

IPhO 1975

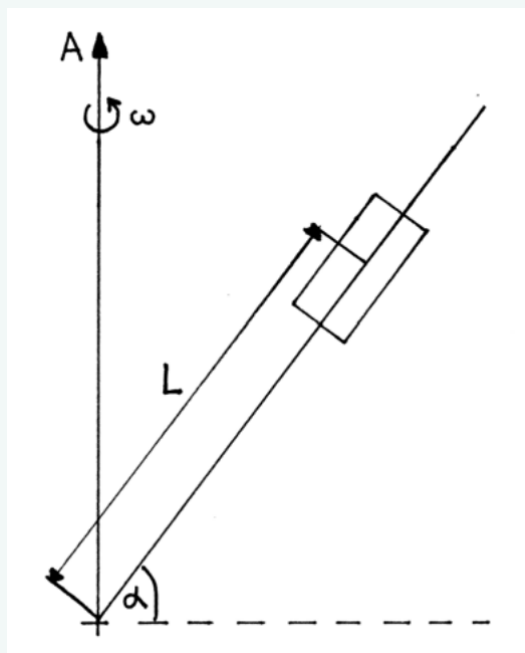
Problemas teóricos y soluciones · Güstrow, República Democrática Alemana · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1975/

Problema 1: Varilla en rotación

Una varilla gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical A. La varilla forma un ángulo fijo de $\pi/2 - \alpha$ con el eje. Un cuerpo de masa m puede deslizarse a lo largo de la varilla. El coeficiente de rozamiento es $\mu = \tan \beta$. El ángulo β se denomina «ángulo de rozamiento».

- Determine los ángulos α para los cuales el cuerpo permanece en reposo y aquellos para los cuales el cuerpo está en movimiento si la varilla no gira (es decir, $\omega = 0$).
- La varilla gira con velocidad angular constante $\omega > 0$. El ángulo α no cambia durante la rotación. Halle la condición para que el cuerpo permanezca en reposo respecto a la varilla.



Puede utilizar las siguientes relaciones:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Considérese $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ y $0 \leq \beta < \pi/2$. Sea $L \geq 0$ la distancia medida a lo largo de la varilla desde su intersección con el eje de rotación hasta el cuerpo.

- **a)** Un cuerpo inicialmente en reposo permanece en reposo cuando

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Se desliza hacia abajo a lo largo de la varilla cuando

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

El caso $\alpha = \beta$ corresponde al equilibrio límite.

- **b)** La condición necesaria y suficiente para el reposo respecto a la varilla es

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Para $0 \leq \alpha < \pi/2$, esta condición equivale a $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, donde

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$
$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Para una varilla vertical, $\alpha = \pi/2$, el reposo es imposible.

Solución

Se modela el cuerpo como una partícula obligada a moverse sobre una varilla rígida en un campo gravitatorio uniforme. Se utiliza el modelo de rozamiento estático de Coulomb: la fuerza de rozamiento puede actuar en cualquiera de los dos sentidos a lo largo de la varilla, con un módulo máximo de μN , donde N es la reacción normal. Determinamos si un cuerpo inicialmente en reposo respecto a la varilla puede permanecer en ese estado.

a) Varilla sin rotación

La varilla forma un ángulo α con la horizontal. Por tanto, el peso tiene las componentes

$$mg \sin \alpha \quad \text{hacia abajo a lo largo de la varilla,} \quad mg \cos \alpha \quad \text{perpendicular a la varilla.}$$

No hay aceleración perpendicular a la varilla, por lo que

$$N = mg \cos \alpha.$$

Para que haya equilibrio, el rozamiento debe compensar la componente del peso a lo largo de la varilla:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Para $0 \leq \alpha < \pi/2$, esto se convierte en

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

y, por tanto, $\alpha \leq \beta$. En el caso de igualdad, el rozamiento estático alcanza su valor máximo.

Si $\alpha > \beta$, el rozamiento no puede compensar el peso y el cuerpo, al soltarse desde el reposo, se desliza hacia abajo a lo largo de la varilla. Para $\alpha = \pi/2$, la reacción normal y, por tanto, el rozamiento disponible se anulan, de modo que el cuerpo también cae.

b) Varilla en rotación

Se utiliza un sistema de referencia que gira con la varilla. Un cuerpo en reposo en este sistema no experimenta fuerza de Coriolis; tampoco hay fuerza de Euler porque ω es constante. Además del peso y de las fuerzas de contacto, se incluye la fuerza centrífuga.

