

IPhO 1976

理论题与解答 · 匈牙利布达佩斯 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/1976/

题目 1：旋转空心球内的小物块

一个半径为 $R = 0.5 \text{ m}$ 的空心球绕通过球心的竖直轴以角速度 $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ 旋转。球内有一个小物块，在距球底 $R/2$ 的高度处随球一起运动（图 6）。（ $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。）

- a) 要满足这一条件，摩擦系数至少应为多少？
- b) 对于 $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ 的情况，也求出最小摩擦系数。
- c) 研究这两种情况下的稳定性问题，
 - α) 当物块的位置发生微小变化时，
 - β) 当球的角速度发生微小变化时。

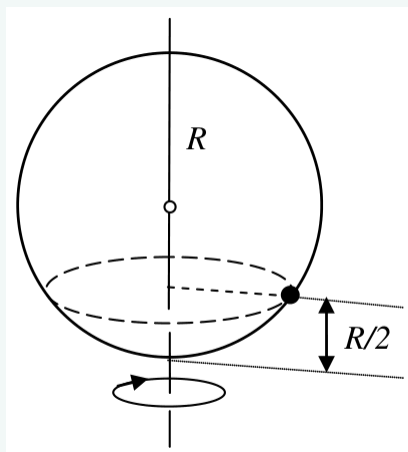


图 6

题目译自官方英文原文。

答案

- a) $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$ ，摩擦力沿球面向上。
- b) $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$ ，摩擦力沿球面向下。这两个系数均为无量纲量。
- c) α) 在各自的最小摩擦系数下，两种平衡都是局部稳定的：向一侧偏移时有恢复趋势，向另一侧偏移时则可保持相对静止：
 - 在 5 s^{-1} 时，向上位移会产生向下的恢复趋势；向下位移后可保持相对静止。
 - 在 8 s^{-1} 时，向下位移会产生向上的恢复趋势；向上位移后可保持相对静止。

沿方位角方向的位移是中性的。– c) β) 比较原高度处彼此接近的匀速转动状态：– 在 5 s^{-1} 时，增大 ω 后可保持相对静止；减小它则会产生向下滑动的趋势。– 在 8 s^{-1} 时，减小 ω 后可保持相对静止；增大它则会产生向上滑动的趋势。

因此，对于转速的变化，原高度处于临界状态，但附近仍存在稳定的相对静止位置。

解答

a) 将小物块视为质点，并采用库仑摩擦模型。令 θ 表示物块的角位置，从通过球心的竖直向下方向量起。它距球底的高度以及到转轴的距离分别为

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

图中给定 $h = R/2$ ，因此

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

用 N 表示指向球内的法向支持力，用 f 表示带符号的摩擦力，取沿球面向上，即 θ 增大的方向为正方向。

在随球转动的参考系中，相对静止的物块受到重力、法向支持力、摩擦力以及离心力 $m\omega^2 R \sin \theta$ 。沿垂直于球面及与球面相切的方向分解力，得

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

静力平衡要求 $|f| \leq \mu N$ 。因此，在指定高度处，

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

当 $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ 时，

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

因而

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

此时 $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$ ，所以摩擦力必须沿球面向上。

b) 当 $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ 时，

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

得到

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

现在 $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$ ：离心力的切向分量大于与其方向相反的重力切向分量。因此，摩擦力沿球面向下。

c) α) 位置的微小变化

保持摩擦系数等于上面求出的相应最小值。考虑物块沿球面发生微小位移后，从相对于球静止的状态释放。我们采用理想化的单一摩擦系数库仑摩擦模型。

引入

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

保持相对静止的条件为

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

若 $K > \mu$ ，即使向上的摩擦力达到最大值也不足以维持平衡，物块便开始向下运动。若 $K < -\mu$ ，向下的最大摩擦力不足以维持平衡，物块便开始向上运动。

在角速度固定时，

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

在 $\theta_0 = 60^\circ$ 处，分子为

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

所以在这两种情况下， K 均随高度增大而增大。

对于 5 s^{-1} ，原平衡状态满足 $K = \mu$ 。将物块向上移动会使 $K > \mu$ ，从而使其向下运动，趋向原来的纬度位置。将其向下移动，则会使 K 落入可保持相对静止的区间内。

对于 8 s^{-1} ，原平衡状态满足 $K = -\mu$ 。将物块向下移动会使 $K < -\mu$ ，从而使其向上运动，趋向原来的纬度位置。将其向上移动，则会使 K 落入可保持相对静止的区间内。

