

IPhO 1975

Теоретические задачи и решения · Гюстров, Германская Демократическая Республика
· 3 теоретические задачи с полными решениями

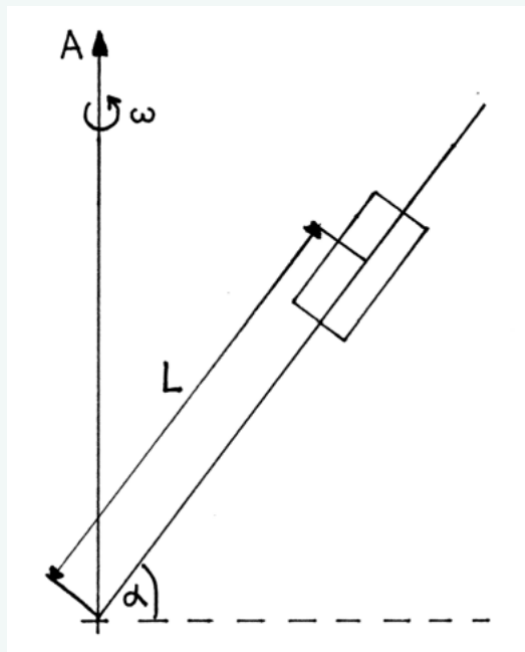
eulersolve.org/ipro/1975/

Задача 1: Вращающийся стержень

Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси A. Стержень образует с осью постоянный угол $\pi/2 - \alpha$. Тело массой m может скользить вдоль стержня. Коэффициент трения равен $\mu = \tan \beta$. Угол β называется «углом трения».

а) Определите углы α , при которых тело остаётся в покое и при которых оно движется, если стержень не вращается (т. е. $\omega = 0$).

б) Стержень вращается с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$. Угол α при вращении не изменяется. Найдите условие, при котором тело остаётся в покое относительно стержня.



Можно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ и $0 \leq \beta < \pi/2$. Обозначим через $L \geq 0$ расстояние вдоль стержня от точки его пересечения с осью вращения до тела.

- **a)** Тело, первоначально находящееся в покое, остаётся в покое при

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Оно скользит вниз по стержню при

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Случай $\alpha = \beta$ соответствует предельному равновесию.

- **b)** Необходимое и достаточное условие покоя относительно стержня имеет вид

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

При $0 \leq \alpha < \pi/2$ оно равносильно условию $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, где

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для вертикального стержня, $\alpha = \pi/2$, покой невозможен.

Решение

Будем рассматривать тело как материальную точку, движущуюся вдоль жёсткого стержня в однородном поле тяжести. Используем закон Кулона для трения покоя: сила трения может быть направлена в любую из двух сторон вдоль стержня, а её модуль не превышает μN , где N — нормальная реакция. Определим, может ли тело, первоначально покоящееся относительно стержня, оставаться в этом состоянии.

а) Невращающийся стержень

Стержень образует угол α с горизонталью. Поэтому составляющие силы тяжести равны

$$mg \sin \alpha \quad \text{вниз вдоль стержня,} \quad mg \cos \alpha \quad \text{перпендикулярно стержню.}$$

Ускорение в направлении, перпендикулярном стержню, отсутствует, поэтому

$$N = mg \cos \alpha.$$

Для равновесия сила трения должна уравновешивать составляющую силы тяжести вдоль стержня:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

При $0 \leq \alpha < \pi/2$ это условие принимает вид

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

откуда $\alpha \leq \beta$. При равенстве сила трения покоя достигает своего максимального значения.

Если $\alpha > \beta$, сила трения не может уравновесить силу тяжести, и тело, отпущенное без начальной скорости, скользит вниз по стержню. При $\alpha = \pi/2$ нормальная реакция, а значит, и возможная сила трения обращаются в нуль, поэтому тело также падает.

б) Вращающийся стержень

Используем систему отсчёта, вращающуюся вместе со стержнем. На тело, покоящееся в этой системе отсчёта, сила Кориолиса не действует; сила инерции Эйлера также отсутствует, поскольку ω постоянна. Помимо силы тяжести и сил взаимодействия со стержнем, учтём центробежную силу.

