

IPhO 1977

Problemas teóricos y soluciones · Hradec Králové, Checoslovaquia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1977/

Problema 1: Ciclo Otto de un motor de combustión de cuatro tiempos

La relación de compresión de un motor de combustión interna de cuatro tiempos es $\varepsilon = 9.5$. El motor aspira aire y combustible gaseoso a una temperatura de 27°C y a una presión de $1\text{ atm} = 100\text{ kPa}$. La compresión sigue un proceso adiabático desde el punto 1 hasta el punto 2, véase la Fig. 1. La presión en el cilindro se duplica durante el encendido de la mezcla (2–3). Los gases de escape calientes se expanden adiabáticamente hasta el volumen V_2 , empujando el pistón hacia abajo (3–4). A continuación, se abre la válvula de escape y la presión vuelve al valor inicial de 1 atm . Se supone que todos los procesos en el cilindro son ideales. La constante de Poisson (es decir, la relación entre los calores específicos C_p/C_V) de la mezcla y de los gases de escape es $\kappa = 1.40$. (La relación de compresión es el cociente entre el volumen del cilindro cuando el pistón está en su posición inferior y el volumen cuando el pistón está en su posición superior.)

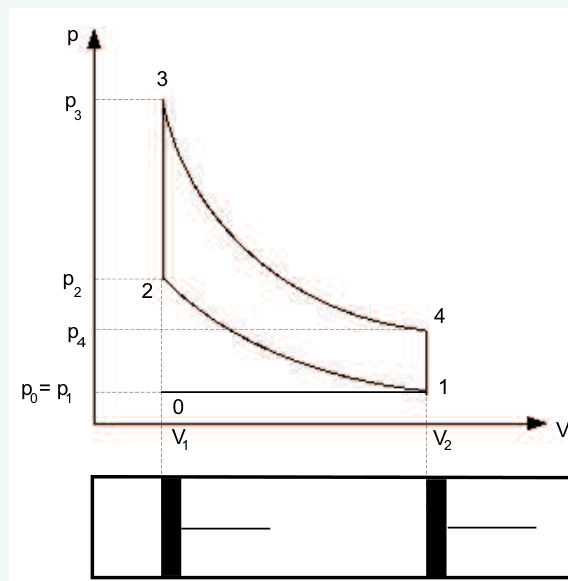


Figura 1:

- ¿Qué procesos tienen lugar entre los puntos 0–1, 2–3, 4–1, 1–0?
- Determine la presión y la temperatura en los estados 1, 2, 3 y 4.
- Halle el rendimiento térmico del ciclo.
- Analice los resultados obtenidos. ¿Son realistas?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** $0 \rightarrow 1$: admisión isobárica; $2 \rightarrow 3$: combustión y aporte de calor a volumen constante; $4 \rightarrow 1$: disminución de la presión a volumen constante al abrirse la válvula de escape, representada por una cesión de calor en el ciclo Otto ideal; $1 \rightarrow 0$: escape isobárico.
- **b)** Utilizando $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$:

Estado	Presión	Temperatura
1	100 kPa	300 K
2	$2.34 \times 10^3\text{ kPa}$	738 K
3	$4.68 \times 10^3\text{ kPa}$	$1.48 \times 10^3\text{ K}$
4	200 kPa	600 K

- **c)** $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$.
- **d)** Las presiones y las temperaturas tienen órdenes de magnitud plausibles para un motor de combustión. El rendimiento es un valor ideal optimista; la transferencia de calor, las capacidades caloríficas variables, la duración finita de la combustión y las pérdidas asociadas al intercambio de gases reducen el rendimiento real, y la fricción reduce aún más la potencia útil en el eje.

Solución

a) Identificación de los procesos

Sean los volúmenes mínimo y máximo del cilindro

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

donde V_1, V_2 son las etiquetas de volumen de la figura. Los estados 2 y 3 corresponden a $V_{\min}$; los estados 1 y 4 corresponden a $V_{\max}$.

- **$0 \rightarrow 1$: Admisión isobárica.** El pistón se desplaza hacia abajo, aspirando aire fresco y combustible gaseoso a la presión exterior $p_0 = p_1$.
- **$2 \rightarrow 3$: Combustión isócara.** La combustión idealizada como instantánea eleva la presión y la temperatura mientras el pistón permanece en su posición superior. El gas no realiza trabajo de expansión porque su volumen es constante.
- **$4 \rightarrow 1$: Disminución isócara de la presión.** La válvula de escape se abre con el pistón en su posición inferior, y el gas sale hasta que la presión del cilindro alcanza la presión exterior. Esta descarga rápida de los gases de escape se representa mediante una cesión de calor a volumen constante en el ciclo Otto cerrado ideal.
- **$1 \rightarrow 0$: Escape isobárico.** El pistón se desplaza hacia arriba, expulsando los gases de escape a la presión exterior.

