

IPhO 1975

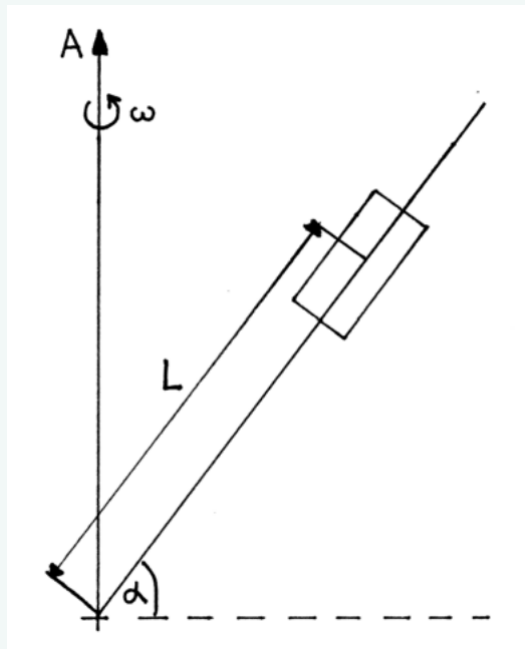
理论题与解答 · 德意志民主共和国居斯特罗 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/1975/

题目 1：旋转杆

一根杆以恒定角速度 ω 绕竖直轴 A 转动。杆与该轴的夹角固定为 $\pi/2 - \alpha$ 。一个质量为 m 的物体可以沿杆滑动。摩擦系数为 $\mu = \tan \beta$ 。角 β 称为“摩擦角”。

- 当杆不转动（即 $\omega = 0$ ）时，确定物体保持静止和发生运动时角 α 分别满足的条件。
- 杆以恒定角速度 $\omega > 0$ 转动。角 α 在转动过程中保持不变。求物体相对于杆保持静止的条件。



可以使用以下关系式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

题目译自官方英文原文。

答案

取 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ 和 $0 \leq \beta < \pi/2$ 。用 $L \geq 0$ 表示从杆与转轴的交点到物体沿杆量取的距离。

- a) 初始静止的物体在下列条件下保持静止：

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

在下列条件下，物体沿杆向下滑动：

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

$\alpha = \beta$ 的情形为极限平衡状态。

- b) 物体相对于杆保持静止的充要条件为

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

对于 $0 \leq \alpha < \pi/2$ ，此条件等价于 $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$ ，其中

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

对于竖直杆，即 $\alpha = \pi/2$ ，物体不可能保持静止。

解答

将物体视为在均匀重力场中受刚性杆约束的质点。采用库仑静摩擦定律：摩擦力可以沿杆指向任一方向，其大小不超过 μN ，其中 N 为法向支持力。我们要确定初始时相对于杆静止的物体能否继续保持这种状态。

a) 不转动的杆

杆与水平方向的夹角为 α 。因此，重力的分量为

$$mg \sin \alpha \quad \text{沿杆向下}, \quad mg \cos \alpha \quad \text{垂直于杆}.$$

物体在垂直于杆的方向上没有加速度，因此

$$N = mg \cos \alpha.$$

要使物体平衡，摩擦力必须平衡重力沿杆的分量：

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

对于 $0 \leq \alpha < \pi/2$ ，上式化为

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

因此 $\alpha \leq \beta$ 。等号成立时，静摩擦力达到最大值。

若 $\alpha > \beta$ ，摩擦力无法平衡重力，物体从静止释放后会沿杆向下滑动。当 $\alpha = \pi/2$ 时，法向支持力为零，因而可提供的摩擦力也为零，所以物体同样会下落。

b) 旋转杆

采用随杆一起转动的参考系。在此参考系中静止的物体不受科里奥利力；由于 ω 为常量，也不存在欧拉力。除重力和接触力外，还需计入离心力。

物体到竖直轴的距离为

$$r = L \cos \alpha,$$

所以离心力沿水平方向向外，其大小为

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

取沿杆向外且向上的方向为正方向。重力和离心力沿杆的分量为

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m(\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

