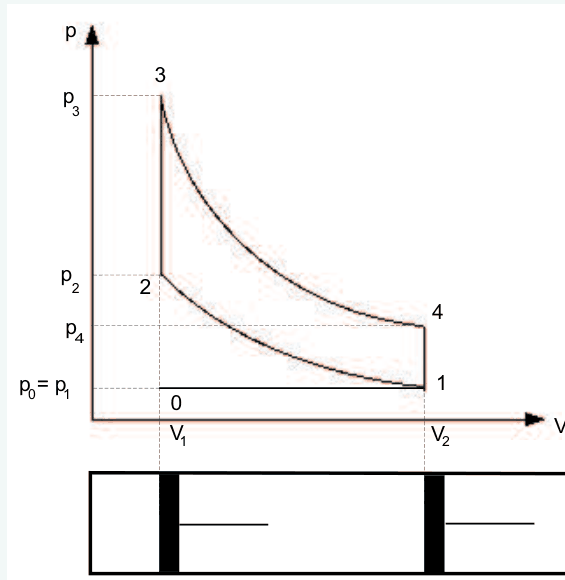


المسألة 1: دورة أوتو لمحرك احتراق رباعي الأشواط

نسبة الانضغاط في محرك احتراق داخلي رباعي الأشواط هي $\epsilon = 9.5$. يسحب المحرك الهواء والوقود الغازي عند درجة حرارة 27°C وضغط $1\text{ atm} = 100\text{ kPa}$. يجري الانضغاط وفق عملية كظومة من النقطة 1 إلى النقطة 2، انظر الشكل 1. يتضاعف الضغط في الأسطوانة أثناء اشتعال الخليط (2-3). ويتمدد غاز العادم الساخن تمددًا كظومًا حتى الحجم V_2 ، دافعًا المكبس إلى أسفل (3-4). ثم ينفّث صمام العادم ويعود الضغط إلى قيمته الابتدائية البالغة 1 atm . يُفترض أن جميع العمليات في الأسطوانة مثالية. ثابت بواسون (أي نسبة السعتين الحراريتين النوعيتين C_p/C_v) للخليط وغاز العادم هو $\kappa = 1.40$. (نسبة الانضغاط هي نسبة حجم الأسطوانة عندما يكون المكبس في موضعه السفلي إلى حجمها عندما يكون المكبس في موضعه العلوي).



الشكل 1:

- (a) ما العمليات التي تجري بين النقاط 0-1، 1-4، 3-2، 1-0؟
 (b) حدّد الضغط ودرجة الحرارة في الحالات 1 و2 و3 و4.
 (c) أوجد الكفاءة الحرارية للدورة.
 (d) ناقش النتائج التي حصلت عليها. هل هي واقعية؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) 1 → 0: سحب عند ضغط ثابت؛ 0 → 2: احتراق وإضافة حرارة عند حجم ثابت؛ 2 → 3: انخفاض الضغط عند حجم ثابت مع انفتاح صمام العادم، ويُمثّل بطرح الحرارة في دورة أوتو المثالية؛ 3 → 1: طرد العادم عند ضغط ثابت.
- (b) باستخدام $27^\circ\text{C} \simeq 300\text{ K}$

الحالة	الضغط	درجة الحرارة
1	100 kPa	300 K
2	2.34×10^3 kPa	738 K
3	4.68×10^3 kPa	1.48×10^3 K
4	200 kPa	600 K

$$\bullet \text{ (c) } \eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa} = 0.594 \approx 59.4\%$$

• **(d)** الضغوط ودرجات الحرارة من رتب مقدار معقولة لمحرك احتراق. والكفاءة قيمة مثالية متفائلة؛ إذ إن انتقال الحرارة، وتغير السعات الحرارية، واستغراق الاحتراق زمنًا محدودًا، وفوائد تبادل الغازات تخفض الكفاءة الفعلية، كما يخفض الاحتكاك أيضًا القدرة الخارجة عند عمود الإدارة.

