

# IPhO 1977

Theorieaufgaben und Lösungen · Hradec Králové, Tschechoslowakei · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1977/

## Aufgabe 1: Otto-Kreisprozess eines Viertakt-Verbrennungsmotors

Das Verdichtungsverhältnis eines Viertakt-Verbrennungsmotors beträgt  $\varepsilon = 9.5$ . Der Motor saugt Luft und gasförmigen Kraftstoff bei einer Temperatur von  $27^\circ\text{C}$  und einem Druck von  $1\text{ atm} = 100\text{ kPa}$  an. Die Verdichtung verläuft adiabatisch von Punkt 1 nach Punkt 2, siehe Abb. 1. Bei der Zündung des Gemisches (2–3) verdoppelt sich der Druck im Zylinder. Das heiße Abgas expandiert adiabatisch auf das Volumen  $V_2$  und drückt dabei den Kolben nach unten (3–4). Anschließend öffnet sich das Auslassventil, und der Druck sinkt wieder auf den Anfangswert von  $1\text{ atm}$ . Alle Vorgänge im Zylinder werden als ideal angenommen. Der Poisson-Exponent (d. h. das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten  $C_p/C_V$ ) für das Gemisch und das Abgas beträgt  $\kappa = 1.40$ . (Das Verdichtungsverhältnis ist das Verhältnis des Zylindervolumens bei unterster Kolbenstellung zum Volumen bei oberster Kolbenstellung.)

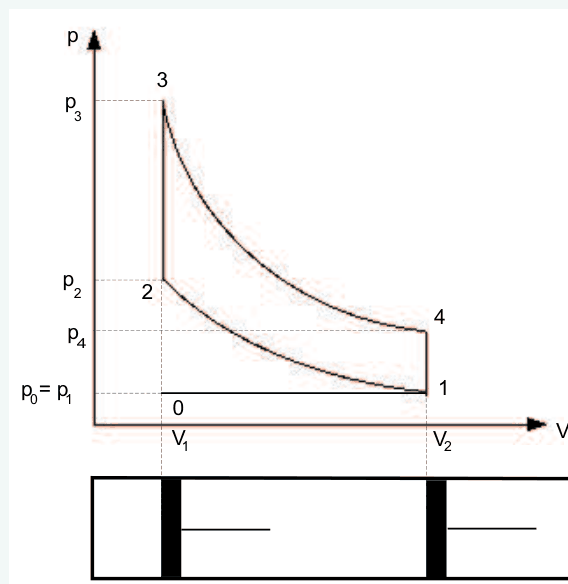


Abbildung 1:

- Welche Vorgänge laufen zwischen den Punkten 0–1, 2–3, 4–1, 1–0 ab?
- Bestimmen Sie den Druck und die Temperatur in den Zuständen 1, 2, 3 und 4.
- Bestimmen Sie den thermischen Wirkungsgrad des Kreisprozesses.
- Diskutieren Sie die erhaltenen Ergebnisse. Sind sie realistisch?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

- **a)**  $0 \rightarrow 1$ : isobares Ansaugen;  $2 \rightarrow 3$ : Verbrennung und Wärmezufuhr bei konstantem Volumen;  $4 \rightarrow 1$ : Druckabfall bei konstantem Volumen beim Öffnen des Auslassventils, im idealen Otto-Kreisprozess durch Wärmeabgabe dargestellt;  $1 \rightarrow 0$ : isobares Ausstoßen.
- **b)** Mit  $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$ :

| Zustand | Druck                         | Temperatur                  |
|---------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1       | 100 kPa                       | 300 K                       |
| 2       | $2.34 \times 10^3\text{ kPa}$ | 738 K                       |
| 3       | $4.68 \times 10^3\text{ kPa}$ | $1.48 \times 10^3\text{ K}$ |
| 4       | 200 kPa                       | 600 K                       |

- **c)**  $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$ .
- **d)** Die Drücke und Temperaturen liegen in plausiblen Größenordnungen für einen Verbrennungsmotor. Der Wirkungsgrad ist ein optimistischer Idealwert; Wärmeübertragung, veränderliche Wärmekapazitäten, eine endliche Verbrennungsdauer und Ladungswechselverluste verringern den tatsächlichen Wirkungsgrad, und Reibung verringert zusätzlich die an der Welle abgegebene Leistung.