两者垂直于杆的分量方向相同。因此，平衡所需的法向支持力为

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

摩擦力必须平衡 $F_{\parallel}$ ，因此，当且仅当满足以下条件时，物体才能平衡：

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

代入并约去 m ，得到

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

因此，转动既改变了摩擦力必须平衡的力，也改变了决定可提供摩擦力大小的法向支持力。

为将此条件表示为 L 的取值范围，将含绝对值的不等式拆成两个不等式。两边乘以 $\cos \beta > 0$ ，并利用题目给出的和差角公式，得到

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \geq g \sin(\alpha - \beta),$$

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \leq g \sin(\alpha + \beta).$$

对于 $0 \leq \alpha < \pi/2$ ， $\cos \alpha$ 和 $\cos(\alpha - \beta)$ 均为正。因此，第一个不等式要求

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

当 $\alpha \leq \beta$ 时，右端非正，所以除 $L \geq 0$ 外，此式不再施加任何限制。合并这些情形，便得到答案中给出的 $L_{\min}$ 。

对于第二个不等式：

- 若 $\alpha + \beta < \pi/2$ ，其中 L 的系数为正，得到

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

- 若 $\alpha + \beta \geq \pi/2$ ，其左端非正，而右端为正。因此，对任意 $L \geq 0$ ，此不等式均成立，故不存在上界。

当 L 小于一个正的 $L_{\min}$ 时，重力无法被平衡，物体有沿杆向内且向下滑动的趋势。当 L 大于一个有限的 $L_{\max}$ 时，向外的力无法被平衡，物体有沿杆向外且向上滑动的趋势。两个边界处的等号均包括在内，对应极限平衡状态。

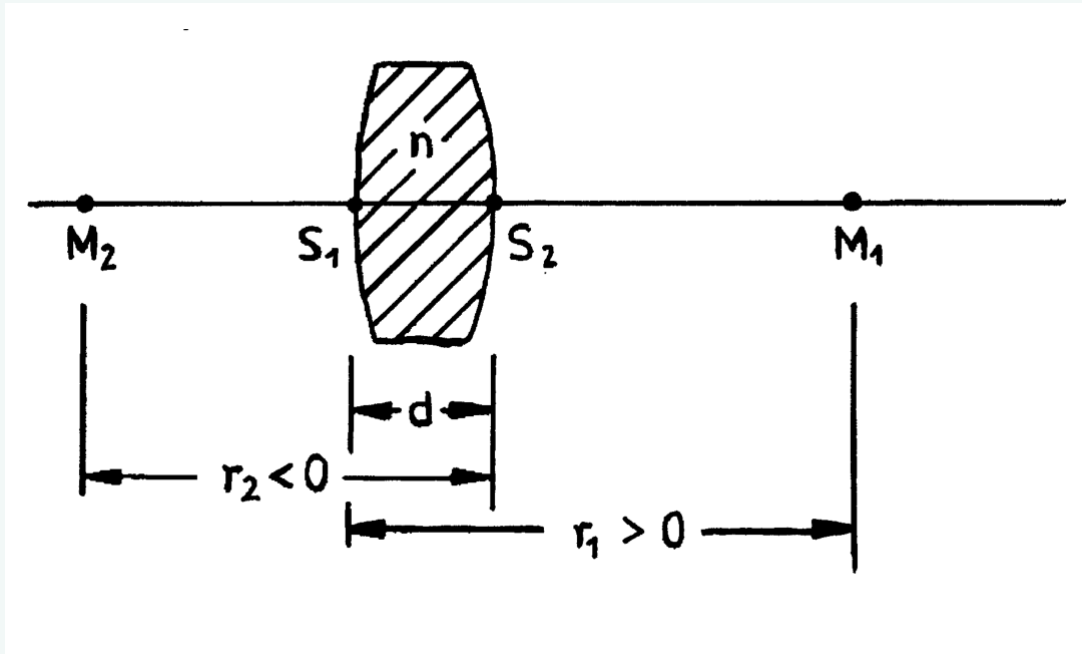
最后，当 $\alpha = \pi/2$ 时，物体位于转轴上。离心力和法向支持力均为零，重力无法被平衡。

