

IPhO 1975

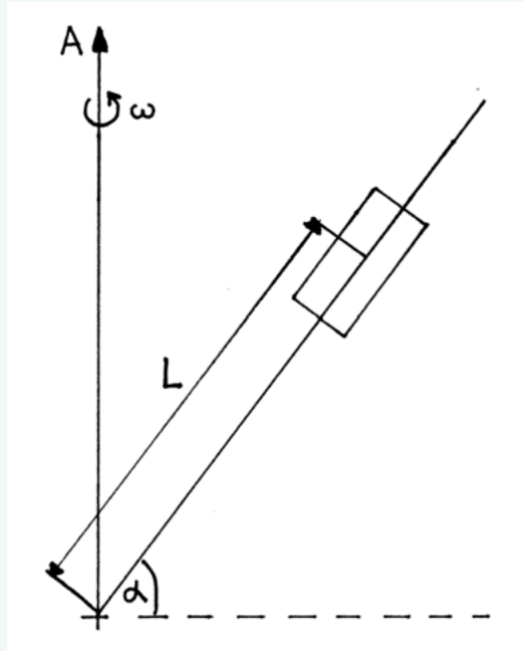
Teorik sorular ve çözümler · Güstrow, Demokratik Alman Cumhuriyeti · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1975/

Soru 1: Dönen çubuk

Bir çubuk, dikey bir A eksenini etrafında sabit ω açısal hızıyla dönmektedir. Çubuk, eksenle sabit bir $\pi/2 - \alpha$ açısı yapmaktadır. Kütlesi m olan bir cisim çubuk boyunca kayabilmektedir. Sürtünme katsayısı $\mu = \tan \beta$ 'dir. β açısına "sürtünme açısı" denir.

- Çubuk dönmüyorsa (yani $\omega = 0$ ise), cismin hangi α açılarında durgun kaldığını ve hangi açılarda hareket ettiğini belirleyiniz.
- Çubuk sabit $\omega > 0$ açısal hızıyla dönmektedir. α açısı dönme sırasında değişmemektedir. Cismin çubuğa göre durgun kalma koşulunu bulunuz.



Aşağıdaki bağıntıları kullanabilirsiniz:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ve $0 \leq \beta < \pi/2$ alalım. $L \geq 0$, çubuğun dönme eksenine kesiştiği noktadan cisme kadar çubuk boyunca ölçülen uzaklığı göstereceğiz.

- **a)** Başlangıçta durgun olan bir cisim,

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

koşulunda durgun kalır.

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

koşulunda ise çubuk boyunca aşağı kayar. $\alpha = \beta$ durumu sınır dengesidir.

- **b)** Çubuğa göre durgunluk için gerekli ve yeterli koşul

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

biçimindedir. $0 \leq \alpha < \pi/2$ için bu koşul, eşdeğer olarak $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$ biçiminde yazılır; burada

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Düşey bir çubuk için, $\alpha = \pi/2$ olduğunda, durgunluk mümkün değildir.

Çözüm

Cismi, düzgün bir yerçekimi alanında rijit bir çubuk üzerinde hareket etmekle kısıtlanmış bir parçacık olarak modelleyelim. Coulomb statik sürtünme modelini kullanalım: sürtünme kuvveti çubuk boyunca her iki yönde de etki edebilir ve büyüklüğü en fazla μN olabilir; burada N normal tepki kuvvetidir. Başlangıçta çubuğa göre durgun olan bir cismin bu durumunu koruyup koruyamayacağını belirleyeceğiz.

a) Dönmeyen çubuk

Çubuk yatayla α açısı yapar. Dolayısıyla ağırlığın bileşenleri

$$mg \sin \alpha \quad \text{çubuk boyunca aşağıya doğru,} \quad mg \cos \alpha \quad \text{çubuğa dik doğrultuda.}$$

Çubuğa dik doğrultuda ivme olmadığından

$$N = mg \cos \alpha.$$

Denge için sürtünme, ağırlığın çubuk boyunca olan bileşenini dengelemelidir:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

$0 \leq \alpha < \pi/2$ için bu eşitsizlik

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

biçimini alır ve buradan $\alpha \leq \beta$ elde edilir. Eşitlik durumunda statik sürtünme en büyük değerine ulaşır.

