

المسألة 1: جسم صغير داخل كرة مجوفة دوّارة

تدور كرة مجوفة نصف قطرها $R = 0.5 \text{ m}$ حول محور رأسي يمر بمركزها بسرعة زاوية مقدارها $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$. ويتحرك داخل الكرة جسم صغير مع الكرة عند ارتفاع $R/2$ (الشكل 6). ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

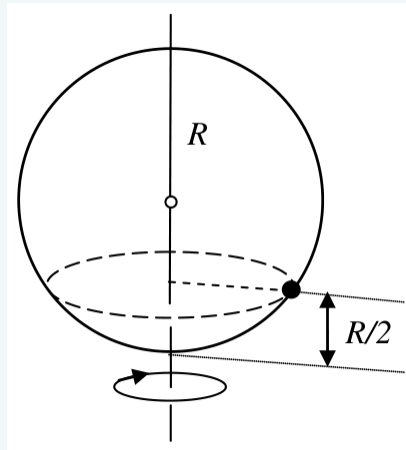
(a) ما أقل قيمة يجب أن يكون عليها معامل الاحتكاك لتحقيق هذا الشرط؟

(b) أوجد أيضاً أقل قيمة لمعامل الاحتكاك في حالة $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$.

(c) ادرس مسألة الاستقرار في كلتا الحالتين،

(α) عند حدوث تغير صغير في موضع الجسم،

(β) عند حدوث تغير صغير في السرعة الزاوية للكرة.



الشكل 6

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

(a) • $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226$ ، ويؤثر الاحتكاك إلى أعلى على امتداد السطح.

(b) • $\mu_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179$ ، ويؤثر الاحتكاك إلى أسفل على امتداد السطح. كلا المعاملين بلا أبعاد.

(c) α • عند القيمتين الدنيا المقابلتين لمعامل الاحتكاك، تكون حالتا الاتزان مستقرتين محلياً، مع نزعة إلى العودة من أحد الجانبين وبقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة من الجانب الآخر:

• عند 5 s^{-1} ، تؤدي إزاحة إلى أعلى إلى نزعة إرجاع إلى أسفل؛ وتسمح إزاحة إلى أسفل ببقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة.

- عند 8 s^{-1} ، تؤدي إزاحة إلى أسفل إلى نزعة إرجاع إلى أعلى؛ وتسمح إزاحة إلى أعلى ببقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة.

أما الإزاحات السمتية فهي محايدة. - β (c) عند مقارنة حالات دوران منتظم متقاربة عند الارتفاع الأصلي: - عند 5 s^{-1} ، تسمح زيادة ω ببقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة؛ ويؤدي إنقاصها إلى نزعة للانزلاق إلى أسفل. - عند 8 s^{-1} ، يسمح إنقاص ω ببقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة؛ وتؤدي زيادتها إلى نزعة للانزلاق إلى أعلى.

ومن ثم يكون الارتفاع الأصلي حديقاً بالنسبة إلى تغيرات السرعة، مع بقاء مواضع سكون مستقرة قريبة متاحة.

الحل

(a) نعامل الجسم الصغير بوصفه جسيماً ونستخدم احتكاك كولوم. لتكن θ موضعه الزاوي مقيساً من الاتجاه الرأسي المتجه إلى أسفل والمار بمركز الكرة. يكون ارتفاعه فوق القاع وبعده عن محور الدوران كما يأتي:

$$h = R(1 - \cos \theta), \quad \rho = R \sin \theta.$$

يحدد الشكل $h = R/2$ ، ولذلك

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_0 = 60^\circ, \quad \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

لنرمز بـ N إلى قوة رد الفعل العمودية المتجهة إلى الداخل، ولتكن f قوة الاحتكاك ذات الإشارة، بحيث تكون موجبة إلى أعلى على امتداد السطح، في اتجاه تزايد θ .

