

IPhO 1976

Theorieaufgaben und Lösungen · Budapest, Ungarn · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/1976/

Aufgabe 1: Kleiner Körper im Inneren einer rotierenden Hohlkugel

Eine Hohlkugel mit dem Radius $R = 0.5 \text{ m}$ rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ um eine vertikale Achse durch ihren Mittelpunkt. Im Inneren der Kugel bewegt sich ein kleiner Körper in der Höhe $R/2$ zusammen mit der Kugel (Abb. 6). ($g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- Wie groß muss der Reibungskoeffizient mindestens sein, damit diese Bedingung erfüllt ist?
- Bestimmen Sie den minimalen Reibungskoeffizienten auch für den Fall $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$.
- Untersuchen Sie die Stabilität in beiden Fällen,
 - bei einer kleinen Änderung der Position des Körpers,
 - bei einer kleinen Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Kugel.

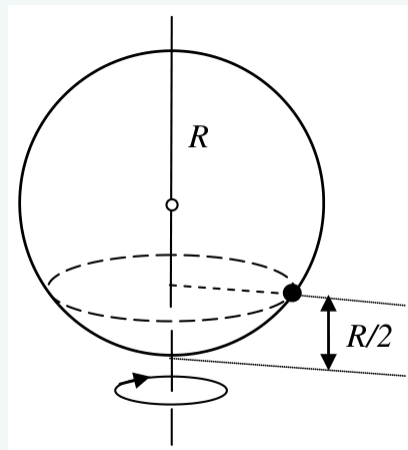


Abbildung 6

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$, wobei die Reibungskraft entlang der Oberfläche nach oben wirkt.
- b) $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$, wobei die Reibungskraft entlang der Oberfläche nach unten wirkt. Beide Koeffizienten sind dimensionslos.

- **c) a)** Bei den jeweiligen minimalen Koeffizienten sind beide Gleichgewichtslagen lokal stabil, mit einer rücktreibenden Tendenz auf der einen Seite und Haften auf der anderen:
- Bei 5 s^{-1} erzeugt eine Verschiebung nach oben eine rücktreibende Tendenz nach unten; eine Verschiebung nach unten ermöglicht Haften.
- Bei 8 s^{-1} erzeugt eine Verschiebung nach unten eine rücktreibende Tendenz nach oben; eine Verschiebung nach oben ermöglicht Haften.

Azimutale Verschiebungen sind neutral. - **c) b)** Beim Vergleich benachbarter stationärer Rotationen in der ursprünglichen Höhe gilt: - Bei 5 s^{-1} ermöglicht eine Erhöhung von ω Haften; eine Verringerung erzeugt eine Tendenz zum Abwärtsgleiten. - Bei 8 s^{-1} ermöglicht eine Verringerung von ω Haften; eine Erhöhung erzeugt eine Tendenz zum Aufwärtsgleiten.

Somit liegt die ursprüngliche Höhe hinsichtlich Änderungen der Drehgeschwindigkeit an der Stabilitätsgrenze, während benachbarte stabile Ruhelagen weiterhin möglich sind.

Lösung

a) Wir behandeln den kleinen Körper als Massenpunkt und verwenden das Coulombsche Reibungsgesetz. Sei θ seine Winkelposition, gemessen von der nach unten gerichteten Vertikalen durch den Kugelmittelpunkt. Seine Höhe über dem tiefsten Punkt und sein Abstand von der Rotationsachse sind

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

Die Abbildung gibt $h = R/2$ vor, also gilt

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit N bezeichnen wir die nach innen gerichtete Normalkraft und mit f die vorzeichenbehaftete Reibungskraft, die **entlang der Oberfläche nach oben**, in Richtung zunehmender θ , positiv ist.

Im mit der Kugel rotierenden Bezugssystem wirken auf den ruhenden Körper die Gewichtskraft, die Normalkraft, die Reibungskraft und die Zentrifugalkraft $m\omega^2 R \sin \theta$. Die Zerlegung senkrecht und tangential zur Oberfläche ergibt

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

Statisches Gleichgewicht erfordert $|f| \leq \mu N$. Daher gilt in der angegebenen Höhe

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

Für $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ gilt

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

und damit

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

Hier ist $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$, sodass die Reibungskraft entlang der Oberfläche nach oben wirken muss.

b) Für $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ gilt

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

woraus sich ergibt

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

Nun ist $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$: Die tangentielle Komponente der Zentrifugalkraft übersteigt die entgegengesetzt gerichtete Komponente der Gewichtskraft. Die Reibungskraft wirkt daher entlang der Oberfläche nach unten.

c) a) Kleine Änderungen der Position

Wir halten den Koeffizienten auf dem jeweiligen oben bestimmten Minimalwert. Wir betrachten eine kleine Verschiebung entlang der Oberfläche und lassen den Körper anschließend aus der Ruhe relativ zur Kugel los. Wir verwenden das idealisierte Coulombsche Reibungsmodell mit einem einzigen Koeffizienten.

