

IPhO 1976

Теоретические задачи и решения · Будапешт, Венгрия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1976/

Задача 1: Небольшой брусок внутри вращающейся полый сферы

Полая сфера радиусом $R = 0.5 \text{ m}$ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр, с угловой скоростью $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$. Внутри сферы небольшой брусок движется вместе со сферой на высоте $R/2$ (рис. 6). ($g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- Каков должен быть минимальный коэффициент трения, чтобы это условие выполнялось?
- Найдите минимальный коэффициент трения также для случая $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$.
- Исследуйте устойчивость в обоих случаях,
 - при малом изменении положения бруска,
 - при малом изменении угловой скорости сферы.

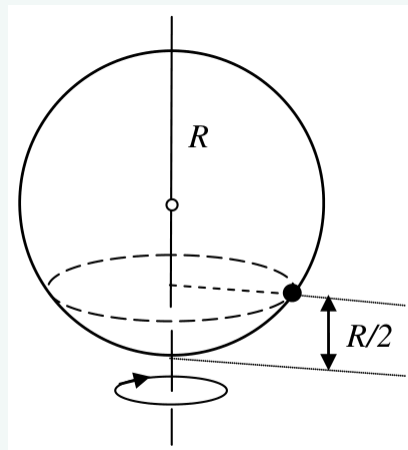


Рисунок 6

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$, причём сила трения направлена вверх вдоль поверхности.
- **b)** $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$, причём сила трения направлена вниз вдоль поверхности.

Оба коэффициента безразмерны.

- **с) а)** При соответствующих минимальных коэффициентах оба положения равновесия локально устойчивы: при смещении в одну сторону возникает тенденция к возвращению, а при смещении в другую возможно сохранение покоя относительно сферы:
- При 5 s^{-1} смещение вверх вызывает тенденцию к возвращению вниз; при смещении вниз брусок может оставаться в покое относительно сферы.
- При 8 s^{-1} смещение вниз вызывает тенденцию к возвращению вверх; при смещении вверх брусок может оставаться в покое относительно сферы.

Азимутальные смещения безразличны. - **с) б)** При сравнении близких установившихся вращений на исходной высоте: - При 5 s^{-1} увеличение ω допускает сохранение покоя относительно сферы; уменьшение вызывает тенденцию к скольжению вниз. - При 8 s^{-1} уменьшение ω допускает сохранение покоя относительно сферы; увеличение вызывает тенденцию к скольжению вверх.

Таким образом, исходная высота является предельной в отношении изменений скорости вращения, однако поблизости по-прежнему существуют устойчивые положения покоя.

Решение

а) Будем рассматривать небольшой брусок как материальную точку и использовать закон трения Кулона. Обозначим через θ его угловую координату, отсчитываемую от направленной вниз вертикали, проходящей через центр сферы. Его высота над нижней точкой сферы и расстояние до оси вращения равны

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

На рисунке задано $h = R/2$, поэтому

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Обозначим через N направленную внутрь нормальную реакцию, а через f — алгебраическую величину силы трения, положительную при направлении **вверх вдоль поверхности**, в сторону увеличения θ .

В системе отсчёта, вращающейся вместе со сферой, на неподвижный брусок действуют сила тяжести, нормальная реакция, сила трения и центробежная сила $m\omega^2 R \sin \theta$. Проецируя силы на нормаль и касательную к поверхности, получаем

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

Для равновесия относительно сферы необходимо $|f| \leq \mu N$. Следовательно, на заданной высоте

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

При $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

и, следовательно,

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

Здесь $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$, поэтому сила трения должна быть направлена вверх вдоль поверхности.

b) При $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

что даёт

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

Теперь $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$: касательная составляющая центробежной силы превышает противоположно направленную составляющую силы тяжести. Поэтому сила трения направлена вниз вдоль поверхности.