角速度	微小向上位移	微小向下位移
5 s^{-1}	向下的恢复趋势	可保持相对静止
8 s^{-1}	可保持相对静止	向上的恢复趋势

因此，在这种位移检验下，两种平衡都是局部稳定的。摩擦力使物块能够在邻近位置保持相对静止，所以物块不一定恰好回到原来的纬度位置。绕竖直轴的位移不会改变任何力的分量，因此是中性的。

c) β) 角速度的微小变化

首先，保持物块位于原高度，比较彼此接近的匀速转动状态。将带符号的摩擦力比值对 q 求导，

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

由于 $q = \omega^2 R/g$ ，增大角速度会使 K 减小。

在 5 s^{-1} 时，初始状态满足 $K = \mu$ 。增大 ω 会使 K 进入允许区间；减小 ω 则会使 $K > \mu$ ，此时所需的向上摩擦力超过能够提供的最大值。

在 8 s^{-1} 时，初始状态满足 $K = -\mu$ 。减小 ω 会使 K 进入允许区间；增大 ω 则会使 $K < -\mu$ ，此时所需的向下摩擦力超过能够提供的最大值。

初始角速度	ω 微小增大	ω 微小减小
5 s^{-1}	可在原高度保持相对静止	向下滑动的趋势
8 s^{-1}	向上滑动的趋势	可在原高度保持相对静止

因此，在最小摩擦系数下，原高度无法在转速增大和减小这两种情况下都得以维持。

不过，允许的相对静止位置的边界会连续移动。保持 $K = \pm\mu$ 并微分，得到

$$\delta\theta_b = \frac{\sin\theta_0}{1 - q\cos\theta_0 + q^2\sin^2\theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta\omega.$$

在两种情况下，该系数均为有限的正值。因此，当转速沿不利方向变化时，在情况 a) 中略微向下调整位置，或在情况 b) 中略微向上调整位置，即可到达邻近的允许相对静止的位置范围。

解答已与官方解答核对。

题目 2：带有活塞和装有阀门的隔板的气缸中的氦气

一个底面积为 1 dm^2 的气缸，其缸壁、活塞和内部隔板均完全绝热（图 10）。当隔板右侧的压强大于左侧的压强时，隔板上的阀门便会打开。初始时，左侧有 12 g 氦气，右侧有 2 g 氦气。两侧的长度均为 11.2 dm ，温度为 0°C 。外界压强为 100 kPa 。

定容比热容为 $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$ ，定压比热容为 $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$ 。将活塞缓慢推向隔板。当阀门打开时，我们停止推动，然后继续缓慢推动，直至活塞到达隔板。求我们对活塞所做的功。

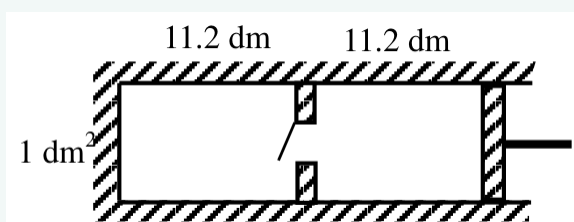


图 10

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2：我们对活塞所做的功为

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ}.$$

解答

将氦气视为理想气体，其比热容为题给常量。忽略摩擦和动能；活塞缓慢运动，使压缩过程成为准静态过程。

每个气室的初始体积为

$$V_0 = A\ell_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

此外,

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

阀门打开前。左侧气体的体积和温度保持不变, 因此其压强保持为

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa}.$$

右侧的初始压强为

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

右侧气体经历准静态绝热压缩:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

其中, v 为其瞬时体积。在准静态极限下, 当 $p_R = p_{L0}$ 时, 阀门开始打开。因此, 阀门打开时右侧气体的体积为

$$v_* = V_0 \left(\frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

暂停期间, 活塞不动, 因此不做功。暂停期间内部发生的任何平衡过程也不会改变总能量。

阀门打开后。继续缓慢压缩会使氦气转移到左侧气室。打开理想阀门所需的压强差为无穷小, 因此两个气室具有共同的压强 p 。

两者的温度不必相等。对于任一气室, 由理想气体状态方程可得

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

因此, 将气体总体积记为 $\mathcal{V} = V_0 + v$, 有

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

整个气体系统是绝热的, 且只有活塞通过边界位移做功。因此,

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

代入可得

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

即

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

于是,

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{常量}.$$

这一关系由能量守恒和压强相等得出, 并不要求两个气室的温度相等。

在这一阶段开始时, $\mathcal{V} = V_0 + v_*$, 且 $p = p_{L0}$ 。当活塞到达隔板时, 全部氦气占据的体积为 V_0 。因此, 其最终压强为

$$\begin{aligned}
 p_f &= p_{L0} \left(\frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\
 &= p_{L0} \left(1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\
 &\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa}.
 \end{aligned}$$