Wir führen ein:

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

Die Bedingung für Haften lautet

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

Wenn $K > \mu$ ist, reicht selbst die maximale nach oben gerichtete Reibungskraft nicht aus, und der Körper setzt sich nach unten in Bewegung. Wenn $K < -\mu$ ist, reicht die maximale nach unten gerichtete Reibungskraft nicht aus, und er setzt sich nach oben in Bewegung.

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit gilt

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

Bei $\theta_0 = 60^\circ$ ist der Zähler

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

sodass K in beiden Fällen mit der Höhe zunimmt.

Für 5 s^{-1} gilt im ursprünglichen Gleichgewicht $K = \mu$. Wird der Körper angehoben, so wird $K > \mu$, was eine Abwärtsbewegung zum ursprünglichen Breitenkreis hervorruft. Wird er abgesenkt, so liegt K innerhalb des Haftintervalls.

Für 8 s^{-1} gilt im ursprünglichen Gleichgewicht $K = -\mu$. Wird der Körper abgesenkt, so wird $K < -\mu$, was eine Aufwärtsbewegung zum ursprünglichen Breitenkreis hervorruft. Wird er angehoben, so liegt K innerhalb des Haftintervalls.

Winkelgeschwindigkeit	Kleine Verschiebung nach oben	Kleine Verschiebung nach unten
5 s^{-1}	Rücktreibende Tendenz nach unten	Haften möglich
8 s^{-1}	Haften möglich	Rücktreibende Tendenz nach oben

Somit sind beide Gleichgewichtslagen bei dieser Prüfung durch Verschiebung lokal stabil. Die Reibung ermöglicht benachbarte Ruhelagen, sodass der Körper nicht genau zu seinem ursprünglichen Breitenkreis zurückkehren muss. Eine Verschiebung um die vertikale Achse ändert keine der Kraftkomponenten und ist neutral.

c) β) Kleine Änderungen der Winkelgeschwindigkeit

Zunächst vergleichen wir benachbarte stationäre Rotationen, wobei der Körper in seiner ursprünglichen Höhe bleibt. Die Ableitung des vorzeichenbehafteten Reibungsverhältnisses nach q ergibt

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

Da $q = \omega^2 R/g$ ist, nimmt K bei einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit ab.

Bei 5 s^{-1} ist anfangs $K = \mu$. Eine Erhöhung von ω bringt K in das zulässige Intervall; eine Verringerung von ω führt zu $K > \mu$, sodass eine größere nach oben gerichtete Reibungskraft erforderlich wäre, als zur Verfügung steht.

Bei 8 s^{-1} ist anfangs $K = -\mu$. Eine Verringerung von ω bringt K in das zulässige Intervall; eine Erhöhung von ω führt zu $K < -\mu$, sodass eine größere nach unten gerichtete Reibungskraft erforderlich wäre, als zur Verfügung steht.

Anfängliche Winkelgeschwindigkeit	Kleine Erhöhung von ω	Kleine Verringerung von ω
5 s^{-1}	Ursprüngliche Höhe ermöglicht Haften	Tendenz zum Abwärtsgleiten
8 s^{-1}	Tendenz zum Aufwärtsgleiten	Ursprüngliche Höhe ermöglicht Haften

Bei minimalem Reibungskoeffizienten kann die ursprüngliche Höhe daher nicht für beide Vorzeichen einer Änderung der Drehgeschwindigkeit beibehalten werden.

Dennoch verschiebt sich die Grenze der zulässigen Ruhelagen kontinuierlich. Hält man $K = \pm\mu$ konstant und differenziert, so ergibt sich

$$\delta\theta_b = \frac{\sin \theta_0}{1 - q \cos \theta_0 + q^2 \sin^2 \theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta\omega.$$

Der Koeffizient darin ist in beiden Fällen endlich und positiv. Somit erreicht der Körper bei einer Änderung der Drehgeschwindigkeit in der ungünstigen Richtung durch eine kleine Verschiebung nach unten im Fall a) beziehungsweise nach oben im Fall b) den benachbarten Bereich zulässiger Ruhelagen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Helium in einem Zylinder mit Kolben und einer Trennwand mit Ventil

Die Wände eines Zylinders mit einer Grundfläche von 1 dm^2 , der Kolben und die innere Trennwand sind vollkommen wärmeisolierend (Abb. 10). Das Ventil in der Trennwand öffnet sich, wenn der Druck auf der rechten Seite größer ist als auf der linken Seite. Anfangs befinden sich auf

der linken Seite 12 g Helium und auf der rechten Seite 2 g Helium. Beide Kammern sind jeweils 11.2 dm lang, und die Temperatur beträgt 0°C. Außen herrscht ein Druck von 100 kPa.

Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen beträgt $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$, bei konstantem Druck beträgt sie $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$. Der Kolben wird langsam in Richtung der Trennwand geschoben. Wenn sich das Ventil öffnet, halten wir an und schieben anschließend langsam weiter, bis die Trennwand erreicht ist. Bestimmen Sie die von uns am Kolben verrichtete Arbeit.

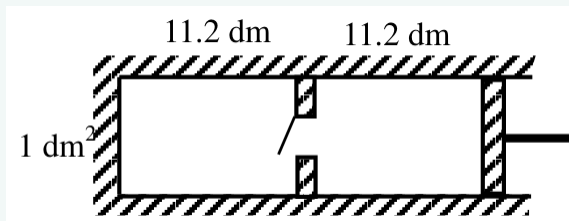


Abbildung 10

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 2:** Die von uns am Kolben verrichtete Arbeit beträgt

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ.}$$

Lösung

Wir behandeln Helium als ideales Gas mit den angegebenen konstanten spezifischen Wärmekapazitäten. Reibung und kinetische Energie werden vernachlässigt; durch die langsame Kolbenbewegung verläuft die Kompression quasistatisch.

Das Anfangsvolumen jeder Kammer beträgt

$$V_0 = A\ell_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Außerdem gilt

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

Bevor sich das Ventil öffnet. Das Gas in der linken Kammer behält sein Volumen und seine Temperatur bei, sodass sein Druck unverändert bleibt:

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa.}$$

Der Anfangsdruck in der rechten Kammer beträgt

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Das Gas in der rechten Kammer wird quasistatisch und adiabatisch komprimiert:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

wobei v sein momentanes Volumen ist. Im quasistatischen Grenzfall beginnt sich das Ventil zu öffnen, wenn $p_R = p_{L0}$. Somit beträgt das Volumen der rechten Kammer beim Öffnen

$$v_* = V_0 \left(\frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Während der Pause wird keine Arbeit verrichtet, da sich der Kolben nicht bewegt. Auch ein etwaiger innerer Ausgleich während der Pause lässt die Gesamtenergie unverändert.

Nachdem sich das Ventil geöffnet hat. Durch die weitere langsame Kompression strömt Helium in die linke Kammer. Die zum Öffnen des idealen Ventils erforderliche Druckdifferenz ist infinitesimal klein, sodass in beiden Kammern derselbe Druck p herrscht.

Ihre Temperaturen müssen nicht gleich sein. Für jede der beiden Kammern ergibt die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

Bezeichnen wir das gesamte Gasvolumen mit $\mathcal{V} = V_0 + v$, so gilt daher

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

Das gesamte Gassystem ist wärmeisoliert, und nur der Kolben verrichtet Volumenarbeit. Daher gilt

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

oder

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

Folglich gilt

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{konstant}.$$

Diese Beziehung folgt aus der Energieerhaltung und der Gleichheit der Drücke; gleiche Temperaturen in den Kammern sind dafür nicht erforderlich.

Zu Beginn dieser Phase gilt $\mathcal{V} = V_0 + v_*$ und $p = p_{L0}$. Wenn der Kolben die Trennwand erreicht, nimmt das gesamte Helium das Volumen V_0 ein. Sein Enddruck beträgt daher

$$\begin{aligned} p_f &= p_{L0} \left(\frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\ &= p_{L0} \left(1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\ &\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Von uns verrichtete Arbeit. Da dem Gas keine Wärme zugeführt wird, ist die gesamte an ihm verrichtete Arbeit gleich der Zunahme seiner inneren Energie:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\
 &= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\
 &\approx 4797.3 \text{ J.}
 \end{aligned}$$

Die Atmosphäre verrichtet einen Teil dieser Arbeit. Der Kolben überstreicht das gesamte Anfangsvolumen der rechten Kammer, sodass

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J.}$$

Bei vernachlässigbarer kinetischer Energie des Kolbens und vernachlässigbarer Reibung gilt

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

Somit ergibt sich

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J.}$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Vermessung einer Luftblase im Inneren einer Glaskugel

Irgendwo in einer Glaskugel befindet sich eine Luftblase. Beschreiben Sie Methoden, mit denen sich der Durchmesser der Blase bestimmen lässt, ohne die Kugel zu beschädigen.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Aufgabe 3. Drei mögliche zerstörungsfreie Methoden sind:

- **Wägung:** Man misst den Außendurchmesser D und die Masse m der Kugel. Ist die Dichte des Glases ρ_g , so gilt unter Vernachlässigung der Masse der Luft:

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi\rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **Optische Immersion:** Man taucht die Kugel in eine Flüssigkeit mit demselben Brechungsindex wie das Glas. Mit einer kalibrierten Optik misst man den Umriss der Blase quer zur Beobachtungsrichtung. Sind ihr Bilddurchmesser L und der transversale Abbildungsmaßstab M , so gilt

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **Radiographie:** Man verwendet ein paralleles Röntgenstrahlenbündel und misst den Durchmesser der Projektion der Blase. Bei kalibriertem Bildmaßstab ergibt sich daraus unmittelbar ihr tatsächlicher Durchmesser.