## Lösung

### a) Zuordnung der Vorgänge

Die minimalen und maximalen Zylindervolumina seien

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

wobei  $V_1, V_2$  die Volumenbezeichnungen in der Abbildung sind. Die Zustände 2 und 3 liegen bei  $V_{\min}$ ; die Zustände 1 und 4 liegen bei  $V_{\max}$ .

- **$0 \rightarrow 1$ : Isobares Ansaugen.** Der Kolben bewegt sich nach unten und saugt dabei frische Luft und gasförmigen Kraftstoff beim Außendruck  $p_0 = p_1$  an.
- **$2 \rightarrow 3$ : Isochore Verbrennung.** Die idealisierte augenblickliche Verbrennung erhöht Druck und Temperatur, während der Kolben in seiner oberen Stellung verbleibt. Das Gas verrichtet keine Volumenänderungsarbeit, da sein Volumen konstant ist.
- **$4 \rightarrow 1$ : Isochorer Druckabfall.** Das Auslassventil öffnet sich in der unteren Kolbenstellung, und Gas entweicht, bis der Zylinderdruck den Außendruck erreicht. Dieses rasche Ausströmen des Abgases wird im idealen geschlossenen Otto-Kreisprozess durch Wärmeabgabe bei konstantem Volumen dargestellt.
- **$1 \rightarrow 0$ : Isobares Ausstoßen.** Der Kolben bewegt sich nach oben und stößt dabei Abgas beim Außendruck aus.

Beim Ansaugen und Ausstoßen tritt Materie über die Zylindergrenze. Die idealisierten Kurven dieser Vorgänge im Druck-Volumen-Diagramm fallen zusammen.

## b) Drücke und Temperaturen

Das Arbeitsgas wird als ideales Gas mit konstanten Wärmekapazitäten und  $\kappa = C_p/C_V = 1.40$  behandelt. Während jedes idealen adiabatischen Taktes gilt

$$pV^\kappa = \text{konstant}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{konstant}.$$

Diese Beziehungen folgen aus dem ersten Hauptsatz,

$$nC_V dT = -p dV,$$

zusammen mit  $pV = nRT$  und  $R/C_V = \kappa - 1$ , wobei  $C_V$  die molare Wärmekapazität ist.

Für **Zustand 1** ergeben die angegebenen Bedingungen

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

Bei der **adiabatischen Verdichtung**  $1 \rightarrow 2$  gilt

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$
$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^\kappa = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

also

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

Bei der **Zündung bei konstantem Volumen**  $2 \rightarrow 3$  verdoppelt sich der Druck. In der Näherung eines idealen Arbeitsgases ist  $p/T$  bei festem Volumen konstant, daher gilt

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

Somit folgt

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

Bei der **adiabatischen Expansion**  $3 \rightarrow 4$  gilt

$$p_4 = p_3 \left( \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^\kappa = \frac{2p_1 \varepsilon^\kappa}{\varepsilon^\kappa} = 2p_1,$$
$$T_4 = T_3 \left( \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

Daher ergibt sich

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

## c) Thermischer Wirkungsgrad

Die vom Gas verrichtete Arbeit wird als positiv gezählt. Die Arbeitsbeiträge des Ansaug- und des Ausstoßtaktes sind betragsgleich und entgegengesetzt:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

Sie heben sich daher auf. Bei den Vorgängen mit konstantem Volumen wird keine Volumenänderungsarbeit verrichtet.

Für die beiden adiabatischen Takte liefert der erste Hauptsatz

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

Die Nettoarbeit pro Kreisprozess beträgt folglich

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

Die Verbrennungsenergie wird durch Wärmezufuhr bei konstantem Volumen dargestellt:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

Daraus folgt

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Die Größe  $nC_V(T_4 - T_1)$  ist die äquivalente abgegebene Wärme in der Darstellung als geschlossener Otto-Kreisprozess.

