

# IPhO 1976

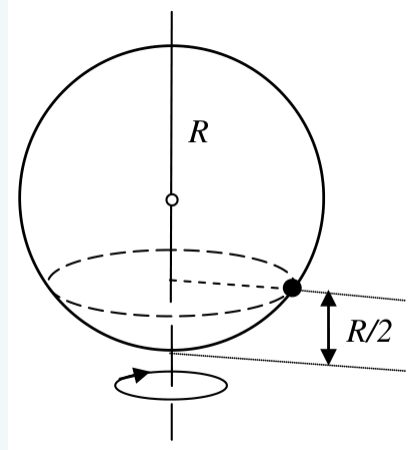
Teorik sorular ve çözümler · Budapeşte, Macaristan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1976/

## Soru 1: Dönen içi boş bir kürenin içindeki küçük blok

Yarıçapı  $R = 0.5 \text{ m}$  olan içi boş bir küre, merkezinden geçen düşey bir eksen etrafında  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  açısal hızıyla dönmektedir. Kürenin içindeki küçük bir blok,  $R/2$  yüksekliğinde küreyle birlikte hareket etmektedir (Şekil 6). ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ .)

- Bu koşulun sağlanması için sürtünme katsayısı en az ne olmalıdır?
- $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$  durumu için de en küçük sürtünme katsayısını bulunuz.
- Her iki durumda da kararlılığı,
  - bloğun konumundaki küçük bir değişim için,
  - kürenin açısal hızındaki küçük bir değişim için inceleyiniz.



Şekil 6

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

## Cevaplar

- a)  $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$ ; sürtünme, yüzey boyunca yukarı doğru etki eder.
- b)  $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$ ; sürtünme, yüzey boyunca aşağı doğru etki eder. Her iki katsayı da boyutsuzdur.
- c) a) İlgili en küçük katsayı değerlerinde, her iki denge de bir tarafta geri çağırıcı bir eğilim, diğer tarafta ise kaymadan durma ile yerel olarak kararlıdır:

- $5 \text{ s}^{-1}$  için, yukarı doğru bir yer değiştirme aşağı doğru geri çağırıcı bir eğilim oluşturur; aşağı doğru bir yer değiştirme ise kaymadan durmaya olanak tanır.
- $8 \text{ s}^{-1}$  için, aşağı doğru bir yer değiştirme yukarı doğru geri çağırıcı bir eğilim oluşturur; yukarı doğru bir yer değiştirme ise kaymadan durmaya olanak tanır.

Azimut doğrultusundaki yer değiştirmeler nötrdür. - **c) β)** Başlangıç yüksekliğinde, birbirine yakın sabit hızlı dönme durumları karşılaştırıldığında: -  $5 \text{ s}^{-1}$  için,  $\omega$ 'nın artırılması kaymadan durmaya olanak tanır; azaltılması ise aşağı doğru kayma eğilimi oluşturur. -  $8 \text{ s}^{-1}$  için,  $\omega$ 'nın azaltılması kaymadan durmaya olanak tanır; artırılması ise yukarı doğru kayma eğilimi oluşturur.

Dolayısıyla başlangıç yüksekliği, hız değişimlerine karşı sınırdadır; bununla birlikte, yakınlarda kararlı durma konumları bulunmaya devam eder.

## Çözüm

**a)** Küçük bloğu bir parçacık olarak ele alalım ve Coulomb sürtünmesini kullanalım. Kürenin merkezinden geçen aşağı yönlü düşey doğrultudan ölçülen açısal konumu  $\theta$  olsun. Kürenin en alt noktasına göre yüksekliği ve dönme eksenine uzaklığı

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

Şekilde  $h = R/2$  verildiğinden,

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

İçe yönelen normal tepki kuvvetini  $N$ , işaretli sürtünme kuvvetini ise  $f$  ile gösterelim;  $f$ 'nin pozitif yönü,  $\theta$ 'nin arttığı yönde, **yüzey boyunca yukarı doğru** olsun.