$\alpha > \beta$ ise sürtünme ağırlığı dengeleyemez ve durgun hâlden serbest bırakılan cisim çubuk boyunca aşağı kayar. $\alpha = \pi/2$ olduğunda normal tepki kuvveti ve dolayısıyla ortaya çıkabilecek sürtünme sıfır olur; bu nedenle cisim bu durumda da düşer.

b) Dönen çubuk

Çubukla birlikte dönen bir referans sistemi kullanalım. Bu sistemde durgun olan bir cisme Coriolis kuvveti etki etmez; ω sabit olduğundan Euler kuvveti de yoktur. Ağırlık ve temas kuvvetlerine ek olarak merkezkaç kuvvetini de hesaba katalım.

Cismin düşey eksene uzaklığı

$$r = L \cos \alpha,$$

olduğundan merkezkaç kuvveti yatay doğrultuda dışarıya yöneliktir ve büyüklüğü

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

Çubuk boyunca pozitif yönü dışarıya ve yukarıya doğru seçelim. Ağırlık ile merkezkaç kuvvetinin çubuk boyunca olan bileşenlerinin toplamı

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m (\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

Bu kuvvetlerin çubuğa dik bileşenleri aynı yönde etki eder. Dolayısıyla denge için gereken normal tepki kuvveti

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Sürtünme, $F_{\parallel}$ kuvvetini dengelemelidir; dolayısıyla denge ancak ve ancak

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

koşulunda mümkündür. İfadeleri yerine koyup m 'yi sadeleştirince

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

elde edilir. Böylece dönme, hem sürtünmenin dengelemesi gereken kuvveti hem de ortaya çıkabilecek sürtünmeyi belirleyen normal tepki kuvvetini değiştirir.

Koşulu L için sınırlar biçiminde ifade etmek üzere mutlak değerli eşitsizliği iki ayrı eşitsizliğe ayıralım. $\cos \beta > 0$ ile çarpıp verilen toplam formüllerini kullanalım. Böylece

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \geq g \sin(\alpha - \beta),$$

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \leq g \sin(\alpha + \beta).$$

elde edilir. $0 \leq \alpha < \pi/2$ için hem $\cos \alpha$ hem de $\cos(\alpha - \beta)$ pozitifdir. Dolayısıyla ilk eşitsizlik

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

koşulunu gerektirir. $\alpha \leq \beta$ olduğunda sağ taraf sıfır ya da negatiftir; bu nedenle $L \geq 0$ dışında bir kısıtlama getirmez. Bu durumlar birleştirildiğinde belirtilen $L_{\min}$ elde edilir.

İkinci eşitsizlik için:

- $\alpha + \beta < \pi/2$ ise L 'nin katsayısı pozitifdir ve

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

elde edilir.

- $\alpha + \beta \geq \pi/2$ ise sol taraf sıfır ya da negatifken sağ taraf pozitifdir. Dolayısıyla eşitsizlik her $L \geq 0$ için sağlanır ve üst sınır yoktur.