Расстояние от тела до вертикальной оси равно

$$r = L \cos \alpha,$$

поэтому центробежная сила направлена горизонтально от оси, а её модуль равен

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

Выберем положительное направление вдоль стержня от оси и вверх. Суммарная проекция силы тяжести и центробежной силы на это направление равна

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m (\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

Их составляющие, перпендикулярные стержню, направлены в одну сторону. Следовательно, нормальная реакция, необходимая для равновесия, равна

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Сила трения должна уравнивать $F_{\parallel}$, поэтому равновесие возможно тогда и только тогда, когда

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

Подставляя выражения и сокращая на m , получаем

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Таким образом, вращение изменяет как силу, которую должна уравнивать сила трения, так и нормальную реакцию, определяющую максимально возможную силу трения.

Чтобы выразить это условие в виде границ для L , представим неравенство с модулем в виде двух неравенств. Умножим их на $\cos \beta > 0$ и воспользуемся приведёнными формулами сложения. Получим

$$\begin{aligned}\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) &\geq g \sin(\alpha - \beta), \\ \omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) &\leq g \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

При $0 \leq \alpha < \pi/2$ величины $\cos \alpha$ и $\cos(\alpha - \beta)$ положительны. Поэтому первое неравенство требует, чтобы

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

При $\alpha \leq \beta$ правая часть неположительна, поэтому это не накладывает никаких ограничений сверх условия $L \geq 0$. Объединяя эти случаи, получаем приведённое выражение для $L_{\min}$.

Для второго неравенства:

- Если $\alpha + \beta < \pi/2$, коэффициент при L положителен, что даёт

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

- Если $\alpha + \beta \geq \pi/2$, левая часть неположительна, а правая положительна. Поэтому оно выполняется при любом $L \geq 0$, и верхней границы нет.

При L меньше положительного $L_{\min}$ сила тяжести не может быть уравновешена, и тело стремится скользить к оси и вниз. При L больше конечного $L_{\max}$ направленная от оси сила не может быть уравновешена, и тело стремится скользить от оси и вверх. Равенство на любой из границ включается как случай предельного равновесия.

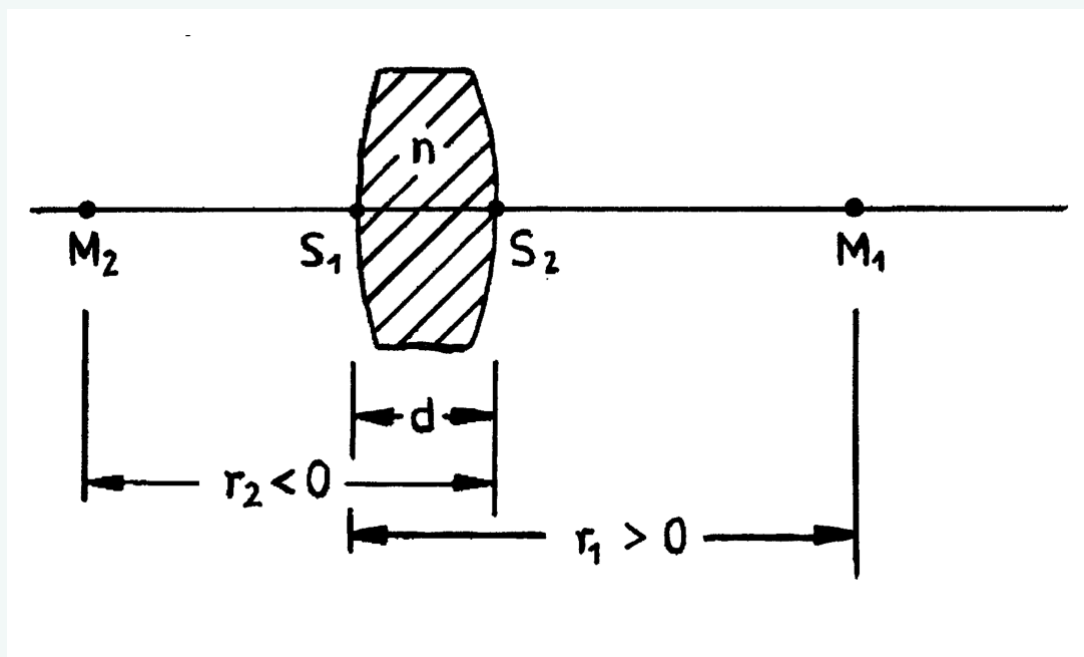
Наконец, при $\alpha = \pi/2$ тело находится на оси вращения. Центробежная сила и нормальная реакция обращаются в нуль, и сила тяжести остаётся неуравновешенной.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Толстая линза

Фокусное расстояние f толстой стеклянной линзы в воздухе с показателем преломления n , радиусами кривизны r_1, r_2 и расстоянием между вершинами d (см. рисунок) определяется формулой:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$



Примечание: $r_i > 0$ означает, что центр кривизны M_i находится справа от вершины поверхности S_i , а $r_i < 0$ означает, что центр кривизны M_i находится слева от вершины поверхности S_i ($i = 1, 2$).

