

IPhO 1976

Problemas teóricos y soluciones · Budapest, Hungría · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1976/

Problema 1: Bloque pequeño en el interior de una esfera hueca en rotación

Una esfera hueca de radio $R = 0.5 \text{ m}$ gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro con una velocidad angular de $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$. En el interior de la esfera, un bloque pequeño se mueve junto con ella a una altura de $R/2$ (Fig. 6). ($g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento mínimo para que se cumpla esta condición?
- Halle también el coeficiente de rozamiento mínimo para el caso de $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$.
- Estudie la estabilidad en ambos casos,
 - ante un pequeño cambio de la posición del bloque,
 - ante un pequeño cambio de la velocidad angular de la esfera.

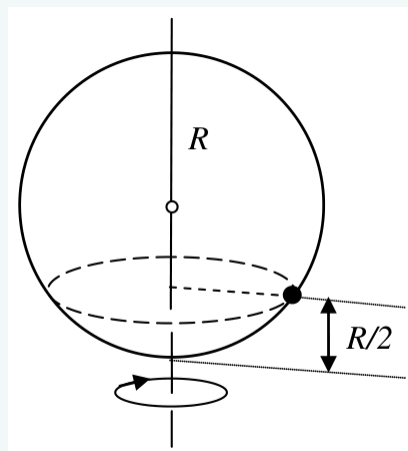


Figura 6

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$, con el rozamiento dirigido hacia arriba a lo largo de la superficie.

- **b)** $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$, con el rozamiento dirigido hacia abajo a lo largo de la superficie. Ambos coeficientes son adimensionales.
- **c) a)** Con los respectivos coeficientes mínimos, ambos equilibrios son localmente estables, con una tendencia restitutiva a un lado y adherencia al otro:
 - A 5 s^{-1} , un desplazamiento hacia arriba produce una tendencia restitutiva hacia abajo; un desplazamiento hacia abajo permite la adherencia.
 - A 8 s^{-1} , un desplazamiento hacia abajo produce una tendencia restitutiva hacia arriba; un desplazamiento hacia arriba permite la adherencia.

Los desplazamientos azimutales son neutros. - **c) b)** Al comparar rotaciones estacionarias próximas a la altura original: - A 5 s^{-1} , aumentar ω permite la adherencia; disminuirla produce una tendencia al deslizamiento hacia abajo. - A 8 s^{-1} , disminuir ω permite la adherencia; aumentarla produce una tendencia al deslizamiento hacia arriba.

Por tanto, la altura original es marginal respecto a los cambios de velocidad, mientras que siguen existiendo posiciones de reposo estables próximas.

Solución

a) Trate el bloque pequeño como una partícula y utilice el rozamiento de Coulomb. Sea θ su posición angular medida desde la vertical descendente que pasa por el centro de la esfera. Su altura sobre el punto más bajo y su distancia al eje de rotación son

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

La figura indica $h = R/2$, por lo que

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sea N la reacción normal dirigida hacia el interior y sea f la fuerza de rozamiento con signo, positiva **hacia arriba a lo largo de la superficie**, en el sentido de aumento de θ .

En el sistema de referencia que gira con la esfera, sobre el bloque en reposo actúan la gravedad, la reacción normal, el rozamiento y la fuerza centrífuga $m\omega^2 R \sin \theta$. Al descomponer las fuerzas en las direcciones perpendicular y tangencial a la superficie, se obtiene

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

El equilibrio estático requiere $|f| \leq \mu N$. Por tanto, a la altura indicada,

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

Para $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$,

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

y, por consiguiente,

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

Aquí $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$, de modo que el rozamiento debe actuar hacia arriba a lo largo de la superficie.

b) Para $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$,

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

lo que da

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

Ahora $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$: la componente tangencial de la fuerza centrífuga supera a la componente opuesta de la gravedad. Por tanto, el rozamiento actúa hacia abajo a lo largo de la superficie.

c) a) Pequeños cambios de posición

Mantenga el coeficiente igual al mínimo correspondiente hallado anteriormente. Considere un pequeño desplazamiento a lo largo de la superficie, seguido de una liberación desde el reposo respecto a la esfera. Utilizamos el modelo idealizado de rozamiento de Coulomb con un único coeficiente.