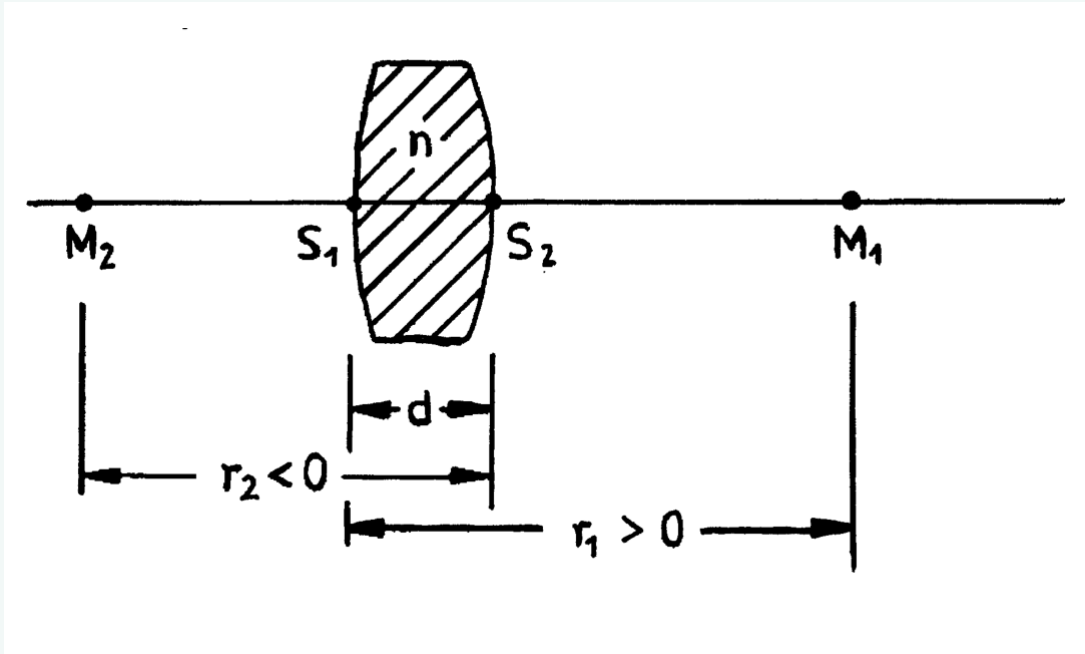
Pozitif bir $L_{\min}$ değerinin altında ağırlık dengelenemez ve cisim içeriye ve aşağıya doğru kayma eğilimi gösterir. Sonlu bir $L_{\max}$ değerinin üstünde dışarıya doğru olan kuvvet dengelenemez ve cisim dışarıya ve yukarıya doğru kayma eğilimi gösterir. Her iki sınırdaki eşitlik durumu da sınır dengesi olarak kapsanır. Son olarak, $\alpha = \pi/2$ için cisim dönme eksenini üzerinde bulunur. Merkezkaç kuvveti ve normal tepki kuvveti sıfır olur; böylece ağırlık dengelenemez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Kalın mercek

Havada bulunan, kırılma indisi n , eğrilik yarıçapları r_1, r_2 ve tepe noktaları arasındaki uzaklığı d olan kalın bir cam merceğin odak uzaklığı f (şekle bakınız) şu bağıntıyla verilir:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$



Not: $r_i > 0$, eğrilik merkezi M_i 'nin hava ile temas eden yüzeyin tepe noktası S_i 'nin sağında olduğunu; $r_i < 0$ ise eğrilik merkezi M_i 'nin hava ile temas eden yüzeyin tepe noktası S_i 'nin solunda olduğunu belirtir ($i = 1, 2$).

Bazı özel uygulamalarda odak uzaklığının dalga boyundan bağımsız olması gerekir.

a) Aynı odak uzaklığı kaç farklı dalga boyunda elde edilebilir?

b) r_i ($i = 1, 2$), d ve kırılma indisi n arasında, istenen dalga boyu bağımsızlığının sağlanabileceği bir bağıntı belirtiniz ve bu bağıntıyı tartışınız.

Olası mercek biçimlerinin şematik çizimlerini yapınız ve eğrilik merkezleri M_1 ile M_2 'yi işaretleyiniz.

c) Verilen bir düzlem-dışbükey mercekte belirli bir odak uzaklığının yalnızca tek bir dalga boyunda elde edilebileceğini kanıtlayınız.

d) Belirli bir odak uzaklığının yalnızca tek bir dalga boyunda elde edilebildiği iki başka durum için kalın merceğin olası parametrelerini belirtiniz. Fiziksel ve geometrik koşulları dikkate alınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **a)** İncelenen spektral aralıkta farklı dalga boylarının farklı kırılma indislerine sahip olduğu varsayımıyla, en fazla **iki farklı dalga boyu**.
- **b)** Birbirinden farklı iki $n_1, n_2 > 1$ indisi için odak uzaklıklarının tam olarak eşit olması şu koşulu gerektirir:

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

n_0 indisinde dalga boyundan birinci mertebeden bağımsızlık şu koşulu gerektirir:

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

Dolayısıyla $0 < r_1 - r_2 < d$ olur. Olası biçimler, alışılmadık derecede kalın bir çift dışbükey mercek ve birbirine göre ters çevrilmiş iki menisküs mercektir. Bunların eğrilik merkezlerinden M_1, M_2 'nin solundadır.