Для некоторых специальных применений требуется, чтобы фокусное расстояние не зависело от длины волн.

а) Для скольких различных длин волн можно получить одно и то же фокусное расстояние?

b) Укажите соотношение между r_i ($i = 1, 2$), d и показателем преломления n , при котором может быть обеспечена требуемая независимость от длины волны, и обсудите это соотношение.

Схематически изобразите возможные формы линз и отметьте центры кривизны M_1 и M_2 .

с) Докажите, что для заданной плосковыпуклой линзы определённое фокусное расстояние можно получить только при одной длине волны.

d) Укажите возможные параметры толстой линзы ещё для двух случаев, в которых определённое фокусное расстояние может быть получено только при одной длине волны. Учитывайте физические и геометрические условия.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** Не более **двух различных длин волн**, если различным длинам волн в рассматриваемом спектральном интервале соответствуют различные показатели преломления.
- **b)** Для двух различных показателей преломления $n_1, n_2 > 1$ точное равенство фокусных расстояний требует выполнения условия

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

Для независимости от длины волны в первом порядке при показателе преломления n_0 необходимо

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

Следовательно, $0 < r_1 - r_2 < d$. Возможные формы — необычно толстая двояковыпуклая линза и две менисковые линзы противоположной ориентации. Их центры кривизны расположены так, что M_1 находится слева от M_2 .

- **c)** Для плосковыпуклой линзы с радиусом выпуклой поверхности $R > 0$

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Поэтому каждое достижимое фокусное расстояние однозначно определяет показатель преломления, а значит, и длину волны.

- **d)** Два физически реализуемых примера, где $R > 0$ — произвольная длина:

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

и

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Это соответственно двояковыпуклая и двояковогнутая линзы. Для каждого достижимого фокусного расстояния второй алгебраический корень для показателя преломления в первом примере отрицателен, а во втором — меньше 1.

Решение

Используем данную формулу в рамках **параксиальной геометрической оптики** для линзы с фиксированной геометрией, изготовленной из однородного стекла. Зависимость от длины волны входит через $n = n(\lambda)$. Для обычного стекла в прозрачном интервале нормальной дисперсии $n > 1$, а зависимость $n(\lambda)$ взаимно однозначна.

Определим оптическую силу и две удобные постоянные:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

Для конечных ненулевых радиусов данная формула принимает вид

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

а) Число длин волн

Для заданного конечного фокусного расстояния F уравнение (1) даёт

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

Это квадратное уравнение относительно n , поэтому различных показателей преломления может быть не более двух. При $C = 0$ оно становится линейным.

Оба корня могут быть физически допустимыми: в пункте (b) приведено построение для любой выбранной пары различных показателей преломления стекла. Таким образом, максимальное число — **две длины волны**.

Точное постоянство на всём непрерывном интервале длин волн невозможно для невырожденной линзы с дисперсией: уравнение (2) не может выполняться тождественно по n , поскольку его свободный член равен $d > 0$.

б) Условия и возможные формы линз

Для двух различных показателей преломления n_1 и n_2 равенство фокусных расстояний эквивалентно равенству оптических сил. Вычитая выражения (1) для этих двух показателей преломления, получаем

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

Поскольку $n_1 \neq n_2$,

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

Следовательно,

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2). \quad (3)$$

Так как $n_1, n_2 > 1$,

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (4)$$

Например, для любых двух доступных значений показателя преломления стекла выберем $r_1 = R, r_2 = -R$ и

$$d = \frac{2R n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1}.$$

Получается двояковыпуклая линза, удовлетворяющая уравнению (3), что доказывает возможность двух физических решений.

Для фиксированной линзы второй показатель преломления равен

$$n_2 = \frac{d}{C n_1}.$$

Оба показателя преломления должны лежать в фактическом диапазоне дисперсии стекла.