La distancia del cuerpo al eje vertical es

$$r = L \cos \alpha,$$

por lo que la fuerza centrífuga es horizontal y está dirigida hacia fuera, con un módulo

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

Se toma como sentido positivo a lo largo de la varilla el dirigido hacia fuera y hacia arriba. La componente conjunta del peso y de la fuerza centrífuga a lo largo de la varilla es

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m (\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

Sus componentes perpendiculares a la varilla actúan en el mismo sentido. Por consiguiente, la reacción normal necesaria para el equilibrio es

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

El rozamiento debe compensar $F_{\parallel}$, por lo que el equilibrio es posible exactamente cuando

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

Al sustituir y cancelar m , se obtiene

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Así pues, la rotación modifica tanto la fuerza que el rozamiento debe compensar como la reacción normal que determina el rozamiento disponible.

Para expresar la condición mediante cotas para L , se descompone la desigualdad con valor absoluto en sus dos desigualdades. Se multiplica por $\cos \beta > 0$ y se utilizan las fórmulas de adición proporcionadas. Esto da

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \geq g \sin(\alpha - \beta),$$

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \leq g \sin(\alpha + \beta).$$

Para $0 \leq \alpha < \pi/2$, tanto $\cos \alpha$ como $\cos(\alpha - \beta)$ son positivos. Por tanto, la primera desigualdad exige

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

Cuando $\alpha \leq \beta$, el miembro derecho es no positivo, por lo que esto no impone ninguna restricción adicional a $L \geq 0$. Al combinar estos casos se obtiene el $L_{\min}$ indicado.

Para la segunda desigualdad:

- Si $\alpha + \beta < \pi/2$, su coeficiente de L es positivo, lo que da

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

- Si $\alpha + \beta \geq \pi/2$, su miembro izquierdo es no positivo, mientras que su miembro derecho es positivo. Por tanto, se satisface para todo $L \geq 0$ y no hay cota superior.

Por debajo de un $L_{\min}$ positivo, el peso no puede compensarse y el cuerpo tiende a deslizarse hacia dentro y hacia abajo. Por encima de un $L_{\max}$ finito, la fuerza dirigida hacia fuera no puede compensarse y el cuerpo tiende a deslizarse hacia fuera y hacia arriba. La igualdad en cualquiera de las dos cotas se incluye como equilibrio límite.

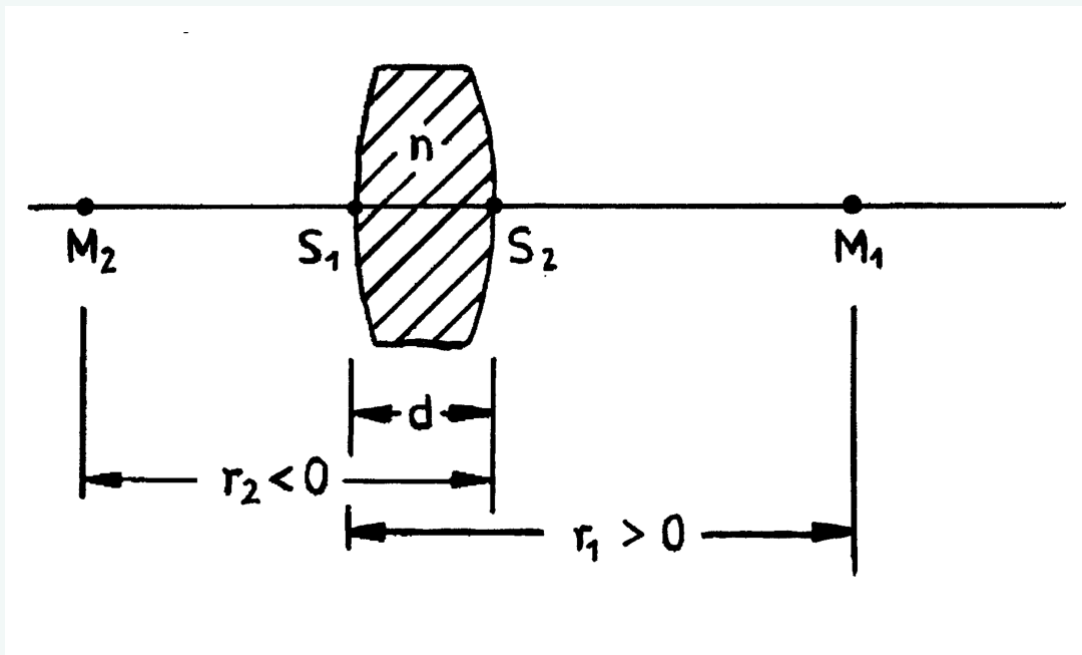
Finalmente, para $\alpha = \pi/2$, el cuerpo se encuentra sobre el eje de rotación. La fuerza centrífuga y la reacción normal se anulan, dejando el peso sin compensar.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Lente gruesa