Da  $T_3 = 2T_2$  und  $T_4 = 2T_1$ , gilt

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

Daher ergibt sich

$$\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%.$$

In diesem idealen Modell hängt der Wirkungsgrad vom Verdichtungsverhältnis und von  $\kappa$  ab. Die vorgegebene Druckverdopplung bestimmt die Temperaturen und die Arbeit pro Zylinderfüllung, kürzt sich jedoch bei der Berechnung des Wirkungsgrades heraus.

#### d) Diskussion des Realitätsbezugs

Die Verdichtungstemperatur beträgt etwa  $465^\circ\text{C}$ , die Höchsttemperatur etwa  $1200^\circ\text{C}$  und der Höchstdruck etwa  $4.68\text{ MPa}$ . Dies sind plausible Größenordnungen für einen Verbrennungsmotor.

Am Ende der Expansion hat das Gas noch eine Temperatur von etwa  $327^\circ\text{C}$  und steht unter dem doppelten Atmosphärendruck. Das Abgas führt somit noch beträchtliche Energie mit sich. Selbst der ideale Kreisprozess gibt

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

der zugeführten Energie wieder ab.

Ein realer Motor weicht in mehrfacher Hinsicht vom Modell ab:

- Wärme geht vom heißen Gas auf die Zylinderwände über, sodass Verdichtung und Expansion nicht vollkommen adiabatisch verlaufen.
- Die Verbrennung benötigt eine endliche Zeit, während sich der Kolben bewegt, sodass die Wärmezufuhr nicht genau isochor erfolgt.
- Die Wärmekapazitäten hängen von Temperatur und Zusammensetzung ab. Ihr Anstieg bei hohen Temperaturen macht einen konstanten Wert von  $\kappa = 1.40$  zu einer optimistischen Näherung.
- Ansaugen und Ausstoßen erfordern Druckunterschiede an den Ventilen, wodurch Ladungswechselverluste entstehen; ihre Arbeitsbeiträge heben sich nicht mehr genau auf.
- Unvollständige Verbrennung und mechanische Reibung verringern die nutzbare Leistung.

Außerdem ist das tatsächliche Ausströmen des Abgases ein offener Vorgang: Entweichendes Gas transportiert Energie aus dem Zylinder, und beim Ansaugen wird eine frische Füllung zugeführt. Die Abkühlung einer festen Gasfüllung bei konstantem Volumen ist die Darstellung dieses Vorgangs im idealen Otto-Kreisprozess.

Die berechneten 59.4% sind somit der Wirkungsgrad des vorgegebenen idealen Modells; der tatsächliche Wirkungsgrad und die an der Welle abgegebene Leistung werden geringer sein.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

## Aufgabe 2: Farben einer Seifenhaut

Beim Eintauchen des Rahmens in eine Seifenlösung bildet sich eine rechteckige Seifenhaut der Länge  $b$  und der Höhe  $h$ . Weißes Licht fällt unter einem Winkel  $\alpha$  (gemessen zum Lot) auf die Seifenhaut. Das reflektierte Licht zeigt eine grüne Farbe mit der Wellenlänge  $\lambda_0$ .

- a) Untersuchen Sie, ob sich die Masse der Seifenhaut mit einer Laborwaage bestimmen lässt, deren Kalibriergenauigkeit 0.1 mg beträgt.
- b) Welche Farbe zeigt die dünnste mögliche Seifenhaut bei senkrechter Betrachtung? Leiten Sie die zugehörigen Gleichungen her.

Konstanten und gegebene Daten: relative Brechzahl  $n = 1.33$ , Wellenlänge des reflektierten grünen Lichts  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $b = 0.020 \text{ m}$ ,  $h = 0.030 \text{ m}$ , Dichte  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ .

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

### Antworten

- **a)** Die möglichen Dicken und Massen sind

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Die dünnste Seifenhaut hat  $d_{\min} \simeq 0.10 \text{ }\mu\text{m}$  und  $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$ ; ihre Masse lässt sich daher mit der angegebenen Waage nicht zuverlässig bestimmen. Höhere Ordnungen ergeben größere Massen; ohne Angabe der Ordnung gibt es für eine beliebige grüne Seifenhaut keine uneingeschränkte Ja-oder-Nein-Antwort.