Чтобы получить **независимость в первом порядке вблизи одной длины волны**, потребуем

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

Поскольку при обычной дисперсии $dn/d\lambda \neq 0$, необходимо $df/dn = 0$, или, что эквивалентно при конечном f , $d\Phi/dn = 0$. Уравнение (1) даёт

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

Таким образом, при расчётном показателе преломления n_0

$$C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right). \quad (5)$$

Точное условие для двух длин волн и условие стационарности связаны соотношением

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

Следовательно, два различных показателя преломления лежат по разные стороны от показателя, соответствующего стационарной точке. При самом стационарном значении фокусного расстояния квадратное уравнение имеет двукратный корень: существует одна точная длина волны, при которой изменение в первом порядке обращается в нуль.

Остающаяся зависимость в общем случае имеет второй порядок, поскольку

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{P n^3} \neq 0.$$

Подстановка в формулу фокусного расстояния даёт

$$f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}. \quad (6)$$

Таким образом, допустимая двояковыпуклая форма имеет положительное фокусное расстояние, а допустимые менисковые формы — отрицательное.

Для точного описания схематических рисунков положим

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

Тогда координаты центров кривизны равны

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

При выполнении уравнения (5)

$$x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0. \quad (7)$$

Пусть $\delta = d(1 - 1/n_0^2)$, так что $0 < \delta < d$. Следующие варианты задают три конкретные схемы; перечисленные точки расположены слева направо.

Форма линзы	Возможные радиусы	Порядок расположения вершин и центров
Двояковыпуклая: обе оптические поверхности выпуклы наружу	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	S_1, M_1, M_2, S_2
Менисковая: первая поверхность выпуклая, вторая вогнутая	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	S_1, S_2, M_1, M_2
Менисковая обратной ориентации: первая поверхность вогнутая, вторая выпуклая	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	M_1, M_2, S_1, S_2

Оптические поверхности могут представлять собой небольшие сферические сегменты, соединённые боковой стенкой. В двояковыпуклом случае условие (4) принимает вид

$$d > r_1 + |r_2|.$$

Поэтому требуется длинное стеклянное тело с выпуклыми торцевыми поверхностями, а не обычная тонкая двояковыпуклая линза. Для двояковогнутой линзы $r_1 < 0 < r_2$, что противоречит $r_1 > r_2$, поэтому она не может удовлетворять условию ахроматизации.

с) Плосковыпуклая линза

Возможны две ориентации. Переходя к пределу плоской поверхности, получаем

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n - 1},$$

или

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n - 1}.$$

Для выпуклой сферической поверхности с модулем радиуса R оба выражения сводятся к

$$f(n) = \frac{R}{n - 1}.$$

Толщина не входит в выражение для эффективного фокусного расстояния. Кроме того,

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n-1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

Следовательно, $f(n)$ строго монотонна, и заданное достижимое фокусное расстояние определяет

$$n = 1 + \frac{R}{F}.$$

Поэтому в интервале, где зависимость показателя преломления от длины волны взаимно однозначна, существует ровно одна соответствующая длина волны.

d) Ещё два случая с единственной физически допустимой длиной волны

При $C \neq 0$ из уравнения (2) следует, что произведение двух алгебраических корней для показателя преломления равно

$$n \tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

Это позволяет выделить два полезных семейства.

1. $r_1 - r_2 \geq d$, или $C \leq 0$.

Если $C < 0$, то физическому корню $n > 1$ соответствует отрицательный второй корень,

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

который не может описывать обычное стекло. Если $C = 0$, уравнение (2) линейно и также имеет не более одного решения.

Конкретный пример:

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

Это физически реализуемая двояковыпуклая линза. Её фокусное расстояние равно

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

и

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

Поэтому каждое достижимое положительное фокусное расстояние получается только при одном физически допустимом показателе преломления. Второй алгебраический корень равен $\tilde{n} = -1/n$.

2. $r_1 \leq r_2$, или $C \geq d$.

Для физического корня $n > 1$

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

Таким образом, второй корень лежит вне диапазона показателей преломления обычного стекла.

Конкретный пример:

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Это двояковогнутая линза с положительной толщиной в центре; её толщина увеличивается по мере удаления от оси. Её фокусное расстояние равно

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

а второй алгебраический корень для показателя преломления равен

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

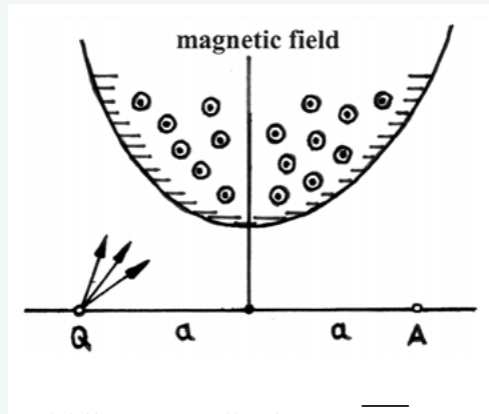
Таким образом, каждое достижимое отрицательное фокусное расстояние также соответствует только одной физически допустимой длине волны.