解答已与官方解答核对。

题目 2：厚透镜

空气中一块厚玻璃透镜的折射率为 n ，两面的曲率半径为 r_1 、 r_2 ，顶点间距为 d （见图），其焦距 f 由下式给出：

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$



说明： $r_i > 0$ 表示曲率中心 M_i 位于空气与玻璃交界面的顶点 S_i 右侧， $r_i < 0$ 表示曲率中心 M_i 位于空气与玻璃交界面的顶点 S_i 左侧（ $i = 1, 2$ ）。

在某些特殊应用中，要求焦距与波长无关。

- 最多能有多少个不同波长对应同一焦距？
- 给出 r_i （ $i = 1, 2$ ）、 d 与折射率 n 之间应满足的关系，使焦距能够满足所要求的波长无关性，并讨论这一关系。

画出可能的透镜形状示意图，并标出曲率中心 M_1 和 M_2 。

- 证明：对于给定的平凸透镜，只有一个波长能够对应某一特定焦距。
- 另外给出两种情形下厚透镜的可能参数，使某一焦距只能由一个波长实现。应考虑物理和几何条件。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 最多有两个不同的波长，这里假定在所考虑的光谱区间内，不同波长对应不同的折射率。

- b) 对于两个不同的折射率 $n_1, n_2 > 1$, 焦距严格相等要求

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

在折射率 n_0 处, 焦距对波长的一阶变化为零要求

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

因此, $0 < r_1 - r_2 < d$ 。可能的形状包括一块异常厚的双凸透镜, 以及两种朝向相反的弯月形透镜。它们的曲率中心均满足 M_1 位于 M_2 左侧。

- c) 对于凸面曲率半径为 $R > 0$ 的平凸透镜,

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

因而, 每个可实现的焦距都唯一确定一个折射率, 从而唯一确定一个波长。

- d) 两个物理上可实现的例子如下, 其中 $R > 0$ 为任意长度:

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

和

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

它们分别为双凸透镜和双凹透镜。对于每个可实现的焦距, 折射率方程的另一个代数根在第一个例子中为负值, 在第二个例子中小于 1。

解答

我们在近轴几何光学范围内使用题给公式, 并假定透镜的几何形状固定、玻璃均匀。波长通过 $n = n(\lambda)$ 影响焦距。对于处于正常色散透明区间内的普通玻璃, $n > 1$, 且 $n(\lambda)$ 是一一对应的。

定义光焦度以及两个便于计算的常量:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

当曲率半径有限且非零时, 题给公式可写为

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

a) 波长的数目

对于给定的有限焦距 F , 由式 (1) 得

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

这是关于 n 的二次方程, 因此最多有两个不同的折射率。若 $C = 0$, 它就变为一次方程。

两个根可以都符合物理条件: (b) 部分给出了针对任意选定的一对不同玻璃折射率的构造。因此, 最多有两个波长。

对于非退化的色散透镜，焦距不可能在整个连续波长区间内严格保持不变：式 (2) 不可能关于 n 恒成立，因为其常数项为 $d > 0$ 。

b) 条件与可能的透镜形状

对于两个不同的折射率 n_1 和 n_2 ，焦距相等等价于光焦度相等。将式 (1) 在这两个折射率处的表达式相减，得

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

由于 $n_1 \neq n_2$,

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

因此，

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2). \quad (3)$$

由于 $n_1, n_2 > 1$,

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (4)$$

例如，给定任意两个玻璃可取的折射率，取 $r_1 = R$ 、 $r_2 = -R$ ，并令

$$d = \frac{2R n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1}.$$

这样便得到一块满足式 (3) 的双凸透镜，说明确实可以存在两个符合物理条件的解。

对于固定的透镜，与一个折射率配对的另一个折射率为

$$n_2 = \frac{d}{C n_1}.$$

两个折射率都必须位于玻璃的实际色散范围内。

要使焦距在某一波长附近对波长的一阶变化为零，须满足

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

由于普通色散满足 $dn/d\lambda \neq 0$ ，因此要求 $df/dn = 0$ ；当 f 有限时，这等价于 $d\Phi/dn = 0$ 。由式 (1) 得