الحل

(a) تحديد العمليات

ليكن حجما الأسطوانة الأدنى والأقصى

$$V_{\min} = V_1, \quad V_{\max} = V_2, \quad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon = 9.5,$$

حيث V_1, V_2 هما رمزا الحجم في الشكل. تقع الحالتان 2 و3 عند $V_{\min}$ ، وتقع الحالتان 1 و4 عند $V_{\max}$.

- $0 \rightarrow 1$: سحب عند ضغط ثابت. يتحرك المكبس إلى أسفل، ساحبًا هواءً جديدًا ووقودًا غازيًا عند الضغط الخارجي $p_0 = p_1$.
- $2 \rightarrow 3$: احتراق عند حجم ثابت. يرفع الاحتراق اللحظي المفترض في النموذج المثالي الضغط ودرجة الحرارة بينما يبقى المكبس في موضعه العلوي. ولا يبذل الغاز شغلًا حدوديًا لأن حجمه ثابت.
- $4 \rightarrow 1$: انخفاض الضغط عند حجم ثابت. ينفث صمام العادم عند موضع المكبس السفلي، ويتسرب الغاز إلى الخارج حتى يبلغ ضغط الأسطوانة الضغط الخارجي. ويمثل هذا التصريف السريع للعادم بطرح الحرارة عند حجم ثابت في دورة أوتو المغلقة المثالية.
- $1 \rightarrow 0$: طرد العادم عند ضغط ثابت. يتحرك المكبس إلى أعلى، طارداً غاز العادم عند الضغط الخارجي.

تتضمن عمليتا السحب وطرد العادم عبور المادة حدود الأسطوانة. ويتطابق مسارهما المثاليان في مخطط الضغط-الحجم.

(b) الضغوط ودرجات الحرارة

نعتبر الغاز العامل مثاليًا، بسعات حرارية ثابتة و $\kappa = C_p/C_V = 1.40$. خلال كل شوط كظوم مثالي،

$$pV^\kappa = \text{ثابت}, \quad TV^{\kappa-1} = \text{ثابت}.$$

تنتج هاتان العلاقتان من القانون الأول،

$$nC_V dT = -p dV,$$

مع $pV = nRT$ و $R/C_V = \kappa - 1$ ، حيث C_V هي السعة الحرارية المولية.

في الحالة 1، تعطي الشروط المعطاة

$$p_1 = 100 \text{ kPa}, \quad T_1 = 27^\circ\text{C} \simeq 300 \text{ K}.$$

أثناء الانضغاط الكظوم $1 \rightarrow 2$ ،

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^\kappa = p_1 \varepsilon^\kappa,$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \varepsilon^{\kappa-1}.$$

عدديًا،

$$\varepsilon^{\kappa-1} = 9.5^{0.40} = 2.46087, \quad \varepsilon^{\kappa} = 9.5^{1.40} = 23.3783,$$

ومن ثم

$$\boxed{p_2 \simeq 2.34 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_2 \simeq 738 \text{ K}}.$$

أثناء الاشتعال عند حجم ثابت $3 \rightarrow 2$ ، يتضاعف الضغط. وفي تقريب الغاز العامل المثالي، تكون p/T ثابتة عند ثبات الحجم، ومن ثم

$$p_3 = 2p_2, \quad T_3 = 2T_2.$$

إذًا

$$\boxed{p_3 \simeq 4.68 \times 10^3 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_3 \simeq 1.48 \times 10^3 \text{ K}}.$$

أثناء التمدد الكظوم $4 \rightarrow 3$ ،

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa} = \frac{2p_1 \varepsilon^{\kappa}}{\varepsilon^{\kappa}} = 2p_1,$$
$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = \frac{2T_1 \varepsilon^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}} = 2T_1.$$

وعليه،

$$\boxed{p_4 = 200 \text{ kPa}}, \quad \boxed{T_4 \simeq 600 \text{ K}}.$$

(c) الكفاءة الحرارية

نعتبر الشغل الذي يبذله الغاز موجبًا. ويسهم شوطا السحب وطرد العادم بشغلين متساويين في المقدار ومتعاكسين في الإشارة:

$$W_{01} = p_1(V_{\max} - V_{\min}), \quad W_{10} = -p_1(V_{\max} - V_{\min}).$$

ولذلك يلغى أحدهما الآخر. أما العمليات عند حجم ثابت فلا تسهم بأي شغل حدودي.