Оба примера имеют конечную толщину и две криволинейные поверхности. При достаточно малой апертуре они согласуются с параксиальным приближением.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Ионы в магнитном поле

Пучок положительных ионов (заряд $+e$) одинаковой и постоянной массы m расходится из точки Q в различных направлениях в плоскости рисунка (см. рисунок²). Ионы были ускорены напряжением U . Они отклоняются в однородном магнитном поле B , перпендикулярном плоскости рисунка. Границы магнитного поля выбраны так, что первоначально расходящиеся ионы фокусируются в точке A ($\overline{QA} = 2 \cdot a$). Траектории ионов симметричны относительно серединного перпендикуляра к $\overline{QA}$.



² Примечание: Этот поясняющий рисунок не входил в исходную формулировку задачи.

Среди различных возможных границ магнитного поля следует рассмотреть особый тип, при котором связанная область магнитного поля располагается вокруг серединного перпендикуляра, а точки Q и A находятся в области, свободной от поля.

а) Выразите радиус кривизны R траектории частицы в магнитном поле как функцию напряжения U и индукции B .

б) Опишите характерные свойства траекторий частиц в описанной выше системе.

с) Найдите границы магнитного поля с помощью геометрических построений для случаев $R < a$, $R = a$ и $R > 0$.

д) Запишите общее уравнение границ магнитного поля.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Примем середину QA за начало координат, положив $Q = (-a, 0)$, $A = (a, 0)$; изображённый пучок находится над осью x .

• а)

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

- б) Каждая траектория состоит из прямолинейного входящего участка, дуги окружности радиуса R и прямолинейного выходящего участка. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к QA . Если начальное направление составляет угол θ с QA , то угол отклонения в магнитном поле равен 2θ , а длина каждого прямолинейного участка равна

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

- в) Постройте центр окружности как точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой, параллельной входящему лучу и смещённой на R в сторону действия магнитной силы. Основание перпендикуляра, опущенного из центра на луч, является точкой входа; отражение даёт точку выхода.

Для лучей, направленных вперёд:

Случай	Допустимые углы при $\ell > 0$
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

При $R < a$ полные ветви границы имеют вертикальные асимптоты $x = \pm R$. При $R \geq a$ их предельными конечными точками являются Q, A ; ограничение угловой апертуры позволяет оставить эти точки строго вне поля.

- **d)** Участки границы, пересекаемые пучком, задаются уравнениями

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

или, что эквивалентно,

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

Их неявное уравнение имеет вид

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

с указанными выше ограничениями на ветви.

Решение

а) Радиус кривизны

Используем нерелятивистское приближение, пренебрежём начальной кинетической энергией ионов до ускорения и взаимодействием между ионами. Ускорение разностью потенциалов U даёт

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Магнитная сила перпендикулярна скорости, поэтому она изменяет направление движения, не изменяя модуля скорости. Внутри однородного поля она играет роль центростремительной силы:

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

Здесь B обозначает модуль магнитной индукции. Если исходные величины выражены в единицах СИ, то R получается в метрах.

б) Геометрия траекторий

Будем считать границу поля резкой, пренебрегая краевыми полями. Пусть O — середина QA , и выберем

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

При показанном на рисунке направлении поля из плоскости рисунка положительные ионы, движущиеся вверх, отклоняются по часовой стрелке. Рассмотрим начальное направление

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть P — точка входа, P' — точка выхода, а C — центр дуги окружности.

Вне поля траектория прямолинейна. На резкой границе скорость остаётся непрерывной, поэтому прямолинейный и круговой участки сопрягаются по касательной. Из симметрии относительно оси y следует, что P' должна быть отражением P , а центр окружности должен лежать на этой оси.