Introduzcamos

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

La condición de adherencia es

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

Si $K > \mu$, incluso el rozamiento máximo hacia arriba es insuficiente y el bloque comienza a moverse hacia abajo. Si $K < -\mu$, el rozamiento máximo hacia abajo es insuficiente y comienza a moverse hacia arriba.

Con velocidad angular fija,

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

En $\theta_0 = 60^\circ$, el numerador es

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

por lo que K aumenta con la altura en ambos casos.

Para 5 s^{-1} , el equilibrio original tiene $K = \mu$. Elevar el bloque hace que $K > \mu$, lo que produce un movimiento hacia abajo en dirección a la latitud original. Bajarlo sitúa K dentro del intervalo de adherencia.

Para 8 s^{-1} , el equilibrio original tiene $K = -\mu$. Bajar el bloque hace que $K < -\mu$, lo que produce un movimiento hacia arriba en dirección a la latitud original. Elevarlo sitúa K dentro del intervalo de adherencia.

Velocidad angular	Pequeño desplazamiento hacia arriba	Pequeño desplazamiento hacia abajo
5 s^{-1}	Tendencia restitutiva hacia abajo	Puede permanecer adherido
8 s^{-1}	Puede permanecer adherido	Tendencia restitutiva hacia arriba

Por tanto, ambos equilibrios son localmente estables según esta prueba de desplazamiento. El rozamiento permite posiciones de reposo próximas, de modo que el bloque no tiene por qué volver exactamente a su latitud original. Un desplazamiento alrededor del eje vertical no cambia ninguna de las componentes de las fuerzas y es neutro.

c) β) Pequeños cambios de velocidad angular

Comparemos primero rotaciones estacionarias próximas, manteniendo el bloque a su altura original. Al derivar el cociente de rozamiento con signo respecto a q ,

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

Como $q = \omega^2 R/g$, aumentar la velocidad angular disminuye K .

A 5 s^{-1} , inicialmente $K = \mu$. Aumentar ω sitúa K dentro del intervalo permitido; disminuir ω hace que $K > \mu$, lo que exige un rozamiento hacia arriba mayor que el disponible.

A 8 s^{-1} , inicialmente $K = -\mu$. Disminuir ω sitúa K dentro del intervalo permitido; aumentar ω hace que $K < -\mu$, lo que exige un rozamiento hacia abajo mayor que el disponible.

Velocidad angular inicial	Pequeño aumento de ω	Pequeña disminución de ω
5 s^{-1}	La altura original permite la adherencia	Tendencia al deslizamiento hacia abajo
8 s^{-1}	Tendencia al deslizamiento hacia arriba	La altura original permite la adherencia

Por tanto, con el coeficiente mínimo, la altura original no puede mantenerse para ambos signos de una variación de velocidad.

Sin embargo, el límite de las posiciones de reposo permitidas se desplaza de forma continua. Al mantener $K = \pm\mu$ y diferenciar, se obtiene

$$\delta\theta_b = \frac{\sin \theta_0}{1 - q \cos \theta_0 + q^2 \sin^2 \theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta\omega.$$

Su coeficiente es finito y positivo en ambos casos. Así, para el sentido desfavorable de la variación de velocidad, un pequeño ajuste hacia abajo en el caso a), o un pequeño ajuste hacia arriba en el caso b), permite alcanzar el intervalo próximo de posiciones de reposo admisibles.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Helio en un cilindro con un pistón y un tabique con válvula

Las paredes de un cilindro de base 1 dm^2 , el pistón y el tabique interior son aislantes térmicos perfectos (Fig. 10). La válvula del tabique se abre si la presión del lado derecho es mayor que la del lado izquierdo. Inicialmente hay 12 g de helio en el lado izquierdo y 2 g de helio en el lado derecho. Las longitudes de ambos lados son de 11.2 dm cada una y la temperatura es de 0°C . En el exterior, la presión es de 100 kPa .