في الإطار المرجعي الذي يدور مع الكرة، تؤثر في الجسم الساكن قوة الثقل وقوة رد الفعل العمودية والاحتكاك وقوة الطرد المركزي $m\omega^2 R \sin \theta$. وبتحليل القوى في الاتجاهين العمودي والمماسي للسطح نحصل على

$$N = m(g \cos \theta + \omega^2 R \sin^2 \theta),$$

$$f = m \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta).$$

يتطلب الاتزان السكوني $|f| \leq \mu N$. ولذلك، عند الارتفاع المحدد،

$$\mu_{\min} = \frac{\sin \theta_0 |g - \omega^2 R \cos \theta_0|}{g \cos \theta_0 + \omega^2 R \sin^2 \theta_0} = \frac{\sqrt{3} |2g - \omega^2 R|}{2g + 3\omega^2 R}.$$

عند $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ ،

$$\omega^2 R = 12.5 \text{ m/s}^2,$$

ومن ثم

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(20 - 12.5)}{20 + 37.5} = \frac{3\sqrt{3}}{23} \approx 0.226.$$

هنا $g - \omega^2 R \cos \theta_0 > 0$ ، لذا يجب أن يؤثر الاحتكاك إلى أعلى على امتداد السطح.

(b) عند $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$ ،

$$\omega^2 R = 32 \text{ m/s}^2,$$

فنحصل على

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}(32 - 20)}{20 + 96} = \frac{3\sqrt{3}}{29} \approx 0.179.$$

الآن $g - \omega^2 R \cos \theta_0 < 0$: فالمركبة المماسية لقوة الطرد المركزي تفوق المركبة المعاكسة لها لقوة الثقل. لذلك يؤثر الاحتكاك إلى أسفل على امتداد السطح.

α (c) تغيرات صغيرة في الموضع

نُبقى المعامل مساوياً للقيمة الدنيا المقابلة التي وجدناها أعلاه. وننظر في إزاحة صغيرة على امتداد السطح، يعقبها ترك الجسم من السكون بالنسبة إلى الكرة. نستخدم نموذج احتكاك كولوم المثالي ذي المعامل الواحد. نُعرّف

$$q = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad K(\theta, q) = \frac{f_{\text{required}}}{N} = \frac{\sin \theta (1 - q \cos \theta)}{\cos \theta + q \sin^2 \theta}.$$

شرط بقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى الكرة هو

$$-\mu \leq K \leq \mu.$$

إذا كان $K > \mu$ ، فإن حتى أقصى قوة احتكاك متجهة إلى أعلى لا تكفي، ويبدأ الجسم بالحركة إلى أسفل. وإذا كان $K < -\mu$ ، فإن أقصى قوة احتكاك متجهة إلى أسفل لا تكفي، ويبدأ بالحركة إلى أعلى.

عند ثبات السرعة الزاوية،

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1 - q \cos \theta + q^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2}.$$

عند $\theta_0 = 60^\circ$ ، يكون البسط

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{3q^2}{4} > 0,$$

ولذلك تزداد K مع الارتفاع في كلتا الحالتين.

عند 5 s^{-1} ، يتحقق في الاتزان الأصلي $K = \mu$. يؤدي رفع الجسم إلى جعل $K > \mu$ ، فتنتج حركة إلى أسفل نحو دائرة العرض الأصلية. أما خفضه فيجعل K داخل مجال السكون بالنسبة إلى الكرة.

عند 8 s^{-1} ، يتحقق في الاتزان الأصلي $K = -\mu$. يؤدي خفض الجسم إلى جعل $K < -\mu$ ، فتنتج حركة إلى أعلى نحو دائرة العرض الأصلية. أما رفعه فيجعل K داخل مجال السكون بالنسبة إلى الكرة.

