

Кроме того, реальный выпуск газа — открытый процесс: выходящий газ уносит энергию из цилиндра, а при впуске поступает свежая порция смеси. В идеальном цикле Отто этот процесс представляется охлаждением неизменной порции газа при постоянном объёме.

Таким образом, рассчитанное значение 59.4% — это КПД заданной идеальной модели; фактический КПД и полезная работа на валу будут ниже.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Цвета мыльной плёнки

При погружении рамки в мыльный раствор образуется прямоугольная мыльная плёнка длиной b и высотой h . Белый свет падает на плёнку под углом α (отсчитываемым от нормали). Отражённый свет имеет зелёный цвет с длиной волны λ_0 .

а) Выясните, можно ли определить массу мыльной плёнки с помощью лабораторных весов, точность калибровки которых составляет 0.1 mg.

б) Какой цвет имеет самая тонкая из возможных мыльных плёнок при наблюдении в направлении, перпендикулярном её поверхности? Выведите соответствующие уравнения.

Постоянные и исходные данные: относительный показатель преломления $n = 1.33$, длина волны отражённого зелёного света $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, $\alpha = 30^\circ$, $b = 0.020 \text{ m}$, $h = 0.030 \text{ m}$, плотность $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **а)** Допустимые толщины и массы равны

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Самая тонкая плёнка имеет толщину $d_{\min} \simeq 0.10 \text{ }\mu\text{m}$ и массу $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$, поэтому её массу нельзя надёжно определить с помощью указанных весов. Более высоким порядкам соответствуют большие массы; без указания порядка для произвольной зелёной плёнки нельзя дать безусловный ответ «да» или «нет».

- **б)** Если угол падения света остаётся равным 30° , **вдоль нормали нет зеркально отражённого света**, а значит, в этом направлении отсутствует и интерференционная окраска в отражённом свете. Идеальная плёнка выглядит тёмной в отражённом свете. Зелёный максимум на длине волны 540 nm возник бы, если бы свет также падал по нормали, как показано ниже.

Решение

Будем считать плёнку однородной, плоскопараллельной и окружённой воздухом. Пренебрежём поглощением, дисперсией показателя преломления и дифракцией на краях. Будем понимать указанную длину волны зелёного света как положение максимума интенсивности отражённого света.

а) Пусть d — толщина плёнки, а r — угол преломления внутри неё. Закон Снеллиуса даёт

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

В отражённом свете присутствует вклад от передней поверхности, а также вклад света, который входит в плёнку, отражается от задней поверхности и выходит наружу. Сравнивая их пути до общего выходящего волнового фронта, получаем геометрическую оптическую разность хода

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

Используя $\sin \alpha = n \sin r$, получаем

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

При отражении от передней границы воздух–мыльный раствор фаза изменяется на π ; при отражении от задней границы мыльный раствор–воздух такого изменения фазы нет.

Следовательно, для интерференционного усиления в отражённом свете необходимо выполнение условия

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

или

$$2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Для наблюдаемого максимума при λ_0

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Минимальная толщина соответствует $j = 0$:

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}.$$

Масса равна произведению плотности на объём:

$$M_j = \rho b h d_j.$$

Таким образом,

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

Это значение меньше точности калибровки весов, составляющей 0.1 mg. Следовательно, плёнку минимальной толщины нельзя надёжно взвесить на этих весах.

Порядок интерференции имеет значение: следующая допустимая масса равна

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

что превышает указанную точность, хотя относительная погрешность всё ещё была бы большой. Поэтому одного лишь зелёного максимума недостаточно, чтобы установить, достаточно ли велика масса произвольной плёнки для взвешивания с приемлемой точностью.

b) Направление падающего света остаётся неизменным: угол падения равен 30° .

Луч, отражённый от передней поверхности, выходит под тем же углом к нормали, что и падающий луч. Для луча, отражённого внутри плёнки, отражение сохраняет внутренний угол r , а преломление при выходе даёт

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ.$$

Таким образом, все интерферирующие отражённые лучи распространяются в направлении зеркального отражения под углом 30° . К наблюдателю, смотрящему вдоль нормали, $\theta_{\text{out}} = 0$, ни один из этих лучей не попадает. В рамках указанных приближений

$$I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0.$$

Следовательно, **при наблюдении по нормали интерференционная окраска в отражённом свете отсутствует**, независимо от того, какую из допустимых толщин имеет плёнка. Для учёта дополнительного освещения или рассеяния потребовалась бы дополнительная информация.

Для полноты рассмотрения отметим, что для той же плёнки минимальной толщины при **нормальном падении света и наблюдении по нормали** выполнялось бы условие

$$2nd_{\min} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}.$$

Тогда её первый максимум в отражённом свете находился бы на длине волны

$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\min} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

что соответствует зелёному цвету. Это значение относится к изменённой геометрии освещения.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Электронный пучок, направляемый на мишень магнитным полем

Электронная пушка T испускает в вакууме электроны, ускоренные разностью потенциалов U , вдоль прямой a , как показано на рис. 2. Мишень M расположена на расстоянии d от электронной пушки так, что отрезок, соединяющий точки T и M , образует с прямой a угол α , как показано на рис. 2. Найдите магнитную индукцию B однородного магнитного поля