Küreyle birlikte dönen referans sisteminde, durmakta olan bloğa yerçekimi kuvveti, normal tepki kuvveti, sürtünme kuvveti ve  $m\omega^2 R \sin \theta$  merkezkaç kuvveti etki eder. Yüzeye dik ve teğet doğrultularda bileşenlere ayırırsak

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

Statik denge için  $|f| \leq \mu N$  olmalıdır. Dolayısıyla belirtilen yükseklikte,

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

$\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  için,

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

ve buradan

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

Burada  $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$  olduğundan, sürtünme yüzey boyunca yukarı doğru etki etmelidir.

**b)**  $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$  için,

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

olduğundan

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

Bu kez  $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$  olur: merkezkaç kuvvetinin teğetsel bileşeni, yerçekimi kuvvetinin ona karşı koyan bileşeninden büyüktür. Bu nedenle sürtünme, yüzey boyunca aşağı doğru etki eder.

### c) a) Konumdaki küçük değişimler

Katsayıyı, yukarıda bulunan ilgili en küçük değere eşit turalım. Yüzey boyunca küçük bir yer değiştirmeyi ve ardından bloğun küreye göre durgun olarak serbest bırakılmasını ele alalım. İdealleştirilmiş, tek katsayılı Coulomb sürtünmesi modelini kullanıyoruz.

Şu tanımları yapalım:

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

Kaymadan durma koşulu

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

$K > \mu$  ise, yukarı yönlü en büyük sürtünme kuvveti bile yetersiz kalır ve blok aşağı doğru hareket etmeye başlar.  $K < -\mu$  ise, aşağı yönlü en büyük sürtünme kuvveti yetersiz kalır ve blok yukarı doğru hareket etmeye başlar.

Sabit açısal hızda,

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

$\theta_0 = 60^\circ$  için pay

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

olduğundan, her iki durumda da  $K$  yükseklikle artar.

$5 \text{ s}^{-1}$  için başlangıç dengesinde  $K = \mu$  olur. Bloğu yükseltmek  $K > \mu$  yapar ve başlangıçtaki enlemine doğru aşağı yönlü bir hareket oluşturur. Bloğu alçaltmak ise  $K$ 'yı kaymadan durma aralığının içine getirir.

$8 \text{ s}^{-1}$  için başlangıç dengesinde  $K = -\mu$  olur. Bloğu alçaltmak  $K < -\mu$  yapar ve başlangıçtaki enlemine doğru yukarı yönlü bir hareket oluşturur. Bloğu yükseltmek ise  $K$ 'yı kaymadan durma aralığının içine getirir.

| Açısal hız         | Yukarı doğru küçük yer değiştirme | Aşağı doğru küçük yer değiştirme  |
|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $5 \text{ s}^{-1}$ | Aşağı yönlü geri çağırıcı eğilim  | Kaymadan durabilir                |
| $8 \text{ s}^{-1}$ | Kaymadan durabilir                | Yukarı yönlü geri çağırıcı eğilim |

Dolayısıyla bu yer değiştirme sınavasında her iki denge de yerel olarak karardır. Sürtünme, komşu durma konumlarına olanak tanıdığından, bloğun tam olarak başlangıçtaki enlemine dönmesi gerekmez. Düşey eksen etrafındaki bir yer değiştirme, kuvvet bileşenlerinin hiçbirini değiştirmez ve nötrdür.

### c) $\beta$ ) Açısal hızdaki küçük değişimler

Önce, bloğu başlangıç yüksekliğinde tutarak birbirine yakın sabit hızlı dönme durumlarını karşılaştıralım. İşaretli sürtünme oranının  $q$ 'ya göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

$q = \omega^2 R/g$  olduğundan, açısal hızın artırılması  $K$ 'yı azaltır.

$5 \text{ s}^{-1}$  için başlangıçta  $K = \mu$  olur.  $\omega$ 'nın artırılması  $K$ 'yı izin verilen aralığın içine getirir;  $\omega$ 'nın azaltılması ise  $K > \mu$  yapar ve sağlanabilecek olandan daha büyük bir yukarı yönlü sürtünme kuvveti gerektirir.