Обозначив $QP = \ell$, получим

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

Радиус, направленный от P к C , совпадает по направлению с магнитной силой:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

Поскольку $C_x = 0$,

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

и поэтому

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} P &= (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta), \\ P' &= (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta). \end{aligned}$$

Центр имеет координаты

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta} \right).$$

Скорость на выходе имеет направление $(\cos \theta, -\sin \theta)$. Затем по прямолинейному участку длины ℓ ион попадает из P' в A , поскольку

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

Таким образом, внутри поля вектор скорости поворачивается на угол 2θ . Дуге окружности соответствует такой же центральный угол с вершиной в C , а длина её хорды равна

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

с) Геометрическое построение и три режима

Для выбранного направления входящего луча построение выполняется следующим образом:

1. Проведите луч из Q .
2. Проведите параллельную ему прямую на перпендикулярном расстоянии R с той стороны, в которую магнитная сила отклоняет ион.
3. Точка её пересечения с серединным перпендикуляром к QA есть C .
4. Опустите перпендикуляр из C на входящий луч. Его основание есть P .
5. Отрадите P относительно серединного перпендикуляра, чтобы получить P' , и проведите соединяющую их дугу окружности радиуса R , проходимую по часовой стрелке.

Изменяя направление входящего луча, получаем входную границу. Отражение даёт выходную границу. Основание перпендикуляра должно лежать впереди Q , поэтому

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

Для описания формы границ положим $s = |x|$.

- $R < a$.

Допустим любой острый угол входа. При увеличении θ от 0 к $\pi/2$ граница идёт от O к бесконечной высоте, приближаясь к

$$\boxed{x = -R \quad \text{и} \quad x = R}$$

с двух сторон. Поскольку $a > R$, точки Q и A лежат вне этой полосы.

Вблизи O

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

поэтому полное предельное геометрическое место точек имеет заострённую нижнюю часть.

Ветви не обязательно возрастают монотонно на всём протяжении. Если

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

то каждая ветвь имеет локальный максимум, за которым следует локальный минимум, после чего она поднимается к своей асимптоте. В противном случае она возрастает монотонно. Эти свойства следуют из производной, приведённой в пункте (d).

- $R = a$.

Построение применимо для любого острого угла, причём

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

Каждая ветвь начинается в O , поднимается до максимума и возвращается к соответствующей точке источника или изображения при $\theta \rightarrow \pi/2$.

Максимум достигается при

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

на высоте

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

Предельная круговая траектория представляет собой верхнюю полуокружность радиуса a с центром в O и концами Q, A .

- $R > a$ — вероятно, именно этот третий случай имелся в виду.

Для построения требуется

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

Геометрически угол α определяется из прямоугольного треугольника с гипотенузой R и противолежащим катетом a .

Каждая ветвь границы начинается в O , поднимается до единственного максимума и возвращается к Q или A при $\theta \rightarrow \alpha$. В этом пределе $\ell \rightarrow 0$, а центр круговой траектории имеет координаты

$$C = \left(0, -\sqrt{R^2 - a^2}\right).$$

Её наивысшая точка находится на высоте

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

При $R \geq a$ использование полного предельного геометрического места точек поместило бы Q, A на границу поля. Чтобы оставить их строго внутри свободных от поля областей, следует выбрать пучок, максимальный угол которого строго меньше предельного значения. Продолжите неиспользуемую часть границы вокруг его траекторий; например, замкните область поля над ними дугой окружности, построенной для немного большего допустимого угла. Полученная область поля связна и остаётся отделённой от Q, A .

Условие фокусировки определяет только те участки границы, которые действительно пересекаются пучком.

d) Общее уравнение границы

Из пункта (b) имеем

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

Для ветви, соответствующей острым углам,

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Исключая θ , получаем

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

Следовательно,

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

Выражение до возведения в квадрат и область определения выделяют физическую верхнюю границу. Одно лишь уравнение, полученное возведением в квадрат, допускает также другие ветви.

Для полноты, дифференцирование даёт

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, все стационарные значения высоты, упомянутые в пункте (c), достигаются при условии

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

При $R > a$ это уравнение имеет ровно один корень в интервале $0 < s < a$, определяющий максимум каждой ветви.

Можно также проверить, что построенная граница удерживает каждую траекторию в соответствующей области. Запишем высоту центра для координаты входа s в виде

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Тогда

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

Ион, входящий при $s = s_0$, движется по верхней дуге окружности

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

При $s < s_0$ из монотонности $c(s)$ следует

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

Таким образом, круговой участок лежит выше входной и выходной границ, внутри поля. До входа входящая прямая лежит ниже границы, поскольку

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

при $s > s_0$ в области определения границы. Отражение устанавливает тот же результат после выхода. Следовательно, граница обеспечивает требуемую фокусировку.

Решение проверено по официальному решению.