السرعة الزاوية	إزاحة صغيرة إلى أعلى	إزاحة صغيرة إلى أسفل
5 s^{-1}	نزعة إرجاع إلى أسفل	يمكن أن يبقى ساكناً بالنسبة إلى الكرة
8 s^{-1}	يمكن أن يبقى ساكناً بالنسبة إلى الكرة	نزعة إرجاع إلى أعلى

إذن، كلتا حالتا الاتزان مستقرة محلياً وفق اختبار الإزاحة هذا. يتيح الاحتكاك مواضع سكون مجاورة، لذا ليس من الضروري أن يعود الجسم إلى دائرة عرضه الأصلية تماماً. ولا تتغير الإزاحة حول المحور الرأسي أيّاً من مركبات القوى، وهي محايدة.

β (c) تغيرات صغيرة في السرعة الزاوية

نقارن أولاً حالات دوران منتظم متجاورة، مع إبقاء الجسم عند ارتفاعه الأصلي. باشتقاق نسبة الاحتكاك ذات الإشارة بالنسبة إلى q ،

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\sin \theta}{(\cos \theta + q \sin^2 \theta)^2} < 0.$$

بما أن $q = \omega^2 R/g$ ، فإن زيادة السرعة الزاوية تُنقص K .

عند 5 s^{-1} ، يكون في البداية $K = \mu$. تؤدي زيادة ω إلى إدخال K في المجال المسموح؛ أما إنقاص ω فيجعل $K > \mu$ ، مما يتطلب قوة احتكاك إلى أعلى أكبر من المتاحة.

عند 8 s^{-1} ، يكون في البداية $K = -\mu$. يؤدي إنقاص ω إلى إدخال K في المجال المسموح؛ أما زيادة ω فتجعل $K < -\mu$ ، مما يتطلب قوة احتكاك إلى أسفل أكبر من المتاحة.

السرعة الزاوية الابتدائية	زيادة صغيرة في ω	نقصان صغير في ω
5 s^{-1}	يسمح الارتفاع الأصلي بالسكون بالنسبة إلى الكرة	نزعة للانزلاق إلى أسفل

السرعة الزاوية الابتدائية	زيادة صغيرة في ω	نقصان صغير في ω
8 s^{-1}	نزعة للانزلاق إلى أعلى	يسمح الارتفاع الأصلي بالسكون بالنسبة إلى الكرة

لذلك لا يمكن الحفاظ على الارتفاع الأصلي لكتلتي إشارتي تغير السرعة عند القيمة الدنيا للمعامل.

ومع ذلك، فإن حد مواضع السكون المسموح بها يتحرك بصورة متصلة. وبالإبقاء على $K = \pm \mu$ وإجراء التفاضل نحصل على

$$\delta\theta_b = \frac{\sin\theta_0}{1 - q \cos\theta_0 + q^2 \sin^2\theta_0} \delta q, \quad \delta q = \frac{2R\omega}{g} \delta\omega.$$

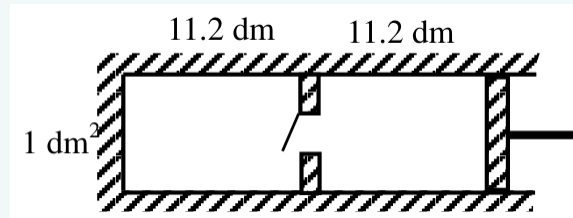
معاملها محدود وموجب في كلتا الحالتين. ومن ثم، في اتجاه تغير السرعة غير الملائم، يؤدي تعديل صغير إلى أسفل في الحالة (a)، أو تعديل صغير إلى أعلى في الحالة (b)، إلى بلوغ المجال المجاور لمواضع السكون المسموح بها.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الهيليوم في أسطوانة ذات مكبس وحاجز فاصل مزود بصمام

جدران أسطوانة مساحة قاعدتها 1 dm^2 ، ومكبسها، وحاجزها الداخلي الفاصل، كلها عوازل حرارية مثالية (الشكل 10). ينفّث الصمام الموجود في الحاجز الفاصل إذا كان الضغط في الجانب الأيمن أكبر منه في الجانب الأيسر. يوجد في البداية 12 g من الهيليوم في الجانب الأيسر و 2 g من الهيليوم في الجانب الأيمن. يبلغ طول كل من الجانبين 11.2 dm ، ودرجة الحرارة هي 0°C . أما الضغط الخارجي فيبلغ 100 kPa .