بالنسبة إلى الشوطين الكظومين، يعطي القانون الأول

$$W_{12} = nC_V(T_1 - T_2), \quad W_{34} = nC_V(T_3 - T_4).$$

وبالتالي يكون الشغل الصافي في كل دورة

$$W_{\text{net}} = nC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)].$$

تُمثِّل طاقة الاحتراق بحرارة مزوَّدة عند حجم ثابت:

$$Q_{\text{in}} = nC_V(T_3 - T_2).$$

ومن ثم

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

الكمية $nC_V(T_4 - T_1)$ هي الحرارة المكافئة المطروحة في تمثيل دورة أوتو المغلقة.

بما أن $T_4 = 2T_1$ و $T_3 = 2T_2$ ،

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

وعليه،

$$\boxed{\eta = 1 - 9.5^{-0.40} = 0.59364 \approx 59.4\%}.$$

ضمن هذا النموذج المثالي، تعتمد الكفاءة على نسبة الانضغاط وعلى κ . ويحدد تضاعف الضغط المعطى درجات الحرارة والشغل لكل شحنة، لكنه يُختزل من تعبير الكفاءة.

(d) مناقشة مدى الواقعية

تبلغ درجة حرارة الانضغاط نحو 465°C ، ودرجة الحرارة القصوى نحو 1200°C ، والضغط الأقصى نحو 4.68 MPa . وهذه رتب مقدار معقولة لحرك احتراق.

في نهاية التمدد، يبقى الغاز عند درجة حرارة تقارب 327°C وضغط يساوي ضعف الضغط الجوي. ومن ثم لا يزال العادم يحمل طاقة كبيرة. حتى الدورة المثالية تطرح

$$1 - \eta \simeq 40.6\%$$

من الطاقة المزودة.

يختلف المحرك الفعلي عن النموذج من عدة نواحٍ:

- تنتقل الحرارة من الغاز الساخن إلى جدران الأسطوانة، ولذلك لا يكون الانضغاط والتمدد كظومين تمامًا.
 - يستغرق الاحتراق زمنًا محدودًا يتحرك خلاله المكبس، ولذلك لا تجري إضافة الحرارة عند حجم ثابت تمامًا.
 - تعتمد السعات الحرارية على درجة الحرارة والتركيب. وزيادتها عند درجات الحرارة المرتفعة تجعل افتراض قيمة ثابتة $\kappa = 1.40$ تقريبًا متفائلًا.
 - تتطلب عمليتا السحب وطرد العادم فروق ضغط عبر الصمامات، مما يسبب فواقد الضخ؛ وعندئذ لا تعود مساهمتهما في الشغل تلغي إحداها الأخرى تمامًا.
 - يخفض الاحتراق غير الكامل والاحتكاك الميكانيكي الخرج المفيد.
- علاوة على ذلك، فإن تصريف العادم الفعلي عملية مفتوحة: يحمل الغاز المتسرب طاقة إلى خارج الأسطوانة، وتزود عملية السحب الأسطوانة بشحنة جديدة. أما تبريد شحنة ثابتة من الغاز عند حجم ثابت فهو تمثيل هذه العملية في دورة أوتو المثالية.
- إذاً فإن القيمة المحسوبة 59.4% هي كفاءة النموذج المثالي المفترض؛ وستكون الكفاءة الفعلية والقدرة الخارجة عند عمود الإدارة أقل من ذلك.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: ألوان غشاء صابوني