- **c)** Dışbükey yüzeyinin yarıçapı $R > 0$ olan bir düzlem-dışbükey mercek için

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Dolayısıyla elde edilebilir her odak uzaklığı, tam olarak bir kırılma indisini ve dolayısıyla bir dalga boyunu belirler.

- **d)** $R > 0$ keyfi bir uzunluk olmak üzere, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir iki örnek şunlardır:

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

ve

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Bunlar sırasıyla çift dışbükey ve çift içbükey merceklerdir. Elde edilebilir her odak uzaklığı için diğer cebirsel indis, ilk örnekte negatif, ikinci örnekte ise 1'den küçüktür.

Çözüm

Verilen formülü, mercek geometrisini sabit ve camı homojen kabul ederek **paraksiyal geometrik optik** çerçevesinde kullanıyoruz. Dalga boyu, bağıntıya $n = n(\lambda)$ üzerinden girer. Normal dispersiyonun görüldüğü saydam bir aralıktaki sıradan cam için $n > 1$ 'dir ve $n(\lambda)$ bire birdir.

Optik gücü ve işlemleri kolaylaştıran iki sabiti tanımlayalım:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

Sonlu ve sıfırdan farklı yarıçaplar için verilen formül şu hâli alır:

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

a) Dalga boylarının sayısı

Önceden belirlenmiş sonlu bir F odak uzaklığı için denklem (1) şu sonucu verir:

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

Bu, n 'ye göre ikinci dereceden bir denklemdir; dolayısıyla en fazla iki farklı kırılma indisi olabilir. $C = 0$ ise denklem doğrusal hâle gelir.

Her iki kök de fiziksel olarak kabul edilebilir olabilir: (b) kısmında, seçilen herhangi iki farklı cam indisi için bir mercek oluşturma yöntemi verilmektedir. Dolayısıyla en fazla **iki dalga boyu** mümkündür.

Dejenere olmayan, dispersif bir mercekte sürekli bir dalga boyu aralığının tamamında tam sabitlik mümkün değildir: denklem (2), sabit terimi $d > 0$ olduğundan n 'ye göre özdeş olarak sağlanamaz.

b) Koşullar ve olası mercek biçimleri

Birbirinden farklı iki n_1 ve n_2 indisi için odak uzaklıklarının eşitliği, optik güçlerin eşitliğine denktir. Denklem (1)'in bu iki indis için yazılan ifadelerini birbirinden çıkarırsak,

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

$n_1 \neq n_2$ olduğundan,

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

Dolayısıyla,

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2). \quad (3)$$

$n_1, n_2 > 1$ olduğundan,

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (4)$$

Örneğin, camın alabileceği herhangi iki indis verildiğinde $r_1 = R$, $r_2 = -R$ ve

$$d = \frac{2Rn_1 n_2}{n_1 n_2 - 1}$$

seçilsin. Bu seçim, denklem (3)'ü sağlayan bir çift dışbükey mercek verir ve iki fiziksel çözümün mümkün olduğunu gösterir.

Sabit bir mercek için eş indis şöyledir:

$$n_2 = \frac{d}{Cn_1}.$$

Her iki indis de camın gerçek dispersiyon aralığı içinde olmalıdır.

Bir dalga boyu yakınında birinci mertebeden bağımsızlık elde etmek için şu koşul gerekir:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

Normal dispersiyonda $dn/d\lambda \neq 0$ olduğundan bu, $df/dn = 0$ olmasını veya sonlu f için buna denk olarak $d\Phi/dn = 0$ olmasını gerektirir. Denklem (1) şu sonucu verir:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

Böylece, tasarım indisi n_0 'da,

$$\boxed{C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).} \quad (5)$$

İki dalga boyu için tam eşitlik koşulu ile durağanlık koşulu şu bağıntıyla ilişkilidir:

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

Dolayısıyla iki farklı indis, durağanlığın sağlandığı indisin iki yanında yer alır. Durağan noktadaki odak uzaklığının kendisi için ikinci dereceden denklemin bir çift katlı kökü vardır: bu değeri tam olarak veren tek bir dalga boyu bulunur ve birinci mertebeden değişim sıfırdır.