$8 \text{ s}^{-1}$  için başlangıçta  $K = -\mu$  olur.  $\omega$ 'nın azaltılması  $K$ 'yı izin verilen aralığın içine getirir;  $\omega$ 'nın artırılması ise  $K < -\mu$  yapar ve sağlanabilecek olandan daha büyük bir aşağı yönlü sürtünme kuvveti gerektirir.

| Başlangıç açısal hızı | $\omega$ 'da küçük artış                   | $\omega$ 'da küçük azalış                  |
|-----------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $5 \text{ s}^{-1}$    | Başlangıç yüksekliğinde kaymadan durabilir | Aşağı doğru kayma eğilimi                  |
| $8 \text{ s}^{-1}$    | Yukarı doğru kayma eğilimi                 | Başlangıç yüksekliğinde kaymadan durabilir |

Dolayısıyla en küçük katsayı değerinde, hız değişiminin her iki işareti için de başlangıç yüksekliği korunamaz.

Bununla birlikte, izin verilen durma konumlarının sınırı sürekli olarak yer değiştirir.  $K = \pm \mu$  koşulunu koruyup diferansiyel alırsak

$$\delta \theta_b = \frac{\sin \theta_0}{1 - q \cos \theta_0 + q^2 \sin^2 \theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta \omega.$$

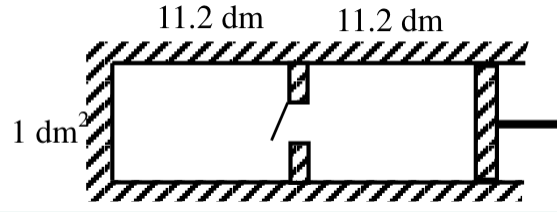
Buradaki katsayı her iki durumda da sonlu ve pozitifdir. Dolayısıyla hızın elverişsiz yönde değişmesi durumunda, a) durumunda aşağı doğru, b) durumunda ise yukarı doğru küçük bir konum ayarlamasıyla, yakınlardaki izin verilen durma konumları aralığına ulaşılır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

## Soru 2: Pistonlu ve valfli bir bölme duvarı bulunan silindirde helyum

Taban alanı  $1 \text{ dm}^2$  olan bir silindirin duvarları, pistonu ve iç bölme duvarı kusursuz ısı yalıtkanlarıdır (Şekil 10). Bölme duvarındaki valf, sağ taraftaki basınç sol taraftakinden büyük olduğunda açılır. Başlangıçta sol tarafta  $12 \text{ g}$ , sağ tarafta ise  $2 \text{ g}$  helyum vardır. Her iki tarafın uzunluğu da  $11.2 \text{ dm}$ , sıcaklık ise  $0^\circ \text{C}$ 'dir. Dışarıdaki basınç  $100 \text{ kPa}$ 'dır.

Sabit hacimde özgül ısı  $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$ , sabit basınçta özgül ısı ise  $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$ 'dir. Piston, bölme duvarına doğru yavaşça itilir. Valf açıldığında durur, ardından duvara ulaşılincaya kadar yavaşça itmeye devam ederiz. Piston üzerinde yaptığımız işi bulunuz.



Şekil 10

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

## Cevaplar

- **Soru 2:** Piston üzerinde yaptığımız iş

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ.}$$

kadardır.

## Çözüm

Helyumu, verilen sabit özgül ısılara sahip ideal bir gaz olarak ele alalım. Sürtünmeyi ve kinetik enerjiyi ihmal edelim; pistonun yavaş hareketi sıkıştırmanın kuazistatik olmasını sağlar.