我们所做的功。由于没有热量传入气体，对气体所做的总功等于其内能的增加量：

$$\begin{aligned}
 W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\
 &= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\
 &\approx 4797.3 \text{ J}.
 \end{aligned}$$

其中一部分功由大气提供。活塞扫过的体积等于右侧气室的全部初始体积，因此

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J}.$$

在活塞动能和摩擦均可忽略的情况下，

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

因此

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：测量玻璃球内部的气泡

一个玻璃球内部的某处有一个气泡。请说明如何在不损坏玻璃球的情况下测定气泡的直径。

题目译自官方英文原文。

答案

题目 3. 三种可行的无损测量方法如下：

- **称重法：** 测量玻璃球的外径 D 和质量 m 。若玻璃的密度为 ρ_g ，忽略空气的质量，则

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi\rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **光学浸液法：** 将玻璃球浸入折射率与玻璃相同的液体中。使用经过标定的光学仪器测量气泡的横向轮廓。若其像的直径为 L ，横向放大率为 M ，则

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **射线照相法：** 使用平行 X 射线束，测量气泡的投影直径。利用经过标定的图像比例尺，即可直接得到气泡的实际直径。

题目未给出数值数据。

解答

我们假设玻璃是均匀的，且气泡为球形；题目要求测定气泡的直径，已隐含了后一个假设。记玻璃球的外半径为 $R = D/2$ ，气泡半径为 $r = d/2$ 。气泡不一定处于玻璃球的中心。

称重法

用卡尺测量 D ，用天平测量 m 。玻璃的密度必须通过独立的方法确定，例如测量同种玻璃的另一块样品。

玻璃球的外部总体积和气泡的体积分别为

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

若气泡内空气的密度为 ρ_a ，由质量守恒可得

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

因此，

$$d = \left[\frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

通常 $\rho_a \ll \rho_g$ ，于是有

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

这一结果与气泡的位置无关。对于小气泡，这种方法要求精确测量：缺少的质量仅约为实心玻璃球质量的 $(d/D)^3$ 。

在折射率匹配液体中的光学测量

将玻璃球放入透明槽中，槽内盛有折射率与玻璃相等的液体。必要时使用单色光，以免色散妨碍折射率的精确匹配。

在玻璃球的外表面，斯涅尔定律写为

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

由于 $n_\ell = n_g$ ，有 $t = i$ ：外部球形界面不再使光线偏折。由于空气和玻璃的折射率不同，气泡仍然可见。

透过槽上垂直于观察方向的平面窗口进行观察。使用平行的观察光线，例如采用远心成像系统，或者使用光轴始终垂直于窗口的读数显微镜。

界定气泡轮廓的极限光线与气泡相切。从轮廓外侧趋近这些极限光线时，光线始终完全位于玻璃和折射率匹配液体中，因此不会被空气空腔折射。球体的正投影是一个直径等于其真实直径的圆，与球体所处的深度无关。

因此，若读数显微镜记录到气泡两侧相对边缘的横向位置为 x_L 和 x_R ，则

$$d = |x_R - x_L|.$$

或者，利用横向放大率为 M 的经过标定的图像，可得

$$d = L/M.$$

X 射线透射法

用穿透能力足够强、近似平行的 X 射线束照射玻璃球，并记录透射强度。忽略射线的偏折和散射。空气对射线束的衰减远小于玻璃，因此气泡会形成一个透射增强的区域。

对于一条与气泡投影中心的横向距离为 s 的射线，沿射线路径被空气取代的玻璃长度为

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

若 μ_g 和 μ_a 为线性衰减系数，则由比尔-朗伯定律可得

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

其中， I_{solid} 是射线透过除无气泡外其余条件均相同的实心玻璃球时的透射强度。

因此，透射增强区域的边界位于 $s = r$ ，形成直径为 d 的圆形投影。对于平行射线，气泡沿射线束方向的位置不影响其投影大小。若记录到的玻璃球外轮廓直径和气泡直径分别为 L_s 和 L_b ，则

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

解答已与官方解答核对。