- عند غمس الإطار في محلول صابوني، يتكوّن غشاء صابوني مستطيل طوله b وارتفاعه h . يسقط ضوء أبيض على الغشاء بزاوية α (مقيسة بالنسبة إلى اتجاه العمود على السطح). ويظهر الضوء المنعكس بلون أخضر ذي طول موجي λ_0 .
- (a) حدّد ما إذا كان من الممكن قياس كتلة الغشاء الصابوني باستخدام الميزان المخبري الذي تبلغ دقة معايرته 0.1 mg .
- (b) ما اللون الذي يظهر به أرقّ غشاء صابوني ممكن عند النظر إليه من الاتجاه العمودي؟ اشتق المعادلات ذات الصلة.
- الثوابت والمعطيات: معامل الانكسار النسبي $n = 1.33$ ، والطول الموجي للضوء الأخضر المنعكس $\lambda_0 = 500\text{ nm}$ ، و $\alpha = 30^{\circ}$ ، و $b = 0.020\text{ m}$ ، و $h = 0.030\text{ m}$ ، والكثافة $\rho = 1000\text{ kg m}^{-3}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) السماكات والكتل المسموح بها هي

$$d_j = (2j + 1) \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad M_j = (2j + 1)(0.0609 \text{ mg}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

تبلغ سماكة أرقّ غشاء $d_{\min} \simeq 0.10 \mu\text{m}$ وكتلته $M_{\min} \simeq 0.061 \text{ mg}$ ، ولذلك لا يمكن قياس كتلته قياساً موثوقاً بالميزان المذكور. وتعطي الرتب الأعلى كتلاً أكبر؛ ومن دون تحديد الرتبة، لا توجد إجابة مطلقة بنعم أو لا لغشاء أخضر كيفما كان.

• (b) مع بقاء الإضاءة عند 30° ، لا يوجد ضوء منعكس انعكاساً مرئياً على امتداد العمود على السطح، ومن ثم لا يظهر لون تداخل في الضوء المنعكس في ذلك الاتجاه. ويكون الغشاء المثالي مظلماً في الضوء المنعكس. وستظهر قيمة عظمى خضراء عند 540 nm إذا كانت الإضاءة عمودية أيضاً، كما يُشتق أدناه.

الحل

نعدّ الغشاء منتظماً، ذا سطحين مستويين متوازيين، ومحاطاً بالهواء. ونهمل الامتصاص، وتشتت معامل الانكسار، والحيود عند الحواف. ونفسّر الطول الموجي الأخضر المذكور على أنه يقابل قيمة عظمى لشدة الضوء المنعكس.

(a) لتكن d سماكة الغشاء و r زاوية الانكسار داخله. يعطي قانون سنيل

$$n \sin r = \sin \alpha, \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.33}\right) \simeq 22.1^\circ.$$

يتضمن الضوء المنعكس مساهمة من السطح الأمامي وأخرى تدخل الغشاء وتنعكس عن السطح الخلفي ثم تخرج منه. وبمقارنة مساريهما عند جبهة موجة خارجية مشتركة، يكون فرق المسير البصري الهندسي بينهما

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \tan r \sin \alpha.$$

وباستخدام $\sin \alpha = n \sin r$

$$\Delta = \frac{2nd(1 - \sin^2 r)}{\cos r} = 2nd \cos r.$$

يُحدث الانعكاس عند السطح الفاصل الأمامي بين الهواء والصابون انقلاًباً في الطور مقداره π ؛ أما الانعكاس عند السطح الفاصل الخلفي بين الصابون والهواء فلا يُحدث ذلك. وبناءً عليه، يتطلب التداخل البناء في الضوء المنعكس أن يكون

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos r + \pi = 2\pi(j + 1),$$

أو

$$\boxed{2nd \cos r = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

للقيمة العظمى المرصودة عند λ_0

$$d_j = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4n \cos r} = \frac{(2j + 1)\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

تقابل السماكة الدنيا $j = 0$:

$$d_{\min} = \frac{500 \times 10^{-9}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 1.014 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 0.10 \mu\text{m}.$$