Geriye kalan bağımlılık genellikle ikinci mertebededir, çünkü

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{Pn^3} \neq 0.$$

Odak uzaklığı formülünde yerine koyarsak,

$$\boxed{f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}.} \quad (6)$$

Böylece koşulları sağlayan çift dışbükey biçimin odak uzaklığı pozitifken, koşulları sağlayan menisküs biçimlerin odak uzaklığı negatiftir.

Şematik çizimleri kesin olarak betimlemek için

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

alalım. Bu durumda eğrilik merkezleri şöyledir:

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

Denklem (5) sağlandığında,

$$\boxed{x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0.} \quad (7)$$

$\delta = d(1 - 1/n_0^2)$ olsun; dolayısıyla $0 < \delta < d$. Aşağıdaki seçimler üç somut şematik çizim verir; listelenen noktalar soldan sağa sıralanmıştır.

Mercek biçimi	Olası yarıçaplar	Tepe noktalarının ve merkezlerin sıralanışı
Çift dışbükey: her iki optik yüzey de dışa doğru bombelidir	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	S_1, M_1, M_2, S_2

Mercek biçimi	Olası yarıçaplar	Tepe noktalarının ve merkezlerin sıralanışı
Menisküs: birinci yüzey dışbükey, ikinci yüzey içbükeydir	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	S_1, S_2, M_1, M_2
Ters çevrilmiş menisküs: birinci yüzey içbükey, ikinci yüzey dışbükeydir	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	M_1, M_2, S_1, S_2

Optik yüzeyler, bir yan yüzeyle birleştirilmiş küçük küresel başlıklar olabilir. Çift dışbükey durumda koşul (4) şu hâli alır:

$$d > r_1 + |r_2|.$$

Dolayısıyla bu koşul, alışılmış ince çift dışbükey biçim yerine, uç yüzeyleri dışbükey olan uzun bir cam parçası gerektirir. Çift içbükey bir mercekte $r_1 < 0 < r_2$ olur; bu, $r_1 > r_2$ ile çeliştiğinden böyle bir mercek akromatiklik koşulunu sağlayamaz.

c) Düzlem-dışbükey mercek

İki yönelim vardır. Düzlem yüzey limiti alındığında

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n-1},$$

veya

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n-1}.$$

Yarıçapının büyüklüğü R olan dışbükey bir küresel yüzey için her ikisi de şu ifadeye indirgenir:

$$f(n) = \frac{R}{n-1}.$$

Kalınlık, etkin odak uzaklığı ifadesinden çıkar. Ayrıca,

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n-1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

Dolayısıyla $f(n)$ kesin olarak monotondur ve belirtilen, elde edilebilir bir odak uzaklığı şu indisi belirler:

$$\boxed{n = 1 + \frac{R}{F}}.$$

Bu nedenle bire bir dispersiyon aralığı içinde buna karşılık gelen tam olarak bir dalga boyu vardır.

d) Yalnızca bir fiziksel dalga boyunun bulunduğu iki başka durum

$C \neq 0$ için denklem (2), iki cebirsel indisin çarpımının şöyle olduğunu gösterir:

$$n \tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

Bu bağıntı, kullanışlı iki aileyi belirler.

1. $r_1 - r_2 \geq d$ veya $C \leq 0$.

$C < 0$ ise fiziksel bir $n > 1$ kökünün eşi negatiftir:

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

bu da sıradan camı betimleyemez. $C = 0$ ise denklem (2) doğrusaldır ve yine en fazla bir çözümü vardır.