- **b)** Bleibt der Einfallswinkel der Beleuchtung bei  $30^\circ$ , so **gibt es kein spiegelnd reflektiertes Licht in Richtung des Lots** und somit auch keine Interferenzfarbe im reflektierten Licht in dieser Richtung. Die ideale Seifenhaut erscheint im reflektierten Licht dunkel. Ein grünes Maximum bei  $540 \text{ nm}$  würde auftreten, wenn auch die Beleuchtung senkrecht erfolgte, wie unten hergeleitet wird.

## Lösung

Die Seifenhaut wird als gleichmäßig dick, planparallel und von Luft umgeben betrachtet. Absorption, Dispersion der Brechzahl und Beugung an den Rändern werden vernachlässigt. Die angegebene grüne Wellenlänge wird als Maximum der reflektierten Intensität interpretiert.

a) Es sei  $d$  die Dicke der Seifenhaut und  $r$  der Brechungswinkel in ihrem Inneren. Das snelliussche Brechungsgesetz liefert

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

Das reflektierte Licht enthält einen Beitrag von der Vorderseite und einen weiteren, der in die Seifenhaut eintritt, an der Rückseite reflektiert wird und wieder austritt. Vergleicht man ihre Wege an einer gemeinsamen auslaufenden Wellenfront, so beträgt ihr geometrisch bedingter optischer Gangunterschied

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

Mit  $\sin \alpha = n \sin r$  folgt

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

Bei der Reflexion an der vorderen Grenzfläche zwischen Luft und Seifenlösung tritt ein Phasensprung von  $\pi$  auf; bei der Reflexion an der hinteren Grenzfläche zwischen Seifenlösung und Luft tritt kein Phasensprung auf. Daher erfordert konstruktive Interferenz im reflektierten Licht

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

oder

$$\boxed{2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Für das beobachtete Maximum bei  $\lambda_0$  gilt

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Die kleinste Dicke entspricht  $j = 0$ :

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \text{ } \mu\text{m}.$$

Die Masse ist das Produkt aus Dichte und Volumen:

$$M_j = \rho b h d_j.$$

Somit ergibt sich

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

Dies ist kleiner als die Kalibrierengenauigkeit der Waage von 0.1 mg. Daher lässt sich die Seifenhaut mit der kleinsten Dicke mit dieser Waage nicht zuverlässig wiegen.

Die Interferenzordnung spielt eine Rolle: Die nächstgrößere mögliche Masse ist

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

und liegt damit über der angegebenen Genauigkeit, obwohl die relative Unsicherheit immer noch groß wäre. Das grüne Maximum allein lässt daher nicht erkennen, ob eine beliebige Seifenhaut eine hinreichend große Masse für eine aussagekräftige Wägung hat.

**b)** Die Einfallrichtung bleibt bei  $30^\circ$  fest.

Der an der Vorderseite reflektierte Strahl verläuft unter demselben Winkel zum Lot wie der einfallende Strahl. Bei dem im Inneren der Seifenhaut reflektierten Strahl bleibt der innere Winkel  $r$  durch die Reflexion erhalten, und die Brechung beim Austritt ergibt

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

Daher gilt

$$\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ.$$

Alle interferierenden reflektierten Strahlen breiten sich daher in der Richtung der spiegelnden Reflexion unter  $30^\circ$  aus. Ein Beobachter, der entlang des Lots blickt,  $\theta_{\text{out}} = 0$ , empfängt keinen dieser Strahlen. Im Rahmen der angegebenen Näherungen gilt

$$I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0.$$

Folglich gibt es **bei senkrechter Betrachtung keine Interferenzfarbe im reflektierten Licht**, unabhängig davon, welche der möglichen Dicken die Seifenhaut hat. Zusätzliche Beleuchtung oder Streuung würde weitere Angaben erfordern.