السعة الحرارية النوعية عند ثبوت الحجم هي $c_v = 3.15 \text{ J/gK}$ ، وعند ثبوت الضغط هي $c_p = 5.25 \text{ J/gK}$. يُدفع المكبس ببطء نحو الحاجز الفاصل. عندما ينفّث الصمام نتوقف، ثم نواصل الدفع ببطء حتى يصل المكبس إلى الحاجز. أوجد الشغل الذي نبذله على المكبس.



الشكل 10

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- المسألة 2: الشغل الذي نبذله على المكبس هو

$$W_{\text{us}} \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J} = 3.68 \text{ kJ}.$$

الحل

نُعامل الهيليوم بوصفه غازاً مثاليًا له السعتان الحراريتان النوعيتان الثابتتان المعطتان. نهمل الاحتكاك والطاقة الحركية؛ فحركة المكبس البطيئة تجعل الانضغاط شبه ساكن.

الحجم الابتدائي لكل حجرة هو

$$V_0 = A\ell_0 = (1 \text{ dm}^2)(11.2 \text{ dm}) = 1.12 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

وكذلك،

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad R_s = c_p - c_v = 2.10 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}.$$

قبل انفتاح الصمام. يظل حجم الغاز في الجانب الأيسر ودرجة حرارته ثابتين، ولذلك يبقى ضغطه عند

$$p_{L0} = \frac{m_L R_s T_0}{V_0} = 614.6 \text{ kPa}.$$

الضغط الابتدائي في الجانب الأيمن هو

$$p_{R0} = \frac{m_R R_s T_0}{V_0} = 102.4 \text{ kPa}, \quad \frac{p_{L0}}{p_{R0}} = \frac{12}{2} = 6.$$

يخضع الغاز في الجانب الأيمن لانضغاط كظومي شبه ساكن:

$$p_R v^\gamma = p_{R0} V_0^\gamma,$$

حيث v حجمه اللحظي. في حد العملية شبه الساكنة، يبدأ الصمام بالانفتاح عندما $p_R = p_{L0}$. ومن ثم يكون حجم الغاز في الجانب الأيمن عند الانفتاح

$$v_* = V_0 \left(\frac{p_{R0}}{p_{L0}} \right)^{1/\gamma} = V_0 6^{-3/5} = 3.822 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

لا يُبذل أي شغل أثناء التوقف لأن المكبس لا يتحرك. وأي عملية داخلية لبلوغ الاتزان أثناء التوقف تُبقي الطاقة الكلية دون تغيير أيضًا.

بعد انفتاح الصمام. يؤدي استمرار الانضغاط البطيء إلى انتقال الهيليوم إلى الحجرة اليسرى. فرق الضغط اللازم لفتح الصمام المثالي متناهٍ في الصغر، ولذلك يكون للحجرتين ضغط مشترك p .

ولا يلزم أن تكون درجتا حرارتهما متساويتين. لكل من الحجرتين، تعطي معادلة الغاز المثالي

$$U_i = m_i c_v T_i = \frac{c_v}{R_s} p V_i = \frac{p V_i}{\gamma - 1}.$$

وعليه، بكتابة الحجم الكلي للغاز على الصورة $\mathcal{V} = V_0 + v$ ، نحصل على

$$U = \frac{p \mathcal{V}}{\gamma - 1}.$$

منظومة الغاز بأكملها معزولة حراريًا، ولا يُبذل شغل عبر حدودها إلا بواسطة المكبس. لذلك،

$$dU = -p d\mathcal{V}.$$

بالتعويض نحصل على

$$\frac{\mathcal{V} dp + p d\mathcal{V}}{\gamma - 1} = -p d\mathcal{V},$$

أو

$$\mathcal{V} dp + \gamma p d\mathcal{V} = 0.$$

وبالتالي،

$$p \mathcal{V}^\gamma = \text{ثابت}.$$

تنتج هذه العلاقة من حفظ الطاقة وتساوي الضغطين؛ ولا تتطلب تساوي درجتي حرارة الحجرتين.