الكتلة هي حاصل ضرب الكثافة في الحجم:

$$M_j = \rho b h d_j.$$

ومن ثم

$$M_{\min} = (1000)(0.020)(0.030)(1.014 \times 10^{-7}) = 6.09 \times 10^{-8} \text{ kg} = \boxed{0.061 \text{ mg}}.$$

هذه القيمة أصغر من دقة معايرة الميزان البالغة 0.1 mg. لذلك لا يمكن وزن الغشاء ذي السماكة الدنيا وزناً موثوقاً بهذا الميزان.

لرتبة التداخل أهمية: فالكتلة المسموح بها التالية هي

$$M_1 = 3M_{\min} \simeq 0.18 \text{ mg},$$

وهي تتجاوز الدقة المذكورة، وإن كان عدم اليقين النسبي سيظل كبيراً. ولذلك فإن القيمة العظمى الخضراء وحدها لا تحدّد ما إذا كان غشاء كيفما كان ذا كتلة كبيرة بما يكفي لإجراء قياس وزن مفيد.

(b) يبقى اتجاه السقوط ثابتاً عند 30° .

يخرج الشعاع المنعكس عن السطح الأمامي بالزاوية نفسها التي يصنعها الشعاع الساقط مع العمود على السطح. أما الشعاع المنعكس داخل الغشاء، فيحافظ الانعكاس على زاويته الداخلية r ، ويعطي الانكسار عند خروجه

$$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin r = \sin \alpha.$$

ومن ثم

$$\boxed{\theta_{\text{out}} = \alpha = 30^\circ}.$$

إنّ تنتشر جميع الأشعة المنعكسة المتداخلة في اتجاه الانعكاس المرآوي بزاوية 30° . ولا يتلقى راصد ينظر على امتداد العمود على السطح، $\theta_{\text{out}} = 0$ ، أيّاً من هذه الأشعة. وضمن التقريبات المذكورة،

$$\boxed{I_{\text{reflected}}(0, \lambda) = 0}.$$

وبالتالي لا يوجد لون تداخل في الضوء المنعكس عند النظر عمودياً، أيّاً كانت سماكة الغشاء من بين السماكات المسموح بها. أما وجود إضاءة إضافية أو تشتت فيتطلب معلومات أخرى.

واستكمالاً للعرض، فإن الغشاء نفسه ذا السماكة الدنيا يحقق، تحت إضاءة عمودية ورصد عمودي، العلاقة

$$2nd_{\min} = \frac{\lambda_{\perp}}{2}.$$

وعندئذ تكون القيمة العظمى الأولى في الضوء المنعكس عند

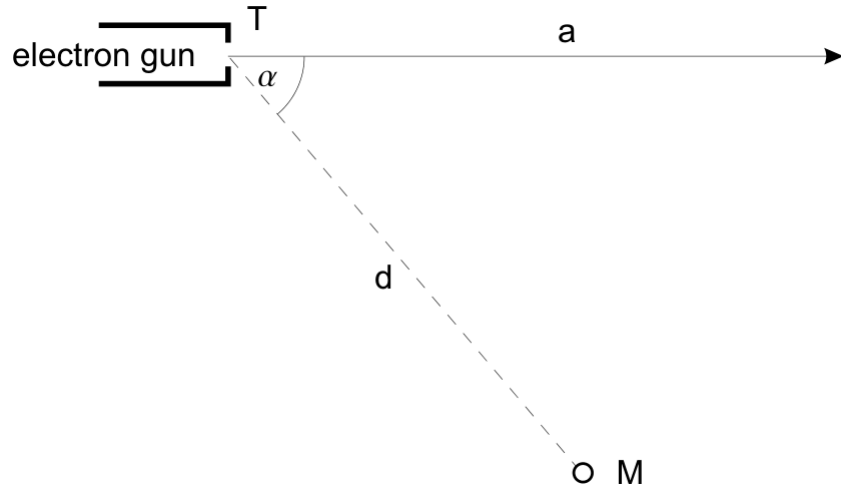
$$\lambda_{\perp} = 4nd_{\min} = \frac{\lambda_0}{\cos r} = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \simeq 5.40 \times 10^{-7} \text{ m} = \boxed{540 \text{ nm}},$$