Der Vollständigkeit halber würde dieselbe Seifenhaut mit der kleinsten Dicke bei **senkrechter Beleuchtung und senkrechter Beobachtung** die Bedingung

$$2nd_{\min} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}$$

erfüllen. Ihr erstes Maximum im reflektierten Licht läge dann bei

$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\min} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

also im grünen Bereich. Dieser Wert gilt für diese geänderte Beleuchtungsgeometrie.

---

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

## Aufgabe 3: Ein durch ein Magnetfeld auf ein Ziel gelenkter Elektronenstrahl

Eine Elektronenkanone  $T$  emittiert im Vakuum Elektronen, die durch eine Potentialdifferenz  $U$  beschleunigt werden, in Richtung der Geraden  $a$ , wie in Abb. 2 dargestellt. Das Ziel  $M$  befindet sich im Abstand  $d$  von der Elektronenkanone, und zwar so, dass die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten  $T$  und  $M$  mit der Geraden  $a$  den Winkel  $\alpha$  einschließt, wie in Abb. 2 dargestellt. Bestimmen Sie die magnetische Flussdichte  $B$  des homogenen Magnetfeldes

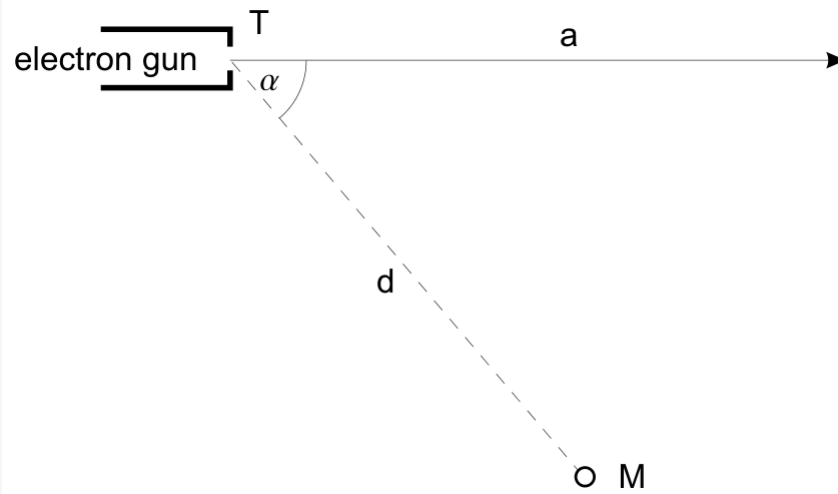


Abbildung 2:

a) senkrecht zu der durch die Gerade  $a$  und den Punkt  $M$  bestimmten Ebene

b) parallel zur Strecke  $TM$

so, dass die Elektronen das Ziel  $M$  treffen. Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung und setzen Sie anschließend die folgenden Werte ein:  $U = 1000 \text{ V}$ ,  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $d = 5.0 \text{ cm}$ ,  $B < 0.030 \text{ T}$ .

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

- **a)** Das Feld muss in Abb. 2 **in die Zeichenebene hinein** gerichtet sein und den folgenden Betrag haben:

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T.}$$

- **b)** Beide Richtungen parallel zu  $TM$  sind möglich. Die zulässigen Beträge sind

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mit den angegebenen Werten und  $B < 0.030 \text{ T}$  sind nur  $n = 1, 2, 3, 4$  zulässig:

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T.}$$

## Lösung

Es bezeichne  $e > 0$  den Betrag der Elektronenladung, sodass die Ladung  $-e$  beträgt. Wir verwenden die nichtrelativistische Mechanik, vernachlässigen die anfängliche kinetische Energie vor der Beschleunigung und betrachten die Bewegung im homogenen Magnetfeld, nachdem die Elektronen die Kanone verlassen haben.

Die Beschleunigungsspannung liefert die kinetische Energie:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Die magnetische Kraft

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

steht senkrecht zur Geschwindigkeit und verrichtet daher keine Arbeit. Folglich bleibt der Betrag der Geschwindigkeit entlang der gesamten Bahn konstant.