La admisión y el escape implican el paso de materia a través de la frontera del cilindro. Sus trayectorias idealizadas en el diagrama presión–volumen coinciden.

b) Presiones y temperaturas

Consideramos el gas de trabajo como ideal, con capacidades caloríficas constantes y $\kappa = C_p/C_V = 1.40$. Durante cada carrera adiabática ideal,

$$pV^\kappa = \text{constante}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{constante}.$$

Estas relaciones se deducen del primer principio,

$$nC_V dT = -p dV,$$

junto con $pV = nRT$ y $R/C_V = \kappa - 1$, donde C_V es la capacidad calorífica molar.

En el **estado 1**, las condiciones dadas proporcionan

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

Durante la **compresión adiabática** $1 \rightarrow 2$,

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$
$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

Numéricamente,

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^\kappa = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

por lo que

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

Durante el **encendido a volumen constante** $2 \rightarrow 3$, la presión se duplica. Bajo la aproximación de gas de trabajo ideal, p/T es constante a volumen fijo, de modo que

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

Así,

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

Durante la **expansión adiabática** $3 \rightarrow 4$,

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^\kappa = \frac{2p_1 \varepsilon^\kappa}{\varepsilon^\kappa} = 2p_1,$$
$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

Por tanto,

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

c) Rendimiento térmico

Tomamos como positivo el trabajo realizado por el gas. Las carreras de admisión y escape aportan trabajos iguales y de signo contrario:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

Por tanto, se cancelan. Los procesos a volumen constante no aportan trabajo de expansión.

Para las dos carreras adiabáticas, el primer principio da

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

En consecuencia, el trabajo neto por ciclo es

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

La energía de combustión se representa mediante calor suministrado a volumen constante:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

Por consiguiente,

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

La cantidad $nC_V(T_4 - T_1)$ es el calor cedido equivalente en la representación mediante el ciclo Otto cerrado.

Como $T_3 = 2T_2$ y $T_4 = 2T_1$,

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

Por tanto,

$$\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%.$$

Dentro de este modelo ideal, el rendimiento depende de la relación de compresión y de κ . La duplicación de la presión especificada determina las temperaturas y el trabajo por carga, pero se cancela en la expresión del rendimiento.

d) Análisis del realismo de los resultados

La temperatura de compresión es aproximadamente 465°C , la temperatura máxima es aproximadamente 1200°C y la presión máxima es aproximadamente 4.68 MPa. Estos son órdenes de magnitud razonables para un motor de combustión.

Al final de la expansión, el gas permanece a aproximadamente 327°C y al doble de la presión atmosférica. Por tanto, los gases de escape todavía transportan una energía considerable. Incluso el ciclo ideal cede

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

de la energía suministrada.

Un motor real se aparta del modelo en varios aspectos:

- El calor pasa del gas caliente a las paredes del cilindro, por lo que la compresión y la expansión no son perfectamente adiabáticas.
- La combustión dura un tiempo finito mientras el pistón se mueve, por lo que el aporte de calor no es exactamente isócoro.
- Las capacidades caloríficas dependen de la temperatura y de la composición. Su aumento a altas temperaturas hace que un valor constante de $\kappa = 1.40$ sea una aproximación optimista.
- La admisión y el escape requieren diferencias de presión a través de las válvulas, lo que produce pérdidas de bombeo; sus contribuciones al trabajo ya no se cancelan exactamente.
- La combustión incompleta y la fricción mecánica reducen la potencia útil.

Además, la descarga real de los gases de escape es un proceso abierto: el gas que sale transporta energía fuera del cilindro, y la admisión suministra una carga nueva. El enfriamiento a volumen constante de una carga fija de gas es su representación en el ciclo Otto ideal.

Así pues, el 59.4% calculado es el rendimiento del modelo ideal estipulado; el rendimiento real y la potencia útil en el eje serán menores.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Colores de una película de jabón

Al sumergir el marco en una disolución jabonosa, el jabón forma una película rectangular de longitud b y altura h . Sobre la película incide luz blanca con un ángulo α (medido respecto a la dirección normal). La luz reflejada presenta un color verde de longitud de onda λ_0 .

- a) Determine si es posible medir la masa de la película de jabón utilizando una balanza de laboratorio cuya exactitud de calibración es de 0.1 mg.
- b) ¿Qué color presenta la película de jabón más delgada posible al observarla desde la dirección perpendicular? Deduzca las ecuaciones correspondientes.