El calor específico a volumen constante es $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$, y a presión constante es $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$. Se empuja lentamente el pistón hacia el tabique. Cuando se abre la válvula, nos detenemos y luego seguimos empujando lentamente hasta alcanzar el tabique. Determine el trabajo que realizamos sobre el pistón.

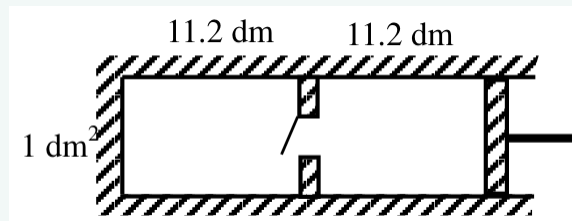


Figura 10

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2:** El trabajo que realizamos sobre el pistón es

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ.}$$

Solución

Se considera el helio como un gas ideal con los calores específicos constantes dados. Se desprecian el rozamiento y la energía cinética; el movimiento lento del pistón hace que la compresión sea cuasiestática.

El volumen inicial de cada compartimento es

$$V_0 = A\ell_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Además,

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

Antes de que se abra la válvula. El gas del lado izquierdo permanece a volumen y temperatura constantes, por lo que su presión se mantiene en

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa.}$$

La presión inicial del lado derecho es

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

El gas del lado derecho experimenta una compresión adiabática cuasiestática:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

donde v es su volumen instantáneo. En el límite cuasiestático, la válvula empieza a abrirse cuando $p_R = p_{L0}$. Por tanto, el volumen del lado derecho en el momento de la apertura es

$$v_* = V_0 \left(\frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Durante la pausa no se realiza trabajo porque el pistón no se mueve. Cualquier proceso interno de equilibración durante la pausa también deja inalterada la energía total.

Después de que se abra la válvula. Al continuar la compresión lenta, se transfiere helio al compartimento izquierdo. La diferencia de presión necesaria para abrir la válvula ideal es infinitesimal, por lo que los dos compartimentos tienen una presión común p .

Sus temperaturas no tienen por qué ser iguales. Para cualquiera de los compartimentos, la ecuación del gas ideal da

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

Así, escribiendo el volumen total del gas como $\mathcal{V} = V_0 + v$,

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

El sistema gaseoso completo está térmicamente aislado, y solo el pistón realiza trabajo en la frontera del sistema. Por tanto,

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Al sustituir, se obtiene

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

o bien

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

En consecuencia,

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{constante}.$$

Esta relación se deduce de la conservación de la energía y de la igualdad de presiones; no requiere que las temperaturas de los compartimentos sean iguales.

Al inicio de esta etapa, $\mathcal{V} = V_0 + v_*$ y $p = p_{L0}$. Cuando el pistón alcanza el tabique, todo el helio ocupa V_0 . Por tanto, su presión final es

$$\begin{aligned} p_f &= p_{L0} \left(\frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\ &= p_{L0} \left(1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\ &\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Trabajo aportado por nosotros. Como no entra calor en el gas, el trabajo total realizado sobre él es igual al aumento de su energía interna:

$$\begin{aligned} W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\ &= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\ &\approx 4797.3 \text{ J}. \end{aligned}$$

La atmósfera aporta parte de este trabajo. El pistón barre todo el volumen inicial del lado derecho, de modo que

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J.}$$

Si la energía cinética del pistón y el rozamiento son despreciables,

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

Por tanto,

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J.}$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Medición de una burbuja de aire en el interior de una esfera de vidrio

En algún lugar del interior de una esfera de vidrio hay una burbuja de aire. Describa métodos para determinar el diámetro de la burbuja sin dañar la esfera.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Problema 3. Tres posibles métodos no destructivos son:

- **Pesaje:** Mida el diámetro exterior D y la masa m de la esfera. Si la densidad del vidrio es ρ_g , despreciando la masa del aire,

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi\rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **Inmersión óptica:** Sumerja la esfera en un líquido con el mismo índice de refracción que el vidrio. Mida el contorno transversal de la burbuja con un sistema óptico calibrado. Si el diámetro de su imagen es L y el aumento transversal es M ,

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **Radiografía:** Utilice un haz paralelo de rayos X y mida el diámetro proyectado de la burbuja. Con una escala de imagen calibrada, se obtiene directamente su diámetro real.