وهو طول موجي أخضر. وتنطبق هذه القيمة على ذلك الترتيب الهندسي المعدّل للإضاءة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: حزمة إلكترونات موجهة نحو هدف بواسطة مجال مغناطيسي

يطلق مدفع إلكترونات T إلكترونات تُسرّع بفرق جهد U في الفراغ في اتجاه المستقيم a ، كما هو موضح في الشكل 2. يوضع الهدف M على مسافة d من مدفع الإلكترونات بحيث تصنع القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين T و M زاوية α مع المستقيم a ، كما هو موضح في الشكل 2. أوجد الحث المغناطيسي B للمجال المغناطيسي المنتظم



الشكل 2:

(a) العمودي على المستوى الذي يحدده المستقيم a والنقطة M

(b) الموازي للقطعة المستقيمة TM

بحيث تصيب الإلكترونات الهدف M . أوجد أولاً الحل العام، ثم عوض بالقيم الآتية: $U = 1000 \text{ V}$, $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$, $d = 5.0 \text{ cm}$, $B < 0.030 \text{ T}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) يجب أن يتجه المجال إلى داخل الصفحة في الشكل 2، وأن يكون مقداره

$$B = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \simeq 3.7 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

• (b) يمكن أن يكون المجال في أي من الاتجاهين الموازيين لـ TM . والمقادير المسموح بها هي

$$B_n = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

عند استخدام القيم المعطاة والشرط $B < 0.030 \text{ T}$ ، لا يُسمح إلا بالقيم $n = 1, 2, 3, 4$:

$$B \simeq 6.7 \times 10^{-3}, \quad 1.3 \times 10^{-2}, \quad 2.0 \times 10^{-2}, \quad 2.7 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

الحل

لنرمز بـ $e > 0$ إلى مقدار شحنة الإلكترون، فتكون شحنته $-e$. نستخدم الميكانيكا غير النسبية، ونهمل الطاقة الحركية الابتدائية قبل التسريع، وندرس الحركة في المجال المغناطيسي المنتظم بعد خروج الإلكترونات من المدفع.

يزوّد فرق جهد التسريع الإلكترونات بطاقة حركية:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

القوة المغناطيسية

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

عمودية على السرعة، ولذلك لا تبذل شغلاً. ومن ثم، يظل مقدار السرعة ثابتاً على طول المسار.

(a) المجال عمودي على مستوى الشكل

تظل السرعة عمودية على المجال المغناطيسي. وتؤمّن القوة المغناطيسية القوة الجاذبة المركزية اللازمة للحركة الدائرية:

$$evB = \frac{m_e v^2}{R}, \quad R = \frac{m_e v}{eB}.$$

لنأخذ $T = (0, 0)$ ، بحيث تكون السرعة الابتدائية في الاتجاه الموجب للمحور x ، ويكون الاتجاه الموجب للمحور y نحو الأعلى في الشكل. عندئذٍ

$$M = (d \cos \alpha, -d \sin \alpha).$$

يجب أن ينحني المدار نحو الأسفل، ولذلك يكون مركزه $C = (0, -R)$. وباستراط وقوع M على هذه الدائرة نحصل على

$$(d \cos \alpha)^2 + (R - d \sin \alpha)^2 = R^2.$$

إن

$$d^2 - 2Rd \sin \alpha = 0, \quad R = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

بالجمع بين العبارتين الهندسية والديناميكية لـ R ،

$$B = \frac{2m_e v \sin \alpha}{ed} = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

لتحديد الاتجاه، نلاحظ أن الإلكترون المتحرك في البداية نحو اليمين يجب أن تؤثر فيه قوة نحو الأسفل. ولأن شحنته سالبة، يجب أن يتجه المجال إلى داخل الصفحة.