La distancia focal f de una lente gruesa de vidrio en el aire, con índice de refracción n , radios de curvatura r_1, r_2 y distancia entre vértices d (véase la figura), viene dada por:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + d(n-1)]}$$



Observación: $r_i > 0$ significa que el centro de curvatura M_i está a la derecha del vértice de la superficie S_i , y $r_i < 0$ significa que el centro de curvatura M_i está a la izquierda del vértice de la superficie S_i ($i = 1, 2$).

Para algunas aplicaciones especiales se requiere que la distancia focal sea independiente de la longitud de onda.

a) ¿Para cuántas longitudes de onda diferentes puede obtenerse la misma distancia focal?

b) Describa una relación entre r_i ($i = 1, 2$), d y el índice de refracción n que permita satisfacer la independencia requerida respecto de la longitud de onda, y analice dicha relación.

Esboce posibles formas de las lentes e indique los centros de curvatura M_1 y M_2 .

c) Demuestre que, para una lente planoconvexa dada, una distancia focal específica solo puede obtenerse con una longitud de onda.

d) Indique posibles parámetros de la lente gruesa para otros dos casos en los que una determinada distancia focal pueda obtenerse con una sola longitud de onda. Tenga en cuenta las condiciones físicas y geométricas.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** Como máximo, **dos longitudes de onda distintas**, suponiendo que a longitudes de onda distintas les correspondan índices de refracción distintos en el intervalo espectral considerado.
- **b)** Para dos índices distintos $n_1, n_2 > 1$, la igualdad exacta de las distancias focales requiere

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

La independencia respecto de la longitud de onda a primer orden para un índice n_0 requiere

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

Por consiguiente, $0 < r_1 - r_2 < d$. Las formas posibles son una lente biconvexa inusualmente gruesa y dos lentes de menisco con orientaciones opuestas. Sus centros de curvatura cumplen que M_1 está a la izquierda de M_2 .

- **c)** Para una lente planoconvexa cuya superficie convexa tiene un radio $R > 0$,

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Por tanto, cada distancia focal alcanzable determina exactamente un índice de refracción y, en consecuencia, una longitud de onda.

- **d)** Dos ejemplos físicamente realizables, siendo $R > 0$ una longitud arbitraria, son

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

y

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Se trata de lentes biconvexas y bicóncavas, respectivamente. Para cada distancia focal alcanzable, el otro índice algebraico es negativo en el primer ejemplo y menor que 1 en el segundo.

Solución

Utilizamos la fórmula proporcionada en el marco de la **óptica geométrica paraxial**, con una geometría fija de la lente y un vidrio homogéneo. La longitud de onda interviene a través de $n = n(\lambda)$. Para un vidrio ordinario en un intervalo transparente de dispersión normal, $n > 1$ y $n(\lambda)$ es una función inyectiva.

Definimos la potencia óptica y dos constantes convenientes:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

Para radios finitos y no nulos, la fórmula dada se convierte en

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

a) Número de longitudes de onda

Para una distancia focal finita prescrita F , la ecuación (1) da

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

Esta ecuación es cuadrática en n , por lo que puede haber como máximo dos índices de refracción distintos. Si $C = 0$, se convierte en una ecuación lineal.

Ambas raíces pueden ser físicamente admisibles: el apartado (b) proporciona una construcción para cualquier par elegido de índices de refracción distintos del vidrio. Por tanto, el máximo es de **dos longitudes de onda**.

La constancia exacta en todo un intervalo continuo de longitudes de onda es imposible para una lente dispersiva no degenerada: la ecuación (2) no puede cumplirse idénticamente en n , ya que su término independiente es $d > 0$.

b) Condiciones y posibles formas de las lentes

Para dos índices distintos n_1 y n_2 , la igualdad de las distancias focales equivale a la igualdad de las potencias ópticas. Restando las expresiones de la ecuación (1) para ambos índices,

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

Como $n_1 \neq n_2$,

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

Por tanto,

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2). \quad (3)$$

Como $n_1, n_2 > 1$,

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (4)$$

Por ejemplo, dados dos índices cualesquiera disponibles para el vidrio, elegimos $r_1 = R$, $r_2 = -R$ y

$$d = \frac{2R n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1}.$$

Esto da una lente biconvexa que satisface la ecuación (3), lo que demuestra que son posibles dos soluciones físicas.