Somut bir örnek şöyledir:

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

Bu, fiziksel olarak gerçekleştirilebilir bir çift dışbükey mercektir. Odak uzaklığı şöyledir:

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

ve

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

Dolayısıyla elde edilebilir her pozitif odak uzaklığı yalnızca bir fiziksel indiste ortaya çıkar. Diğer cebirsel kökü $\tilde{n} = -1/n$ 'dir.

2. $r_1 \leq r_2$ veya $C \geq d$.

Fiziksel bir $n > 1$ kökü için,

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

Dolayısıyla ikinci kök, sıradan camın indis aralığının dışındadır.

Somut bir örnek şöyledir:

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Bu, merkez kalınlığı pozitif olan bir çift içbükey mercektir; kalınlığı eksenden uzaklaştıkça artar. Odak uzaklığı şöyledir:

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

ve diğer cebirsel indisi şöyledir:

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

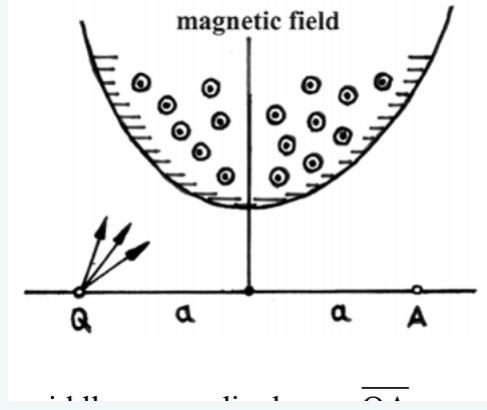
Böylece elde edilebilir her negatif odak uzaklığı da yalnızca bir fiziksel dalga boyuna karşılık gelir.

Her iki örneğin de kalınlığı sonludur ve iki eğri yüzeyi vardır. Yeterince küçük bir açıklık, bunların paraksiyal yaklaşımla uyumlu olmasını sağlar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Manyetik alandaki iyonlar

Aynı ve sabit m kütlelerine sahip pozitif iyonlardan (yükleri $+e$) oluşan bir demet, Q noktasından kâğıt düzleminde farklı yönlere yayılmaktadır (şekle² bakınız). İyonlar U gerilimiyle hızlandırılmıştır. Kâğıt düzlemine dik olan düzgün bir B manyetik alanında saptırılırlar. Manyetik alanın sınırları, başlangıçta birbirinden uzaklaşan iyonlar A noktasında odaklanacak şekilde düzenlenmiştir ($\overline{QA} = 2 \cdot a$). İyonların yörüngeleri, $\overline{QA}$ doğru parçasının orta dikmesine göre simetrik.



² Not: Açıklama amacıyla verilen bu şekil, özgün soru metninde yer almamaktadır.

Manyetik alan sınırlarının mümkün olan farklı biçimleri arasından, orta dikmenin çevresinde kesintisiz bir manyetik alanın bulunduğu ve Q ile A noktalarının alanın bulunmadığı bölgede kaldığı belirli bir tür ele alınacaktır.

- Parçacığın manyetik alandaki yörüngesinin eğrilik yarıçapı R 'yi, U geriliminin ve B manyetik indüksiyonunun fonksiyonu olarak ifade ediniz.
- Yukarıda belirtilen düzende parçacık yörüngelerinin karakteristik özelliklerini açıklayınız.
- $R < a$, $R = a$ ve $R > 0$ durumları için manyetik alanın sınırlarını geometrik çizimlerle elde ediniz.
- Manyetik alanın sınırlarının genel denklemini ifade ediniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

QA 'nın orta noktasını başlangıç noktası alınız; $Q = (-a, 0)$, $A = (a, 0)$ olsun ve şekilde gösterilen demet x ekseninin üstünde bulunsun.

- a)

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

- b) Her yörünge, doğrusal bir giriş parçasından, R yarıçaplı bir çember yayından ve doğrusal bir çıkış parçasından oluşur. Çemberin merkezi QA 'nın orta dikmesi üzerinde bulunur. Başlangıç doğrultusu QA ile θ açısı yapıyorsa manyetik sapma 2θ olur ve her bir doğrusal parçanın uzunluğu

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

ile verilir.