с) а) Малые изменения положения

Оставим коэффициент трения равным соответствующему минимальному значению, найденному выше. Рассмотрим малое смещение вдоль поверхности, после которого брусок отпускают без начальной скорости относительно сферы. Используем идеализированную модель трения Кулона с единым коэффициентом трения.

Введём

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

Условие сохранения покоя относительно сферы имеет вид

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

Если $K > \mu$, даже максимальной силы трения, направленной вверх, недостаточно, и брусок начинает двигаться вниз. Если $K < -\mu$, максимальной силы трения, направленной вниз, недостаточно, и он начинает двигаться вверх.

При постоянной угловой скорости

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

При $\theta_0 = 60^\circ$ числитель равен

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

поэтому в обоих случаях K возрастает с высотой.

При 5 s^{-1} в исходном положении равновесия $K = \mu$. При поднятии бруска получается $K > \mu$, что вызывает движение вниз, к исходной широте. При опускании бруска значение K оказывается внутри интервала, допускающего покой относительно сферы.

При 8 s^{-1} в исходном положении равновесия $K = -\mu$. При опускании бруска получается $K < -\mu$, что вызывает движение вверх, к исходной широте. При поднятии бруска значение K оказывается внутри интервала, допускающего покой относительно сферы.

Угловая скорость	Малое смещение вверх	Малое смещение вниз
5 s^{-1}	Тенденция к возвращению вниз	Может оставаться в покое относительно сферы
8 s^{-1}	Может оставаться в покое относительно сферы	Тенденция к возвращению вверх

Таким образом, при такой проверке смещением оба положения равновесия локально устойчивы. Трение допускает соседние положения покоя, поэтому брусок не обязан возвращаться точно на исходную широту. Смещение вокруг вертикальной оси не меняет ни одной из составляющих сил и является безразличным.

с) β) Малые изменения угловой скорости

Сначала сравним близкие установившиеся вращения, сохраняя брусок на исходной высоте. Дифференцируя отношение алгебраической величины силы трения к нормальной реакции по q , получаем

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

Поскольку $q = \omega^2 R / g$, увеличение угловой скорости уменьшает K .

При 5 s^{-1} первоначально $K = \mu$. Увеличение ω переводит K внутрь допустимого интервала; уменьшение ω приводит к $K > \mu$, так что требуемая сила трения, направленная вверх, превышает максимально возможную.

При 8 s^{-1} первоначально $K = -\mu$. Уменьшение ω переводит K внутрь допустимого интервала; увеличение ω приводит к $K < -\mu$, так что требуемая сила трения, направленная вниз, превышает максимально возможную.

Начальная угловая скорость	Малое увеличение ω	Малое уменьшение ω
5 s^{-1}	На исходной высоте возможен покой относительно сферы	Тенденция к скольжению вниз
8 s^{-1}	Тенденция к скольжению вверх	На исходной высоте возможен покой относительно сферы

Следовательно, при минимальном коэффициенте трения исходная высота не может сохраняться при обоих знаках изменения скорости вращения.

Тем не менее граница допустимых положений покоя смещается непрерывно. Сохраняя $K = \pm\mu$ и дифференцируя, получаем

$$\delta\theta_b = \frac{\sin \theta_0}{1 - q \cos \theta_0 + q^2 \sin^2 \theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta\omega.$$

Коэффициент в этом выражении конечен и положителен в обоих случаях. Таким образом, при изменении скорости вращения в неблагоприятную сторону небольшое смещение вниз в случае а) или небольшое смещение вверх в случае б) приводит брусок в соседнюю область допустимых положений покоя.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Гелий в цилиндре с поршнем и перегородкой с клапаном

Стенки цилиндра с площадью основания 1 dm^2 , поршень и внутренняя перегородка являются идеальными теплоизоляторами (рис. 10). Клапан в перегородке открывается, если давление справа больше давления слева. Первоначально в левой части находится 12 g гелия, а в правой — 2 g гелия. Длина каждой из двух частей составляет 11.2 dm , а температура равна 0°C . Внешнее давление составляет 100 kPa .