في بداية هذه المرحلة، $\mathcal{V} = V_0 + v_*$ و $p = p_{L0}$. عندما يصل المكبس إلى الحاجز الفاصل، يشغل الهيليوم كله الحجم V_0 . ومن ثم يكون ضغطه النهائي

$$\begin{aligned}
p_f &= p_{L0} \left(\frac{V_0 + v_*}{V_0} \right)^\gamma \\
&= p_{L0} \left(1 + 6^{-3/5} \right)^{5/3} \\
&\approx 1.00257 \times 10^6 \text{ Pa}.
\end{aligned}$$

الشغل الذي نبذله. بما أنه لا تدخل أي حرارة إلى الغاز، فإن الشغل الكلي المبذول عليه يساوي الزيادة في طاقته الداخلية:

$$\begin{aligned}
W_{\text{on gas}} &= U_f - U_i \\
&= \frac{p_f V_0 - (p_{L0} + p_{R0}) V_0}{\gamma - 1} \\
&\approx 4797.3 \text{ J}.
\end{aligned}$$

يبذل الغلاف الجوي جزءًا من هذا الشغل. يكتسح المكبس الحجم الابتدائي الكامل للحجرة اليمنى، ولذلك

$$W_{\text{atmosphere}} = p_{\text{ext}} V_0 = (100000)(0.0112) = 1120 \text{ J}.$$

مع إهمال الطاقة الحركية للمكبس والاحتكاك،

$$W_{\text{us}} + W_{\text{atmosphere}} = W_{\text{on gas}}.$$

ومن ثم

$$W_{\text{us}} = 4797.3 - 1120 \approx 3.68 \times 10^3 \text{ J}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: قياس فقاعة هواء داخل كرة زجاجية

توجد فقاعة هواء في موضع ما داخل كرة زجاجية. صف طرائق لتحديد قطر الفقاعة دون إتلاف الكرة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

المسألة 3. فيما يلي ثلاث طرائق ممكنة غير إتلافية:

- **الوزن:** قس القطر الخارجي للكرة D وكتلتها m . إذا كانت كثافة الزجاج ρ_g ، فإهمال كتلة الهواء،

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

- **الغمر البصري:** اغمر الكرة في سائل له معامل الانكسار نفسه الذي للزجاج. قس الحدود العرضية للفقاعة باستخدام منظومة بصرية معايرة. إذا كان قطر صورتها L والتكبير العرضي M ، فإن

$$d = \frac{L}{M}.$$

- **التصوير الشعاعي:** استخدم حزمة متوازية من الأشعة السينية وقس قطر إسقاط الفقاعة. وباستخدام مقياس معاير للصورة، يعطي ذلك قطرها الفعلي مباشرة.

لم تُعط أي بيانات عددية.

الحل

نفترض أن الزجاج متجانس وأن الفقاعة كروية، كما يُفهم ضمناً من طلب تحديد قطرها. نرمز إلى نصف القطر الخارجي بـ $R = D/2$ وإلى نصف قطر الفقاعة بـ $r = d/2$. وليس من الضروري أن تكون الفقاعة في مركز الكرة الزجاجية.

الوزن

قِس D باستخدام القدمة و m باستخدام ميزان. ويجب أن تكون كثافة الزجاج معلومة بصورة مستقلة، مثلاً من عينة منفصلة من الزجاج نفسه.