Constantes y datos: índice de refracción relativo $n = 1.33$, longitud de onda de la luz verde reflejada $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, $\alpha = 30^\circ$, $b = 0.020 \text{ m}$, $h = 0.030 \text{ m}$, densidad $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) Los espesores y las masas permitidos son

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

La película más delgada tiene $d_{\min} \simeq 0.10 \text{ }\mu\text{m}$ y $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$, por lo que su masa no puede determinarse de manera fiable con la balanza indicada. Los órdenes superiores corresponden a masas mayores; sin especificar el orden, no se puede responder de forma incondicional con un sí o un no para una película verde cualquiera.

- b) Si la iluminación se mantiene a 30° , **no hay luz reflejada especularmente en la dirección normal**, por lo que no se observa ningún color de interferencia por reflexión en esa dirección. La película ideal se ve oscura en luz reflejada. Aparecería un máximo verde de 540 nm si la iluminación también fuera normal, como se deduce a continuación.

Solución

Considere la película uniforme, de caras planas y paralelas, y rodeada de aire. Desprecie la absorción, la dispersión del índice de refracción y la difracción en los bordes. Interprete la longitud de onda verde indicada como un máximo de la intensidad reflejada.

a) Sean d el espesor de la película y r el ángulo de refracción en su interior. La ley de Snell da

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

La luz reflejada contiene una contribución procedente de la superficie frontal y otra que entra en la película, se refleja en la superficie posterior y emerge. Al comparar sus trayectorias en un mismo frente de onda emergente, la diferencia de camino óptico debida a la geometría es

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

Utilizando $\sin \alpha = n \sin r$,

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

La reflexión en la interfaz frontal aire–jabón introduce un cambio de fase de π ; la reflexión en la interfaz posterior jabón–aire no lo hace. Por tanto, la interferencia constructiva por reflexión requiere

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

o bien

$$\boxed{2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Para el máximo observado en λ_0 ,

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

El espesor mínimo corresponde a $j = 0$:

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}.$$

La masa es el producto de la densidad por el volumen:

$$M_j = \rho b h d_j.$$

Así,

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

Este valor es menor que la exactitud de calibración de la balanza, de 0.1 mg. Por tanto, la película de espesor mínimo no puede pesarse de manera fiable con esa balanza.

El orden de interferencia es relevante: la siguiente masa permitida es

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

que supera la exactitud indicada, aunque la incertidumbre relativa seguiría siendo grande. Por tanto, el máximo verde por sí solo no permite establecer si una película cualquiera tiene una masa suficiente para que su pesaje sea útil.

b) La dirección de incidencia se mantiene fija a 30° .

El rayo reflejado en la superficie frontal sale formando con la normal el mismo ángulo que el rayo incidente. Para el rayo reflejado en el interior de la película, la reflexión conserva su ángulo interno r , y la refracción al emerger da

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

Por tanto,

$$\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ.$$

Todos los rayos reflejados que interfieren se propagan, por tanto, en la dirección especular de 30° . Un observador que mira en la dirección normal, $\theta_{\text{out}} = 0$, no recibe ninguno de estos rayos. Dentro de las aproximaciones indicadas,

$$I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0.$$

En consecuencia, **no se observa ningún color de interferencia por reflexión en la dirección normal**, independientemente del espesor permitido que tenga la película. Para considerar una iluminación adicional o la dispersión de la luz, se necesitaría más información.

Para completar el análisis, la misma película de espesor mínimo, con **iluminación normal y observación normal**, satisfaría

$$2nd_{\text{min}} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}.$$

Su primer máximo por reflexión sería entonces

$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\text{min}} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

que corresponde al verde. Este valor se aplica a esa geometría de iluminación modificada.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Haz de electrones dirigido hacia un blanco mediante un campo magnético

Un cañón de electrones T emite electrones acelerados por una diferencia de potencial U en el vacío en la dirección de la recta a , como se muestra en la Fig. 2. El blanco M se coloca a una distancia d del cañón de electrones de tal manera que el segmento que une los puntos T y M y la recta a forman el ángulo α , como se muestra en la Fig. 2. Halle la inducción magnética B del campo magnético uniforme

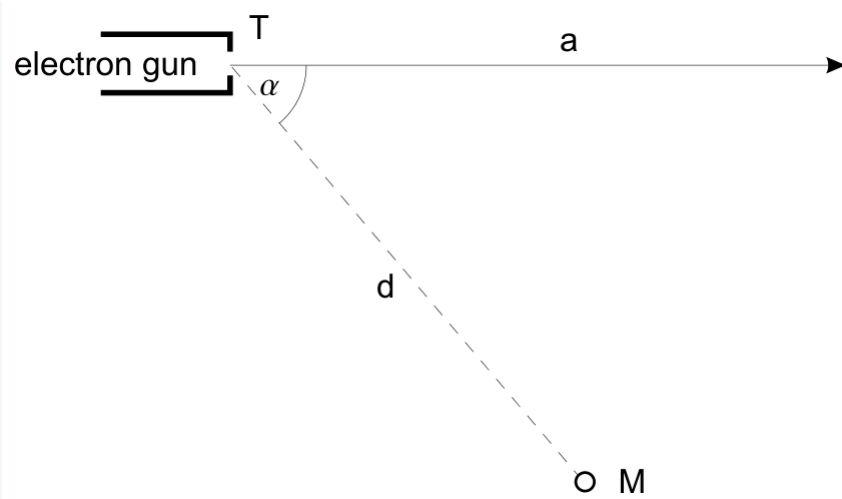


Figura 2:

- a) perpendicular al plano determinado por la recta a y el punto M
- b) paralelo al segmento TM

para que los electrones alcancen el blanco M . Halle primero la solución general y luego sustituya los siguientes valores: $U = 1000 \text{ V}$, $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = 5.0 \text{ cm}$, $B < 0.030 \text{ T}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** El campo debe apuntar **hacia el interior de la página** en la Fig. 2, con un módulo

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T.}$$

- **b)** Son posibles ambos sentidos paralelos a TM . Los módulos permitidos son

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Con los valores proporcionados y $B < 0.030 \text{ T}$, solo se permiten $n = 1, 2, 3, 4$:

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T.}$$

Solución

Sea $e > 0$ el módulo de la carga del electrón, de modo que su carga es $-e$. Utilizamos la mecánica no relativista, despreciamos la energía cinética inicial antes de la aceleración y consideramos el movimiento en el campo magnético uniforme después de que los electrones salgan del cañón.

La diferencia de potencial aceleradora proporciona energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

La fuerza magnética

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

es perpendicular a la velocidad y, por tanto, no realiza trabajo. En consecuencia, la rapidez permanece constante a lo largo de toda la trayectoria.

a) Campo perpendicular al plano de la figura

La velocidad permanece perpendicular al campo magnético. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta del movimiento circular:

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

Tomemos $T = (0, 0)$, con la velocidad inicial dirigida a lo largo del semieje positivo x y el semieje positivo y orientado hacia arriba en la figura. Entonces

$$\mathbf{M} = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

La órbita debe curvarse hacia abajo, por lo que su centro es $C = (0, -R)$. Al exigir que M pertenezca a esta circunferencia, se obtiene

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

Por tanto,

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

Combinando las expresiones geométrica y dinámica de R ,

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

Para determinar el sentido, observemos que un electrón que inicialmente se mueve hacia la derecha debe experimentar una fuerza hacia abajo. Como su carga es negativa, el campo debe apuntar **hacia el interior de la página**.

Para los datos proporcionados,

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

lo que es coherente con la aproximación no relativista. El radio necesario es

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

y el campo es

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

Este valor satisface $B < 0.030 \text{ T}$.

b) Campo paralelo a TM

Descompongamos la velocidad inicial en una componente a lo largo de TM y otra perpendicular a ella:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

La componente paralela permanece constante porque la fuerza magnética no tiene componente en la dirección del campo. La componente perpendicular produce un movimiento circular uniforme, de modo que la trayectoria completa es una hélice cuyo eje es paralelo a TM .

Para el movimiento circular,

$$ev_{\perp}B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

Por consiguiente, su período es

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Como T y M solo difieren en su posición a lo largo de la dirección del campo, el electrón debe volver a su posición transversal inicial cuando llegue a M . Para $v_{\perp} \neq 0$, esto sucede exactamente tras un número entero n de vueltas completas:

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Durante este tiempo, el desplazamiento a lo largo de TM debe ser igual a d :

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

Por tanto,

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Invertir el campo magnético invierte el sentido de giro, pero deja inalterados tanto el período como el movimiento a lo largo de TM . Por tanto, **ambos sentidos del campo paralelo a TM permiten alcanzar el blanco.**

Para los datos numéricos, el módulo fundamental del campo es

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ T}.$$

El límite superior exige

$$nB_1 < 0.030 \text{ T}, \quad n < 4.4743 \dots$$

Por tanto, los enteros permitidos y los campos correspondientes, redondeados a dos cifras significativas, son

Número de vueltas completas n	Inducción magnética B_n
1	$6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$
2	$1.3 \times 10^{-2} \text{ T}$
3	$2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$
4	$2.7 \times 10^{-2} \text{ T}$

El siguiente valor, $B_5 \simeq 0.0335 \text{ T}$, supera el límite.

Estas soluciones discretas se aplican al ángulo agudo y no nulo que se muestra. Si $\alpha = 0$, los electrones ya se desplazan a lo largo de TM , y cualquier campo magnético paralelo deja inalterado ese movimiento rectilíneo. Si $\cos \alpha \leq 0$, los electrones no pueden alcanzar un blanco situado a una distancia positiva a lo largo de TM , porque su componente de velocidad en esa dirección no puede aumentar.

La solución se comprobó con la solución oficial.