Удельная теплоёмкость при постоянном объёме равна $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$, а при постоянном давлении — $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$. Мы медленно перемещаем поршень к перегородке. Когда клапан открывается, мы останавливаемся, а затем продолжаем медленно перемещать поршень до соприкосновения с перегородкой. Найдите работу, совершённую нами над поршнем.

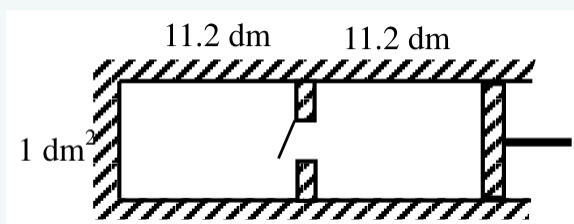


Рисунок 10

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 2:** Работа, совершённая нами над поршнем, равна

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ}.$$

Решение

Будем считать гелий идеальным газом с заданными постоянными удельными теплоёмкостями. Пренебрежём трением и кинетической энергией; благодаря медленному движению поршня сжатие является квазистатическим.

Начальный объём каждого отсека равен

$$V_0 = Al_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Кроме того,

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

До открытия клапана. Объём и температура газа в левом отсеке остаются постоянными, поэтому его давление сохраняет значение

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa}.$$

Начальное давление в правом отсеке равно

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Газ в правом отсеке испытывает квазистатическое адиабатическое сжатие:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

где v — его текущий объём. В квазистатическом пределе клапан начинает открываться при $p_R = p_{L0}$. Следовательно, объём правого отсека в момент открытия равен

$$v_* = V_0 \left(\frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Во время остановки работа не совершается, поскольку поршень не движется. Любое установление внутреннего равновесия во время остановки также оставляет полную энергию неизменной.

После открытия клапана. При дальнейшем медленном сжатии гелий перетекает в левый отсек. Разность давлений, необходимая для открытия идеального клапана, бесконечно мала, поэтому в обоих отсеках устанавливается одинаковое давление p .

Их температуры не обязательно равны. Для каждого отсека из уравнения состояния идеального газа следует

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

Таким образом, обозначив полный объём газа через $\mathcal{V} = V_0 + v$, получаем

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

Вся газовая система теплоизолирована, и работа на её границе совершается только поршнем. Поэтому

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Подстановка даёт

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

или

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

Следовательно,

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{постоянная}.$$

Это соотношение следует из закона сохранения энергии и равенства давлений; оно не требует равенства температур в отсеках.

В начале этого этапа $\mathcal{V} = V_0 + v_*$ и $p = p_{L0}$. Когда поршень достигает перегородки, весь гелий занимает объём V_0 . Поэтому его конечное давление равно

$$\begin{aligned} p_f &= p_{L0} \left(\frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\ &= p_{L0} \left(1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\ &\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

Работа, совершённая нами. Поскольку газ не получает теплоты, полная работа, совершённая над ним, равна увеличению его внутренней энергии:

$$\begin{aligned} W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\ &= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\ &\approx 4797.3 \text{ J.} \end{aligned}$$

Часть этой работы совершает атмосфера. При перемещении поршня вытесняется весь начальный объём правого отсека, поэтому

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J.}$$

Пренебрегая кинетической энергией поршня и трением, получаем

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

Отсюда

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J.}$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Измерение воздушного пузырька внутри стеклянного шара

В некотором месте внутри стеклянного шара находится воздушный пузырёк. Опишите способы определения диаметра пузырька без повреждения шара.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Задача 3. Три возможных неразрушающих метода:

- **Взвешивание:** Измерьте внешний диаметр шара D и его массу m . Если плотность стекла равна ρ_g , то, пренебрегая массой воздуха, получаем

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **Оптическая иммерсия:** Погрузите шар в жидкость с таким же показателем преломления, как у стекла. Измерьте поперечный контур пузырька с помощью откалиброванной оптической системы. Если диаметр его изображения равен L , а поперечное увеличение равно M , то

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **Рентгенография:** Используйте параллельный пучок рентгеновских лучей и измерьте диаметр проекции пузырька. При откалиброванном масштабе изображения это непосредственно даёт его истинный диаметр.