### a) Feld senkrecht zur Zeichenebene

Die Geschwindigkeit bleibt senkrecht zum Magnetfeld. Die magnetische Kraft liefert die Zentripetalkraft für eine Kreisbewegung:

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

Wir wählen  $T = (0, 0)$ , wobei die Anfangsgeschwindigkeit entlang der positiven  $x$ -Achse und die positive  $y$ -Achse in der Abbildung nach oben gerichtet ist. Dann gilt

$$\mathbf{M} = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

Die Bahn muss nach unten gekrümmt sein, sodass ihr Mittelpunkt bei  $C = (0, -R)$  liegt. Aus der Bedingung, dass  $\mathbf{M}$  auf diesem Kreis liegt, folgt

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

Damit ergibt sich

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

Durch Kombination der geometrischen und dynamischen Ausdrücke für  $R$  erhalten wir

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

Zur Bestimmung der Richtung beachten wir, dass auf ein Elektron, das sich anfangs nach rechts bewegt, eine nach unten gerichtete Kraft wirken muss. Da seine Ladung negativ ist, muss das Feld **in die Zeichenebene hinein** gerichtet sein.

Für die angegebenen Daten gilt

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

was mit der nichtrelativistischen Näherung vereinbar ist. Der erforderliche Radius beträgt

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

und die magnetische Flussdichte ist

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

Damit ist  $B < 0.030 \text{ T}$  erfüllt.

### b) Feld parallel zu $TM$

Wir zerlegen die Anfangsgeschwindigkeit in Komponenten entlang  $TM$  und senkrecht dazu:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

Die parallele Komponente bleibt konstant, da die magnetische Kraft keine Komponente in Feldrichtung besitzt. Die senkrechte Komponente führt zu einer gleichförmigen Kreisbewegung, sodass die gesamte Bahn eine Schraubenlinie ist, deren Achse parallel zu  $TM$  verläuft.

Für die Kreisbewegung gilt

$$ev_{\perp}B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

Ihre Umlaufzeit ist daher

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

Da sich  $T$  und  $M$  nur in ihrer Position entlang der Feldrichtung unterscheiden, muss das Elektron beim Erreichen von  $M$  zu seiner anfänglichen Position senkrecht zur Feldrichtung zurückgekehrt sein. Für  $v_{\perp} \neq 0$  geschieht dies genau nach einer ganzzahligen Anzahl  $n$  vollständiger Umläufe:

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Während dieser Zeit muss die Verschiebung entlang  $TM$  gleich  $d$  sein:

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

Somit gilt

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eine Umkehrung des Magnetfeldes kehrt den Drehsinn um, lässt jedoch sowohl die Umlaufzeit als auch die Bewegung entlang  $TM$  unverändert. Somit **führen beide Feldrichtungen parallel zu  $TM$  zum Ziel**.

Für die angegebenen Zahlenwerte beträgt der Grundwert der magnetischen Flussdichte

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ T}.$$

Die obere Grenze erfordert

$$nB_1 < 0.030 \text{ T}, \quad n < 4.4743 \dots$$

Damit ergeben sich die folgenden zulässigen ganzen Zahlen und zugehörigen magnetischen Flussdichten, gerundet auf zwei signifikante Stellen:

| Anzahl vollständiger Umläufe $n$ | Magnetische Flussdichte $B_n$  |
|----------------------------------|--------------------------------|
| 1                                | $6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$ |
| 2                                | $1.3 \times 10^{-2} \text{ T}$ |
| 3                                | $2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ |
| 4                                | $2.7 \times 10^{-2} \text{ T}$ |

Der nächste Wert,  $B_5 \simeq 0.0335 \text{ T}$ , überschreitet die Grenze.

Diese diskreten Lösungen gelten für den dargestellten spitzen, von null verschiedenen Winkel. Ist  $\alpha = 0$ , so bewegen sich die Elektronen bereits entlang  $TM$ , und jedes parallele Magnetfeld lässt diese geradlinige Bewegung unverändert. Ist  $\cos \alpha \leq 0$ , so können die Elektronen ein Ziel in einem positiven Abstand entlang  $TM$  nicht erreichen, da ihre Geschwindigkeitskomponente in dieser Richtung nicht zunehmen kann.

---

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.