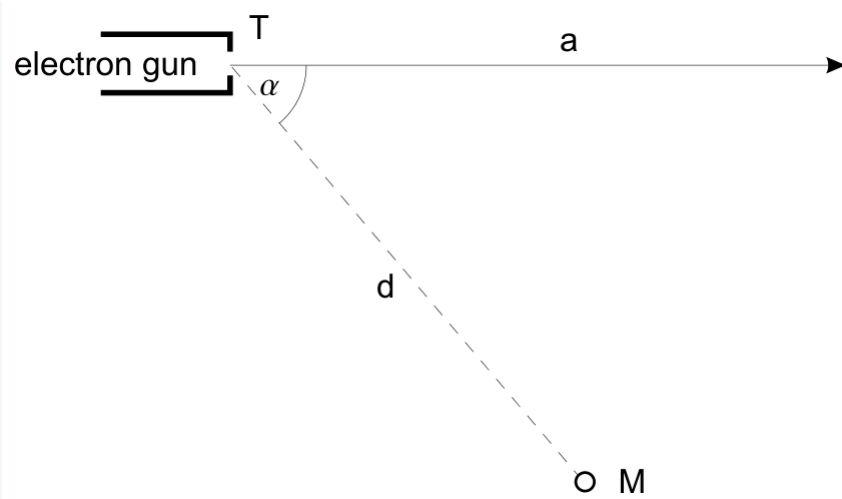


Рисунок 2:

- a) перпендикулярного плоскости, определяемой прямой a и точкой M
- b) параллельного отрезку TM

при которой электроны попадают в мишень M . Сначала найдите общее решение, а затем подставьте следующие значения: $U = 1000 \text{ V}$, $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = 5.0 \text{ cm}$, $B < 0.030 \text{ T}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** Поле должно быть направлено **вглубь страницы** на рис. 2, а его индукция по модулю должна составлять

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

- **b)** Возможно любое из двух направлений, параллельных TM . Допустимые значения модуля магнитной индукции:

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

При заданных значениях и условии $B < 0.030 \text{ T}$ допустимы только $n = 1, 2, 3, 4$:

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

Решение

Обозначим через $e > 0$ модуль заряда электрона, так что его заряд равен $-e$. Будем использовать нерелятивистскую механику, пренебрегать начальной кинетической энергией до ускорения и рассматривать движение в однородном магнитном поле после выхода электронов из пушки.

Ускоряющая разность потенциалов сообщает электронам кинетическую энергию:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Магнитная сила

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

перпендикулярна скорости и поэтому не совершает работы. Следовательно, модуль скорости остаётся постоянным на всей траектории.

а) Поле перпендикулярно плоскости рисунка

Скорость остаётся перпендикулярной магнитному полю. Магнитная сила служит центростремительной силой при движении по окружности:

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

Положим $T = (0, 0)$, направив начальную скорость вдоль положительного направления оси x , а положительное направление оси y — вверх на рисунке. Тогда

$$M = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

Траектория должна изгибаться вниз, поэтому её центр находится в точке $C = (0, -R)$. Условие принадлежности точки M этой окружности даёт

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

Отсюда

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

Объединяя геометрическое и динамическое выражения для R , получаем

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

Чтобы определить направление, заметим, что на электрон, первоначально движущийся вправо, должна действовать сила, направленная вниз. Поскольку его заряд отрицателен, поле должно быть направлено **вглубь страницы**.

Для заданных значений

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

что согласуется с нерелятивистским приближением. Требуемый радиус равен

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

а магнитная индукция составляет

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

Это удовлетворяет условию $B < 0.030 \text{ T}$.

б) Поле параллельно TM

Разложим начальную скорость на составляющие вдоль TM и перпендикулярно ему:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Продольная составляющая остаётся постоянной, поскольку магнитная сила не имеет составляющей вдоль поля. Поперечная составляющая обуславливает равномерное движение по окружности, поэтому полная траектория представляет собой винтовую линию, ось которой параллельна TM .

Для движения по окружности

$$ev_{\perp}B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

Следовательно, его период равен

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Поскольку точки T и M различаются лишь положением вдоль направления поля, при достижении M электрон должен вернуться в исходное положение в поперечной плоскости. При $v_{\perp} \neq 0$ это происходит в точности через целое число n полных оборотов:

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

За это время перемещение вдоль TM должно составить d :

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

Следовательно,

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Изменение направления магнитного поля на противоположное меняет направление вращения, но оставляет неизменными как период, так и движение вдоль TM . Таким образом, **подходят оба направления поля, параллельные TM** .

Для заданных численных значений наименьший модуль магнитной индукции равен

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ Т.}$$

Ограничение сверху требует

$$nB_1 < 0.030 \text{ Т}, \quad n < 4.4743 \dots$$

Таким образом, допустимые целые числа и соответствующие значения магнитной индукции, округлённые до двух значащих цифр, составляют

Число полных оборотов n	Магнитная индукция B_n
1	$6.7 \times 10^{-3} \text{ Т}$
2	$1.3 \times 10^{-2} \text{ Т}$
3	$2.0 \times 10^{-2} \text{ Т}$
4	$2.7 \times 10^{-2} \text{ Т}$

Следующее значение, $B_5 \simeq 0.0335 \text{ Т}$, превышает установленный предел.

Эти дискретные решения применимы к изображённому ненулевому острому углу. Если $\alpha = 0$, электроны уже движутся вдоль TM , и любое параллельное магнитное поле оставляет это прямолинейное движение неизменным. Если $\cos \alpha \leq 0$, электроны не могут достичь мишени, находящейся на положительном расстоянии вдоль TM , поскольку составляющая их скорости в этом направлении не может увеличиваться.

Решение проверено по официальному решению.