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

因此，在设计折射率 n_0 处，

$$C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right). \quad (5)$$

两个波长处焦距严格相等的条件与驻点条件通过下式联系起来：

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

因此，这两个不同的折射率分别位于驻点折射率的两侧。当焦距恰好等于驻点处的焦距时，二次方程有一个重根：只有一个波长精确对应此焦距，且一阶变化为零。

剩余的依赖关系通常是二阶的，因为

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{Pn^3} \neq 0.$$

代入焦距公式可得

$$f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}. \quad (6)$$

因此，符合条件的双凸透镜具有正焦距，而符合条件的弯月形透镜具有负焦距。

为了精确描述示意图，令

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

此时曲率中心的位置为

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

在满足式 (5) 的条件下，

$$x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0. \quad (7)$$

令 $\delta = d(1 - 1/n_0^2)$ ，则 $0 < \delta < d$ 。以下取值给出了三种明确的示意图方案；所列各点按从左到右的顺序排列。

透镜形状	可取的曲率半径	顶点与曲率中心的顺序
双凸：两个光学表面均向外凸出	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	S_1, M_1, M_2, S_2
弯月形：第一面为凸面，第二面为凹面	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	S_1, S_2, M_1, M_2
反向弯月形：第一面为凹面，第二面为凸面	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	M_1, M_2, S_1, S_2

两个光学表面可以是由侧壁连接的小球冠面。对于双凸透镜，条件 (4) 变为

$$d > r_1 + |r_2|.$$

因此，它要求一块两端面为凸面的长玻璃体，而不是通常的薄双凸透镜形状。双凹透镜满足 $r_1 < 0 < r_2$ ，这与 $r_1 > r_2$ 矛盾，因此它无法满足消色差条件。

c) 平凸透镜

平凸透镜有两种朝向。取平面表面的极限，得

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n - 1},$$

或

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n - 1}.$$

对于曲率半径大小为 R 的凸球面，两式均化为

$$f(n) = \frac{R}{n - 1}.$$

有效焦距与厚度无关。此外，

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n - 1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