- c) Gelen ışına paralel ve manyetik kuvvet yönündeki tarafa doğru R kadar ötelenmiş bir doğruyu orta dikmeyle kesiştirerek çember merkezini bulunuz. Bu merkezden ışına indirilen dikmenin ayağı giriş noktasıdır; simetriği ise çıkış noktasını verir.

İleri yönde giden ışınlar için:

Durum	İzin verilen açılar, $\ell > 0$
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

$R < a$ için sınır dallarının tamamının düşey asimptotları $x = \pm R$ 'dir. $R \geq a$ için bu dalların limit uç noktaları Q, A 'dır; sonlu bir açısal açıklık bu noktaları kesin olarak alanın dışında tutar.

- **d)** Sınırın demet tarafından geçilen kısımları

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

veya eşdeğer olarak

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

ile verilir. Yukarıdaki dal kısıtlamaları altında bunların kapalı denklemi

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

biçimindedir.

Çözüm

a) Eğrilik yarıçapı

Görelî olmayan yaklaşımı kullanıp iyonların hızlandırılmadan önceki başlangıç kinetik enerjilerini ve iyonlar arasındaki etkileşimleri ihmal edelim. U potansiyel farkı altında hızlandırma sonucunda

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

elde edilir. Manyetik kuvvet hıza diktir; dolayısıyla sürati değiştirmeden hareketin yönünü değiştirir. Düzgün alanın içinde merkezci kuvveti sağlar:

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Böylece,

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

Burada B , alanın büyüklüğünü gösterir. Girdi değerleri SI birimleriyle verildiğinde R metre cinsindendir.

b) Yörüngelerin geometrisi

Saçak alanlarını ihmal ederek alan sınırını keskin kabul edelim. O, QA 'nın orta noktası olsun ve

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

seçelim. Şekilde gösterilen, kâğıt düzleminden dışarıya doğru alan yönü için yukarı doğru hareket eden pozitif iyonlar saat yönünde kıvrılır. Şu başlangıç doğrultusunu ele alalım:

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Giriş noktası P , çıkış noktası P' ve çember yayının merkezi C olsun.

Alanın dışında yörünge doğrusaldır. Keskin bir sınırdaki hız sürekliliğini korur; bu nedenle doğrusal ve çembersel kısımlar teğet olarak birleşir. y eksenine göre simetri, P' 'nin P 'nin simetriği olmasını gerektirir ve çember merkezi bu eksen üzerinde bulunmalıdır.

$QP = \ell$ yazarsak,

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

P 'den C 'ye doğru yönelen yarıçap, manyetik kuvvet yönündedir:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

$C_x = 0$ olduğundan,

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

ve dolayısıyla

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Buradan

$$P = (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta),$$

$$P' = (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta).$$

elde edilir. Merkez ise

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta} \right).$$

ile verilir. Çıkış hızının yönü $(\cos \theta, -\sin \theta)$ 'dir. Ardından ℓ uzunluğundaki doğrusal bir parça iyonu P' 'den A 'ya götürür; çünkü

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

Böylece hız vektörü alanın içinde 2θ kadar döner. Çember yayı C merkezinde aynı açıyı görür ve girişinin uzunluğu

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

olur.

c) Geometrik çizim ve üç rejim

Seçilen bir geliş doğrultusu için çizim şu şekilde yapılır:

1. Q 'dan çıkan ışını çiziniz.
2. Manyetik kuvvetin iyonu büküğü tarafta, dik uzaklığı R olan paralel bir doğru çiziniz.
3. Bu doğrunun QA 'nın orta dikmesiyle kesişimi C 'dir.
4. C 'den gelen ışına dikme indiriniz. Dikmenin ayağı P 'dir.
5. P 'nin orta dikmeye göre simetriğini alarak P' 'nü elde ediniz ve bu noktaları birleştiren, saat yönündeki R yarıçaplı çember yayını çiziniz.

Geliş doğrultusu değiştirildiğinde giriş sınırı çizilir. Simetri alınarak çıkış sınırı çizilir. Dikmenin ayağı Q 'nun ilerisinde olmalıdır; dolayısıyla

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

Şekilleri betimlemek için $s = |x|$ alalım.

- $R < a$.