Her bölmenin başlangıç hacmi

$$V_0 = A\ell_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Ayrıca,

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

**Valf açılmadan önce.** Sol taraftaki gazın hacmi ve sıcaklığı sabit kaldığından basıncı da

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa.}$$

değerinde kalır. Sağ taraftaki başlangıç basıncı

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Sağ taraftaki gaz kuazistatik adyabatik sıkıştırmaya uğrar:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

burada  $v$ , gazın anlık hacmidir. Kuazistatik limitte valf,  $p_R = p_{L0}$  olduğunda açılmaya başlar. Dolayısıyla açılma anında sağ taraftaki hacim

$$v_* = V_0 \left( \frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Duraklama sırasında piston hareket etmediği için iş yapılmaz. Duraklama sırasında sistem içinde gerçekleşebilecek herhangi bir dengeye gelme süreci de toplam enerjiyi değiştirmez.

**Valf açıldıktan sonra.** Yavaş sıkıştırma sürdürüldükçe helyum sol bölmeye aktarılır. İdeal valfi açmak için gereken basınç farkı sonsuz küçük olduğundan iki bölmenin basıncı ortak bir  $p$  değerindedir.

Bölmelerin sıcaklıklarının eşit olması gerekmez. Her bir bölme için ideal gaz denklemi

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

bağıntısını verir. Böylece toplam gaz hacmini  $\mathcal{V} = V_0 + v$  olarak yazarak

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

elde ederiz.

Gaz sisteminin tamamı ısı olarak yalıtılmıştır ve sistem sınırında yalnızca piston iş yapar. Dolayısıyla,

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Yerine koyarsak

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

ya da

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{sabit}.$$

Bu bağıntı, enerjinin korunumundan ve basınçların eşitliğinden çıkar; bölmelerin sıcaklıklarının eşit olmasını gerektirmez.

Bu aşamanın başlangıcında  $\mathcal{V} = V_0 + v_*$  ve  $p = p_{L0}$ 'dır. Piston bölme duvarına ulaştığında helyumun tamamı  $V_0$  hacmini kaplar. Dolayısıyla son basıncı

$$\begin{aligned} p_f &= p_{L0} \left( \frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\ &= p_{L0} \left( 1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\ &\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

**Bizim yaptığımız iş.** Gaza ısı girişi olmadığından gaz üzerinde yapılan toplam iş, gazın iç enerjisindeki artışa eşittir:

$$\begin{aligned} W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\ &= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\ &\approx 4797.3 \text{ J}. \end{aligned}$$

Bu işin bir kısmını atmosfer yapar. Piston, sağ tarafın başlangıç hacminin tamamını süpürdüğünden

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J}.$$

Pistonun kinetik enerjisi ve sürtünme ihmal edildiğinde,

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

Böylece

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J.}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

### Soru 3: Bir cam kürenin içindeki hava kabarcığının ölçülmesi

Bir cam kürenin bir yerinde hava kabarcığı bulunmaktadır. Küreye zarar vermeden kabarcığın çapının nasıl belirlenebileceğine ilişkin yöntemler açıklayınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

#### Cevaplar

**Soru 3.** Kullanılabilecek üç tahribatsız yöntem şunlardır:

- **Tartma:** Kürenin dış çapını  $D$  ve kütlesini  $m$  ölçün. Camın yoğunluğu  $\rho_g$  ise, havanın kütlesi ihmal edildiğinde,

$$d = \left( D^3 - \frac{6m}{\pi\rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **Optik daldırma:** Küreyi camla aynı kırılma indisine sahip bir sıvıya daldırın. Kabarcığın enine doğrultudaki dış sınırını kalibre edilmiş optik araçlarla ölçün. Görüntü çapı  $L$  ve enine büyütme  $M$  ise,

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **Radyografi:** Paralel bir X-ışını demeti kullanın ve kabarcığın izdüşümünün çapını ölçün. Kalibre edilmiş bir görüntü ölçeğiyle bu ölçüm, kabarcığın gerçek çapını doğrudan verir.

Sayısal veri verilmemiştir.

#### Çözüm

Camın homojen olduğunu ve çapının sorulmasının örtük olarak gerektirdiği üzere kabarcığın küresel olduğunu varsayıyoruz. Dış yarıçapı  $R = D/2$ , kabarcığın yarıçapını ise  $r = d/2$  olarak gösterelim. Kabarcığın cam kürenin merkezinde bulunması gerekmez.