Числовые данные не приведены.

Решение

Предположим, что стекло однородно, а пузырёк имеет сферическую форму, что неявно подразумевается в вопросе о его диаметре. Обозначим внешний радиус через $R = D/2$, а радиус пузырька через $r = d/2$. Пузырёк не обязательно находится в центре стеклянного шара.

Взвешивание

Измерьте D штангенциркулем, а m — с помощью весов. Плотность стекла должна быть известна из независимых измерений, например по отдельному образцу того же стекла.

Объём, ограниченный внешней поверхностью шара, и объём пузырька равны

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Если плотность воздуха внутри пузырька равна ρ_a , то закон сохранения массы даёт

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

Следовательно,

$$d = \left[\frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

Обычно $\rho_a \ll \rho_g$, поэтому

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

Результат не зависит от положения пузырька. Для маленького пузырька этот метод требует точных измерений: недостающая масса составляет лишь приблизительно долю $(d/D)^3$ от массы сплошного стеклянного шара.

Оптическое измерение в жидкости с согласованным показателем преломления

Поместите шар в прозрачную кювету с жидкостью, показатель преломления которой равен показателю преломления стекла. При необходимости используйте монохроматический свет, чтобы дисперсия не препятствовала точному согласованию показателей преломления.

На внешней поверхности закон Снеллиуса принимает вид

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

Поскольку $n_\ell = n_g$, получаем $t = i$: внешняя сферическая граница больше не изменяет направления лучей. Пузырёк остаётся видимым, поскольку воздух и стекло имеют разные показатели преломления.

Наблюдайте через плоское окно кюветы, перпендикулярное направлению наблюдения. Используйте параллельные лучи наблюдения — например, телецентрическую систему формирования изображения — или измерительный микроскоп с поступательным перемещением, ось которого остаётся перпендикулярной окну.

Предельные лучи, определяющие контур пузырька, касаются его поверхности. При приближении к контуру снаружи эти лучи целиком проходят в стекле и жидкости с согласованным показателем преломления, поэтому воздушная полость их не преломляет. Ортогональная проекция шара представляет собой круг с диаметром, равным истинному диаметру шара, независимо от глубины его расположения.

Таким образом, если измерительный микроскоп при перемещении регистрирует два противоположных края в поперечных положениях x_L и x_R , то

$$d = |x_R - x_L|.$$

Другой способ — использовать откалиброванное изображение с поперечным увеличением M , что даёт

$$d = L/M.$$

Просвечивание рентгеновскими лучами

Направьте на шар приблизительно параллельный пучок рентгеновских лучей с достаточной проникающей способностью и зарегистрируйте интенсивность прошедшего излучения. Пренебрегите искривлением лучей и рассеянием. Воздух ослабляет пучок значительно меньше, чем стекло, поэтому пузырёк создаёт область повышенного пропускания.

Для луча, проходящего на поперечном расстоянии s от проекции центра пузырька, длина участка, на котором стекло заменено воздухом, равна

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

Если μ_g и μ_a — линейные коэффициенты ослабления, то закон Бугера — Ламберта — Бера даёт

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

где I_{solid} — интенсивность излучения, прошедшего через сплошной стеклянный шар, во всём остальном идентичный рассматриваемому.

Следовательно, область повышенного пропускания заканчивается при $s = r$, образуя круговую проекцию диаметра d . При параллельных лучах положение пузырька вдоль пучка не влияет на размер его проекции. Если зарегистрированные диаметры изображения внешнего контура шара и изображения пузырька равны соответственно L_s и L_b , то

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

Решение проверено по официальному решению.