Her dar geliş açısına izin verilir. θ , 0'dan $\pi/2$ 'ye doğru arttıkça sınır O 'dan sonsuz yüksekliğe doğru uzanır ve iki tarafta

$$x = -R \quad \text{ve} \quad x = R$$

doğrularına yaklaşır. $a > R$ olduğundan Q ve A bu şeridin dışında kalır.

O yakınında,

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

olduğundan limitteki geometrik yerin tamamının alt kısmı sivridir.

Dalların tümü boyunca monoton olarak yükselmesi gerekmez. Eğer

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

ise her dal, asimptotuna doğru yükselmeden önce bir yerel maksimuma, ardından bir yerel minimuma sahiptir. Aksi hâlde monoton olarak yükselir. Bu özellikler (d) kısmında verilen türevden çıkar.

- $R = a$.

Çizim her dar açı için geçerlidir ve

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

olur. Her dal O 'dan başlar, bir maksimuma kadar yükselir ve $\theta \rightarrow \pi/2$ iken karşılık gelen kaynak veya görüntü noktasına doğru geri döner.

Maksimum,

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

konumunda oluşur ve yüksekliği

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

olur.

Limitteki çembersel yörünge, merkezi O , yarıçapı a ve uç noktaları Q, A olan üst yarım çemberdir.

- $R > a$ — muhtemelen kastedilen üçüncü durum.

Çizim için

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

koşulu gerekir. Geometrik olarak α , hipotenüsü R , karşı kenarı a olan bir dik üçgenden elde edilir.

Her sınır dalı O 'dan başlar, tek bir maksimuma kadar yükselir ve $\theta \rightarrow \alpha$ iken Q veya A 'ya doğru geri döner. Bu limitte $\ell \rightarrow 0$ olur ve çembersel yörüngenin merkezi

$$C = (0, -\sqrt{R^2 - a^2}).$$

ile verilir. En yüksek noktası

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

yüksekliğindedir.

$R \geq a$ için limitteki geometrik yerin tamamını kullanmak, Q , A 'yı alan sınırı üzerine yerleştirir. Bu noktaları kesin olarak alanın bulunmadığı bölgelerin içinde tutmak için maksimum açısı limit değerden kesin olarak küçük olan bir demet seçiniz. Sınırın kullanılmayan kısmını demetin yörüngelerinin çevresinde devam ettiriniz; örneğin, izin verilen biraz daha büyük bir açı için çizilen bir çember yayıyla alanı yörüngelerin üstünden kapatınız. Ortaya çıkan alan bağlantılıdır ve Q , A 'dan ayrı kalır.

Odaklama koşulu yalnızca sınırın demet tarafından gerçekten geçilen kısımlarını belirler.

d) Genel sınır denklemi

(b) kısmından,

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

Dar açılara karşılık gelen dal için,

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

θ yok edilirse

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

Karesi alınmamış ifade ve tanım aralığı, fiziksel üst sınırı seçer. Yalnızca kare alma işlemi başka dallara da izin verir.

Tamamlayıcı olarak, türev alındığında

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

elde edilir. Böylece (c) kısmında sözü edilen tüm durağan yükseklikler

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

koşulunu sağlar.

$R > a$ için bu denklemin $0 < s < a$ aralığında tam olarak bir kökü vardır ve bu kök her dalın maksimumunu verir.

Çizilen sınırın her yörüngeyi uygun bölgede tuttuğunu da doğrulayabiliriz. Giriş koordinatı s için merkez yüksekliğini

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

olarak yazalım. O hâlde

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

$s = s_0$ konumunda giren bir iyon, üst çember yayını izler:

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

$s < s_0$ için $c(s)$ 'nin monotonluğundan

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

elde edilir. Böylece çembersel kısım, giriş ve çıkış sınırlarının üstünde, alanın içinde kalır. Girişten önce gelen doğru sınırın altında kalır; çünkü sınırın tanım aralığında $s > s_0$ için

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

olur. Simetri, çıkıştan sonra da aynı sonucun geçerli olduğunu gösterir. Dolayısıyla sınır, gerekli odaklamayı sağlar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.