Es sind keine Zahlenwerte angegeben.

Lösung

Wir nehmen an, dass das Glas homogen und die Blase kugelförmig ist, wie es die Frage nach ihrem Durchmesser implizit voraussetzt. Wir bezeichnen den Außenradius mit $R = D/2$ und den Radius der Blase mit $r = d/2$. Die Blase muss sich nicht im Mittelpunkt der Glaskugel befinden.

Wägung

Man misst D mit einem Messschieber und m mit einer Waage. Die Dichte des Glases muss unabhängig davon bekannt sein, beispielsweise aus einer separaten Probe desselben Glases.

Das Außenvolumen und das Volumen der Blase sind

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Ist die Dichte der Luft im Inneren der Blase ρ_a , so ergibt sich aus der Massenerhaltung

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

Folglich gilt

$$d = \left[\frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

Gewöhnlich gilt $\rho_a \ll \rho_g$, sodass sich ergibt:

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Lage der Blase. Bei einer kleinen Blase erfordert diese Methode präzise Messungen: Die fehlende Masse beträgt nur ungefähr den Bruchteil $(d/D)^3$ der Masse einer massiven Glaskugel.

Optische Messung in einer Flüssigkeit mit angepasstem Brechungsindex

Man legt die Kugel in einen durchsichtigen Behälter mit einer Flüssigkeit, deren Brechungsindex dem des Glases entspricht. Falls erforderlich, verwendet man monochromatisches Licht, damit die Dispersion eine genaue Anpassung nicht verhindert.

An der Außenfläche lautet das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

Da $n_\ell = n_g$, gilt $t = i$: Die äußere kugelförmige Grenzfläche lenkt die Strahlen nicht mehr ab. Die Blase bleibt sichtbar, weil Luft und Glas unterschiedliche Brechungsindizes besitzen.

Man beobachtet durch ein ebenes Fenster des Behälters, das senkrecht zur Beobachtungsrichtung steht. Dabei verwendet man parallele Beobachtungsstrahlen – beispielsweise ein telezentrisches Abbildungssystem – oder ein verschiebbares Messmikroskop, dessen Achse stets senkrecht zum Fenster bleibt.

Die Grenzstrahlen, die den Umriss der Blase bestimmen, berühren die Blase tangential. Nähert man sich ihnen von außerhalb des Umrisses, so verlaufen diese Strahlen vollständig im Glas und in der Flüssigkeit mit angepasstem Brechungsindex und werden daher am luftgefüllten Hohlraum nicht

gebrochen. Die senkrechte Projektion einer Kugel ist unabhängig von ihrer Tiefe ein Kreis mit ihrem tatsächlichen Durchmesser.

Erfasst ein verschiebbares Messmikroskop die beiden gegenüberliegenden Ränder an den Querpositionen x_L und x_R , so gilt daher

$$d = |x_R - x_L|.$$

Alternativ ergibt ein kalibriertes Bild mit dem transversalen Abbildungsmaßstab M

$$d = L/M.$$

Röntgendurchstrahlung

Man bestrahlt die Kugel mit einem ausreichend durchdringenden, annähernd parallelen Röntgenstrahlenbündel und zeichnet die durchgelassene Intensität auf. Strahlablenkung und Streuung werden vernachlässigt. Luft schwächt das Strahlenbündel wesentlich weniger als Glas, sodass die Blase einen Bereich erhöhter Transmission erzeugt.

Für einen Strahl im Querabstand s vom projizierten Mittelpunkt der Blase beträgt die Länge des durch Luft ersetzten Glasabschnitts

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

Sind μ_g und μ_a die linearen Schwächungskoeffizienten, so liefert das Lambert-Beersche Gesetz

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

wobei I_{solid} die durch eine ansonsten identische massive Glaskugel durchgelassene Intensität ist.

Der Bereich erhöhter Transmission endet daher bei $s = r$, sodass sich eine kreisförmige Projektion mit dem Durchmesser d ergibt. Bei parallelen Strahlen beeinflusst die Lage der Blase entlang des Strahlenbündels ihre projizierte Größe nicht. Sind die aufgezeichneten Durchmesser der äußeren Kugel beziehungsweise der Blase L_s und L_b , so gilt

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.