#### Tartma

$D$ 'yi kumpasla,  $m$ 'yi ise teraziyle ölçün. Camın yoğunluğu bağımsız olarak, örneğin aynı camdan alınmış ayrı bir numuneden, bilinmelidir.

Dış hacim ve kabarcığın hacmi şöyledir:

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Kabarcığın içindeki havanın yoğunluğu  $\rho_a$  ise kütlenin korunumu şunu verir:

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

Dolayısıyla,

$$d = \left[ \frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

Genellikle  $\rho_a \ll \rho_g$  olduğundan,

$$d = \left( D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

Sonuç, kabarcığın konumundan bağımsızdır. Küçük bir kabarcık için bu yöntem hassas ölçümler gerektirir: eksik kütle, içi dolu bir cam kürenin kütesinin yalnızca yaklaşık  $(d/D)^3$  kadardır.

### Kırılma indisi eşleştirilmiş bir sıvıda optik ölçüm

Küreyi, kırılma indisi caminkiyile aynı olan bir sıvı içeren saydam bir kaba yerleştirin. Gerekirse, dispersiyonun indislerin hassas biçimde eşleştirilmesini engellememesi için tek renkli ışık kullanın.

Dış yüzeyde Snell yasası şu biçimi alır:

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

$n_\ell = n_g$  olduğundan  $t = i$  olur: dıştaki küresel sınır artık ışınların yönünü değiştirmez. Hava ve camın kırılma indisleri farklı olduğu için kabarcık görünür kalır.

Kabın bakış doğrultusuna dik olan düz bir penceresinden gözlem yapın. Paralel gözlem ışınları kullanın—örneğin telesentrik bir görüntüleme sistemi—ya da eksenini pencereye dik kalacak şekilde hareket ettirilen bir ölçüm mikroskobu kullanın.

Kabarcığın dış sınırını belirleyen sınır ışınları kabarcığa teğettir. Dış sınıra dışarıdan yaklaşıldığında bu ışınlar bütünüyle camın ve indisi eşleştirilmiş sıvının içinde kalır; dolayısıyla hava boşluğu tarafından kırılmazlar. Bir kürenin dik izdüşümü, derinliğinden bağımsız olarak, gerçek çapına eşit çapta bir dairedir.

Böylece, hareketli bir ölçüm mikroskobu karşılıklı iki kenarı enine doğrultudaki  $x_L$  ve  $x_R$  konumlarında kaydederse,

$$d = |x_R - x_L|.$$

Alternatif olarak, enine büyütmesi  $M$  olan kalibre edilmiş bir görüntü şunu verir:

$$d = L/M.$$

### X-ışını geçirimi

Küreye, yeterli nüfuz etme gücüne sahip, yaklaşık olarak paralel bir X-ışını demeti gönderin ve geçen ışının şiddetini kaydedin. Işınların yön değiştirmesini ve saçılmayı ihmal edin. Hava, demeti cama göre çok daha az zayıflattığından kabarcık, geçirimin arttığı bir bölge oluşturur.

Kabarcık merkezinin izdüşümünden enine doğrultuda  $s$  uzaklığındaki bir ışın için, camın yerini havanın aldığı yolun uzunluğu şöyledir:

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

$\mu_g$  ve  $\mu_a$  doğrusal zayıflatma katsayıları ise Beer–Lambert yasası şunu verir:

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

burada  $I_{\text{solid}}$ , diğer tüm özellikleri aynı olan içi dolu bir cam küreden geçen ışının şiddetidir.

Dolayısıyla geçirimin arttığı bölge  $s = r$ 'de sona erer ve çapı  $d$  olan dairesel bir izdüşüm verir. Paralel ışınlar kullanıldığında, kabarcığın demet doğrultusundaki konumu izdüşümünün boyutunu etkilemez. Kaydedilen görüntüde kürenin dış çapı ve kabarcığın çapı sırasıyla  $L_s$  ve  $L_b$  ise,

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

---

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.