因此, $f(n)$ 严格单调, 给定的可实现焦距唯一确定

$$\boxed{n = 1 + \frac{R}{F}}.$$

因此, 在折射率与波长一一对应的色散区间内, 恰有一个对应的波长。

d) 仅有一个符合物理条件的波长的另外两种情形

当 $C \neq 0$ 时, 式 (2) 表明, 折射率方程的两个代数根之积为

$$n\tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

由此可确定两类有用的情形。

1. $r_1 - r_2 \geq d$, 即 $C \leq 0$ 。

若 $C < 0$, 则符合物理条件的根 $n > 1$ 所对应的另一个根为负值,

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

它不能描述普通玻璃。若 $C = 0$, 则式 (2) 为一次方程, 同样至多有一个解。

一个具体例子是

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

这是一块物理上可实现的双凸透镜。其焦距为

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

且

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

因此, 每个可实现的正焦距都只对应一个符合物理条件的折射率。另一个代数根为 $\tilde{n} = -1/n$ 。

2. $r_1 \leq r_2$, 即 $C \geq d$ 。

对于符合物理条件的根 $n > 1$,

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

因此, 第二个根处于普通玻璃折射率的范围之外。

一个具体例子是

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

这是一块中心厚度为正的双凹透镜; 其厚度随离开光轴的距离增大而增大。其焦距为

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

折射率方程的另一个代数根为

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

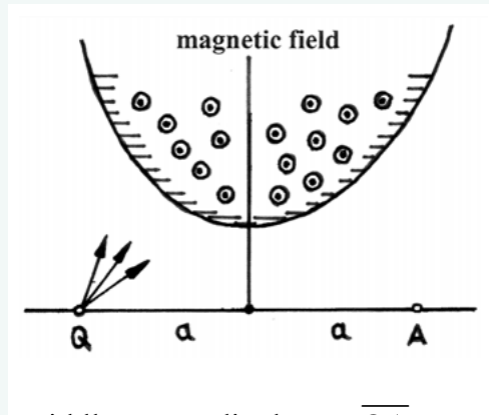
因此, 每个可实现的负焦距也只对应一个符合物理条件的波长。

这两个例子都具有有限厚度和两个曲面。只要孔径足够小，它们就符合近轴近似。

解答已与官方解答核对。

题目 3：磁场中的离子

一束质量相同且恒为 m 的正离子（电荷为 $+e$ ）从 Q 点出发，在纸面内沿不同方向发散（见图²）。这些离子经过电压 U 加速。它们在垂直于纸面的匀强磁场 B 中发生偏转。磁场边界的形状使最初发散的离子会聚于 A 点（ $\overline{QA} = 2 \cdot a$ ）。离子的轨迹关于 $\overline{QA}$ 的垂直平分线对称。



² 注：此示意图不属于原始题目的一部分。

磁场边界可以有多种形状，这里考虑其中一种特定类型：磁场区域连通，分布在垂直平分线周围，而 Q 点和 A 点位于无磁场区域。

- 求粒子在磁场中运动轨迹的曲率半径 R 与电压 U 和磁感应强度 B 的关系。
- 描述上述装置中粒子轨迹的特征。
- 对于 $R < a$ 、 $R = a$ 和 $R > 0$ 三种情况，用几何作图法求出磁场边界。
- 写出磁场边界的一般方程。

题目译自官方英文原文。

答案

取 QA 的中点为原点，令 $Q = (-a, 0)$ 、 $A = (a, 0)$ ，图示离子束位于 x 轴上方。

- a)

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

- b) 每条轨迹由入射直线段、半径为 R 的圆弧和出射直线段组成。圆心位于 QA 的垂直平分线上。若初始方向与 QA 的夹角为 θ ，则磁场引起的偏转角为 2θ ，每条直线段的长度均为

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

- c) 将与入射射线平行的直线向磁力作用的一侧平移距离 R ，它与垂直平分线的交点就是圆心。从圆心向入射射线作垂线，垂足就是入射点；通过对称作图可得出射点。

对于向前传播的射线：

情况	允许角度, 满足 $\ell > 0$
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

当 $R < a$ 时，完整边界的两支具有竖直渐近线 $x = \pm R$ 。当 $R \geq a$ 时，两支的极限端点为 Q, A ；采用有限的角孔径可使这两点严格位于磁场之外。

- d) 离子束穿过的边界部分为

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

或等价地写为

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

它们的隐式方程为

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

并须满足上述分支限制。

解答

a) 曲率半径

采用非相对论近似，忽略离子在加速前的初始动能，并忽略离子之间的相互作用。离子经过电势差 U 加速后，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

磁力垂直于速度，因此只改变运动方向，不改变速率。在匀强磁场内，磁力提供向心力：

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

因此，

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

这里 B 表示磁感应强度的大小。若各输入量采用国际单位制单位，则 R 的单位为米。

b) 轨迹的几何性质

将磁场边界视为突变边界，忽略边缘场。设 O 为 QA 的中点，并取

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

对于图示垂直纸面向外的磁场方向，向上运动的正离子沿顺时针方向偏转。考虑初始方向为

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

设 P 为入射点, P' 为出射点, C 为圆弧的圆心。

在磁场之外, 轨迹为直线。在突变边界处, 速度保持连续, 因此直线段与圆弧段相切连接。关于 y 轴的对称性要求 P' 为 P 的对称点, 且圆心必须位于该轴上。

记 $QP = \ell$, 则

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

从 P 指向 C 的半径方向就是磁力的方向:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

由于 $C_x = 0$, 有

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

因此

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} P &= (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta), \\ P' &= (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta). \end{aligned}$$