No se proporcionan datos numéricos.

Solución

Suponemos que el vidrio es homogéneo y que la burbuja es esférica, como está implícito al preguntar por su diámetro. Denotemos el radio exterior por $R = D/2$ y el radio de la burbuja por $r = d/2$. La burbuja no tiene por qué estar en el centro de la esfera de vidrio.

Pesaje

Mida D con un calibre y m con una balanza. La densidad del vidrio debe conocerse de forma independiente, por ejemplo, a partir de una muestra separada del mismo vidrio.

El volumen exterior y el volumen de la burbuja son

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Si la densidad del aire en el interior de la burbuja es ρ_a , la conservación de la masa da

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

Por consiguiente,

$$d = \left[\frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

Habitualmente $\rho_a \ll \rho_g$, lo que da

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

El resultado es independiente de la posición de la burbuja. Para una burbuja pequeña, este método requiere mediciones precisas: la masa que falta representa tan solo, aproximadamente, la fracción $(d/D)^3$ de la masa de una esfera maciza de vidrio.

Medición óptica en un líquido con el mismo índice de refracción

Coloque la esfera en un recipiente transparente que contenga un líquido cuyo índice de refracción sea igual al del vidrio. Utilice luz monocromática si es necesario para que la dispersión no impida igualar los índices con precisión.

En la superficie exterior, la ley de Snell toma la forma

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

Como $n_\ell = n_g$, tenemos $t = i$: la superficie esférica exterior deja de desviar los rayos. La burbuja sigue siendo visible porque el aire y el vidrio tienen índices de refracción diferentes.

Observe a través de una ventana plana del recipiente, perpendicular a la dirección de observación. Utilice rayos de observación paralelos —por ejemplo, un sistema de formación de imágenes telecéntrico— o un microscopio de desplazamiento cuyo eje permanezca perpendicular a la ventana.

Los rayos límite que definen el contorno de la burbuja son tangentes a ella. Al aproximarse a estos rayos desde el exterior del contorno, los rayos permanecen íntegramente en el vidrio y en el líquido de igual índice de refracción, por lo que no son refractados por la cavidad de aire. La proyección perpendicular de una esfera es un círculo de su diámetro real, independientemente de su profundidad.

Así, si un microscopio de desplazamiento registra los dos bordes opuestos en las posiciones transversales x_L y x_R ,

$$d = |x_R - x_L|.$$

Como alternativa, una imagen calibrada con aumento transversal M da

$$d = L/M.$$

Transmisión de rayos X

Ilumine la esfera con un haz de rayos X suficientemente penetrante y aproximadamente paralelo, y registre su intensidad transmitida. Desprecie la desviación y la dispersión de los rayos. El aire atenúa el haz mucho menos que el vidrio, por lo que la burbuja produce una región de mayor transmisión.

Para un rayo situado a una distancia transversal s del centro proyectado de la burbuja, la longitud de vidrio sustituida por aire es

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

Si μ_g y μ_a son los coeficientes de atenuación lineal, la ley de Beer–Lambert da

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

donde I_{solid} es la transmisión a través de una esfera maciza de vidrio idéntica en todo lo demás.

Por tanto, la región de mayor transmisión termina en $s = r$, dando una proyección circular de diámetro d . Con rayos paralelos, la posición de la burbuja a lo largo del haz no afecta a su tamaño proyectado. Si los diámetros registrados de la esfera exterior y de la burbuja son L_s y L_b , respectivamente,

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.