للمعطيات المقدّمة،

$$v = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19})(1000)}{9.11 \times 10^{-31}}} \simeq 1.87 \times 10^7 \text{ m s}^{-1},$$

وهو ما يتفق مع التقريب غير النسبي. ونصف القطر المطلوب هو

$$R = \frac{0.050}{2 \sin 60^\circ} \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ m},$$

والمجال هو

$$B = 3.6966 \dots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{3.7 \times 10^{-3} \text{ T}}.$$

وهذا يحقق الشرط $B < 0.030 \text{ T}$.

(b) المجال موازٍ لـ TM

نحلّل السرعة الابتدائية إلى مركبتين، إحداهما على امتداد TM والأخرى عمودية عليه:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha.$$

تظل المركبة الموازية ثابتة لأن القوة المغناطيسية ليست لها مركبة في اتجاه المجال. وتنتج عن المركبة العمودية حركة دائرية منتظمة، ولذلك يكون المسار الكامل لولياً، ومحوره موازٍ لـ TM .

للحركة الدائرية،

$$ev_{\perp} B = \frac{m_e v_{\perp}^2}{r}, \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m_e}.$$

ومن ثم يكون زمنها الدوري

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

بما أن موضعي T و M لا يختلفان إلا على امتداد اتجاه المجال، فلا بد أن يعود الإلكترون إلى موضعه العرضي الابتدائي عند وصوله إلى M . عندما تكون $v_{\perp} \neq 0$ ، يحدث ذلك تحديداً بعد عدد صحيح n من الدورات الكاملة:

$$t = nP, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

خلال هذا الزمن، يجب أن تساوي الإزاحة على امتداد TM المسافة d :

$$d = v \cos \alpha nP = v \cos \alpha \frac{2\pi n m_e}{eB}.$$

ولذلك،

$$B_n = \frac{2\pi n m_e v \cos \alpha}{ed} = \frac{2\pi n \cos \alpha}{d} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

يؤدي عكس اتجاه المجال المغناطيسي إلى عكس اتجاه الدوران، لكنه يُبقي كلاً من الزمن الدوري والحركة على امتداد TM دون تغيير. وهكذا فإن كلا اتجاهي المجال الموازيين لـ TM يحقق المطلوب.

للمعطيات العددية، يكون المقدار الأساسي للمجال

$$B_1 = \frac{2\pi \cos 60^\circ}{0.050} \sqrt{\frac{2(9.11 \times 10^{-31})(1000)}{1.60 \times 10^{-19}}} = 0.0067049 \dots \text{ T}.$$

ويقتضي الحد الأعلى أن يكون

$$nB_1 < 0.030 \text{ T}, \quad n < 4.4743 \dots$$

إذن الأعداد الصحيحة المسموح بها والمجالات المقابلة لها، مقربةً إلى رقمين معنويين، هي

عدد الدورات الكاملة n	الحث المغناطيسي B_n
1	$6.7 \times 10^{-3} \text{ T}$
2	$1.3 \times 10^{-2} \text{ T}$
3	$2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$
4	$2.7 \times 10^{-2} \text{ T}$

القيمة التالية، $B_5 \simeq 0.0335 \text{ T}$ ، تتجاوز الحد.

تنطبق هذه الحلول المتقطعة على الزاوية الحادة غير الصفرية الموضحة في الشكل. إذا كانت $\alpha = 0$ ، فإن الإلكترونات تتحرك أصلاً على امتداد TM ، ويُبقى أي مجال مغناطيسي موازٍ تلك الحركة المستقيمة دون تغيير. وإذا كانت $\cos \alpha \leq 0$ ، فلا تستطيع الإلكترونات الوصول إلى هدف يقع على مسافة موجبة على امتداد TM ، لأن مركبة سرعتها في ذلك الاتجاه لا يمكن أن تزداد.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.