الحجم الخارجي وحجم الفقاعة هما

$$V = \frac{\pi D^3}{6}, \quad v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

إذا كانت كثافة الهواء داخل الفقاعة ρ_a ، فإن انحفاظ الكتلة يعطي

$$m = \rho_g(V - v) + \rho_a v = \rho_g V - (\rho_g - \rho_a)v.$$

ومن ثم،

$$d = \left[\frac{\rho_g D^3 - 6m/\pi}{\rho_g - \rho_a} \right]^{1/3}.$$

عادةً ما يكون $\rho_a \ll \rho_g$ ، مما يعطي

$$d = \left(D^3 - \frac{6m}{\pi \rho_g} \right)^{1/3}.$$

لا تعتمد النتيجة على موضع الفقاعة. وفي حالة الفقاعة الصغيرة، تتطلب هذه الطريقة قياسات دقيقة: إذ لا تمثل الكتلة الناقصة سوى جزء يساوي تقريباً $(d/D)^3$ من كتلة كرة زجاجية مصمتة.

القياس البصري في سائل مطابق لمعامل الانكسار

ضع الكرة في حوض شفاف يحتوي على سائل يساوي معامل انكساره معامل انكسار الزجاج. استخدم ضوءاً أحادي اللون عند الحاجة حتى لا يحول التشتت اللوني دون تحقيق تطابق دقيق.

عند السطح الخارجي، يصبح قانون سنيل

$$n_g \sin i = n_\ell \sin t.$$

وبما أن $n_\ell = n_g$ ، فإن $t = i$: أي إن الحد الفاصل الكروي الخارجي لم يعد يحرف الأشعة. وتظل الفقاعة مرئية لأن معامل انكسار الهواء والزجاج مختلفان.

انظر عبر نافذة مستوية في الحوض، عمودية على اتجاه الرؤية. استخدم أشعة رؤية متوازية — مثلاً باستخدام منظومة تصوير تلسنترية — أو مجهرًا متحركًا يظل محوره عمودياً على النافذة.

الأشعة الحدية التي تحدد محيط الفقاعة تكون مماسة لها. وعند الاقتراب من المحيط من خارجه، تبقى هذه الأشعة بكاملها في الزجاج والسائل المطابق، ولذلك لا تنكسر بفعل التجويف الهوائي. والإسقاط العمودي للكرة دائرة قطرها يساوي قطرها الحقيقي، بغض النظر عن عمقها.

وعليه، إذا سجّل مجهر متحرك الحافتين المتقابلتين عند الموضعين العرضيين x_R و x_L ، فإن

$$d = |x_R - x_L|.$$

وبدلاً من ذلك، تعطي صورة معايرة ذات تكبير عرضي M

$$d = L/M.$$

نفاذ الأشعة السينية

عرّض الكرة لحزمة من الأشعة السينية ذات قدرة كافية على الاختراق ومتوازية تقريباً، وسجّل شدتها النافذة. أهمل انحراف الأشعة وتشتتها. يُوهّن الهواء الحزمة بدرجة أقل بكثير من الزجاج، ولذلك تُنتج الفقاعة منطقة يزداد فيها النفاذ.

بالنسبة إلى شعاع يبعد مسافة عرضية s عن مركز إسقاط الفقاعة، فإن طول الجزء الزجاجي الذي حلّ الهواء محلّه هو

$$\ell_b(s) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - s^2}, & s < r, \\ 0, & s \geq r. \end{cases}$$

إذا كان μ_a و μ_g معاملي التوهين الخطيين، فإن قانون بير-لامبرت يعطي

$$\frac{I}{I_{\text{solid}}} = \exp[(\mu_g - \mu_a)\ell_b(s)],$$

حيث I_{solid} هي الشدة النافذة عبر كرة زجاجية مصمتة مطابقة في سائر خصائصها.

لذلك تنتهي منطقة النفاذ المعزّز عند $s = r$ ، مما يعطي إسقاطاً دائرياً قطره d . ومع الأشعة المتوازية، لا يؤثر موضع الفقاعة على امتداد الحزمة في حجم إسقاطها. وإذا كان القطران المسجلان للكرة الخارجية والفقاعة هما L_s و L_b ، على الترتيب، فإن

$$d = D \frac{L_b}{L_s}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.