圆心为

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta} \right).$$

出射速度的方向为 $(\cos \theta, -\sin \theta)$ 。随后, 离子沿长度为 ℓ 的直线段从 P' 到达 A , 因为

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

因此, 速度在磁场内转过的角度为 2θ 。圆弧在 C 点所对的圆心角也等于该角度, 其弦长为

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

c) 几何作图与三种情形

对于选定的入射方向, 作图步骤如下:

1. 从 Q 作出射线。
2. 在磁力使离子偏转的一侧, 作一条与该射线平行、垂直距离为 R 的直线。
3. 该直线与 QA 的垂直平分线的交点为 C 。
4. 从 C 向入射射线作垂线, 垂足为 P 。
5. 作出 P 关于垂直平分线的对称点 P' , 并画出连接这两点、半径为 R 的顺时针圆弧。

改变入射方向, 就能描出入射边界。通过对称作图可描出出射边界。垂足必须位于 Q 的前方, 因此

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

为描述边界形状, 令 $s = |x|$ 。

- $R < a$ 。

任意锐角入射角均允许。当 θ 从 0 增大并趋于 $\pi/2$ 时, 边界从 O 延伸至无限高处, 在两侧分别趋近于

$$x = -R \quad \text{和} \quad x = R$$

由于 $a > R$, Q 和 A 位于该条带之外。

在 O 附近,

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

因此, 完整的极限轨迹在底部有一个尖点。

各分支不一定始终单调上升。若

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

则每一支先出现一个局部极大值, 再出现一个局部极小值, 随后上升并趋近其渐近线。否则, 该分支单调上升。这些特征可由第 (d) 问给出的导数得出。

- $R = a$ 。

该作图方法适用于任意锐角, 且

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

每一支均从 O 出发, 上升至最大值, 然后在 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时回落并趋向相应的源点或像点。

最大值出现在

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

其高度为

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

极限圆轨迹是以 O 为圆心、半径为 a 、端点为 Q, A 的上半圆。

- $R > a$ ——这很可能是题目原本想表达的第三种情况。

作图要求

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

从几何上看, α 可由斜边为 R 、对边为 a 的直角三角形作出。

每一条边界分支均从 O 出发, 上升至唯一的最大值, 然后在 $\theta \rightarrow \alpha$ 时回落并趋向 Q 或 A 。在此极限下, $\ell \rightarrow 0$, 圆轨迹的圆心为

$$C = (0, -\sqrt{R^2 - a^2}).$$

其最高点为

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

对于 $R \geq a$, 若采用完整的极限轨迹作为边界, Q, A 就会位于磁场边界上。为了使这两点严格处于无磁场区域内, 应选择最大入射角严格小于极限值的离子束。在这些轨迹外围延伸未被离子束穿过的边界; 例如, 可用一个稍大的允许角度作出圆弧, 在这些轨迹上方封闭磁场区域。所得磁场区域是连通的, 并且与

Q, A 保持分离。

会聚条件只确定离子束实际穿过的边界部分。

d) 边界的一般方程

由第 (b) 问,

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

对于锐角分支,

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

消去 θ , 得到

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

因此

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

未平方的表达式及其定义域选出了具有物理意义的上方边界。仅用平方后的方程还会包含其他分支。

为使讨论完整, 求导得

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

因此, 第 (c) 问中提到的所有高度驻点均满足

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

当 $R > a$ 时, 该方程在 $0 < s < a$ 内恰有一个根, 对应于每条分支的最大值。

还可以验证, 所构造的边界使每条轨迹均处于恰当的区域。将入射坐标为 s 时的圆心高度写为

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

则

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

在 $s = s_0$ 处进入磁场的离子沿上方圆弧运动:

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

对于 $s < s_0$, 由 $c(s)$ 的单调性可得

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

因此, 圆弧段位于入射边界和出射边界上方, 即处于磁场内部。进入磁场前, 入射直线位于边界下方, 因为

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

对于边界定义域内的 $s > s_0$ 成立。由对称性可知，离子离开磁场后也满足相同的结论。因此，该边界能够实现所要求的会聚。

解答已与官方解答核对。