Para una lente fija, el índice asociado es

$$n_2 = \frac{d}{C n_1}.$$

Ambos índices deben estar dentro del intervalo real de índices de refracción del vidrio debido a su dispersión.

Para obtener **independencia a primer orden cerca de una longitud de onda**, exigimos

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

Como en la dispersión ordinaria se cumple $dn/d\lambda \neq 0$, esto requiere $df/dn = 0$ o, de forma equivalente, $d\Phi/dn = 0$ para f finita. La ecuación (1) da

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

Así, para el índice de diseño n_0 ,

$$C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right). \quad (5)$$

La condición exacta para dos longitudes de onda y la condición de estacionariedad están relacionadas por

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

Por tanto, los dos índices distintos se encuentran a lados opuestos del índice de estacionariedad. En la propia distancia focal estacionaria, la ecuación cuadrática tiene una raíz doble: hay una única longitud de onda exacta, con variación de primer orden nula.

La dependencia restante es, en general, de segundo orden, porque

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{P n^3} \neq 0.$$

La sustitución en la fórmula de la distancia focal da

$$f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}. \quad (6)$$

Así, la forma biconvexa admisible tiene una distancia focal positiva, mientras que las formas de menisco admisibles tienen una distancia focal negativa.

Para describir con precisión los esquemas, fijamos

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

Los centros de curvatura son entonces

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

De acuerdo con la ecuación (5),

$$x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0. \quad (7)$$

Sea $\delta = d(1 - 1/n_0^2)$, de modo que $0 < \delta < d$. Las siguientes elecciones proporcionan tres esquemas explícitos; los puntos indicados están ordenados de izquierda a derecha.

Forma de la lente	Radio posibles	Orden de los vértices y los centros
Biconvexa: ambas caras ópticas se abomban hacia fuera	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	S_1, M_1, M_2, S_2
Menisco: primera cara convexa, segunda cara cóncava	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	S_1, S_2, M_1, M_2
Menisco invertido: primera cara cóncava, segunda cara convexa	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	M_1, M_2, S_1, S_2

Las caras ópticas pueden ser pequeños casquetes esféricos unidos por una pared lateral. En el caso biconvexo, la condición (4) se convierte en

$$d > r_1 + |r_2|.$$

Por tanto, se requiere una pieza alargada de vidrio con caras extremas convexas, en lugar de la forma biconvexa delgada habitual. Una lente bicóncava tiene $r_1 < 0 < r_2$, lo que contradice $r_1 > r_2$, por lo que no puede satisfacer la condición de acromatismo.

c) Lente planoconvexa

Hay dos orientaciones. Tomando el límite de superficie plana se obtiene

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n - 1},$$

o

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n - 1}.$$

Para una superficie esférica convexa cuyo radio tiene módulo R , ambas expresiones se reducen a

$$f(n) = \frac{R}{n - 1}.$$

El espesor desaparece de la expresión de la distancia focal efectiva. Además,

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n-1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

Por tanto, $f(n)$ es estrictamente monótona, y una distancia focal alcanzable especificada determina

$$\boxed{n = 1 + \frac{R}{F}}.$$

Existe, por tanto, exactamente una longitud de onda correspondiente dentro de un intervalo en el que la dispersión es inyectiva.

d) Otros dos casos con una sola longitud de onda físicamente admisible

Para $C \neq 0$, la ecuación (2) muestra que el producto de los dos índices algebraicos es

$$n\tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

Esto permite identificar dos familias útiles.

$$1. r_1 - r_2 \geq d, \text{ o } C \leq 0.$$

Si $C < 0$, una raíz física $n > 1$ tiene una raíz asociada negativa,

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

que no puede describir un vidrio ordinario. Si $C = 0$, la ecuación (2) es lineal y también tiene como máximo una solución.

Un ejemplo concreto es

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

Se trata de una lente biconvexa físicamente realizable. Su distancia focal es

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

y

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

Por tanto, cada distancia focal positiva alcanzable se obtiene para un único índice físicamente admisible. Su otra raíz algebraica es $\tilde{n} = -1/n$.

$$2. r_1 \leq r_2, \text{ o } C \geq d.$$

Para una raíz física $n > 1$,

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

Por tanto, la segunda raíz queda fuera del intervalo correspondiente al vidrio ordinario.

Un ejemplo concreto es

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Se trata de una lente bicóncava con espesor central positivo; su espesor aumenta al alejarse del eje. Su distancia focal es

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

y su otro índice algebraico es

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

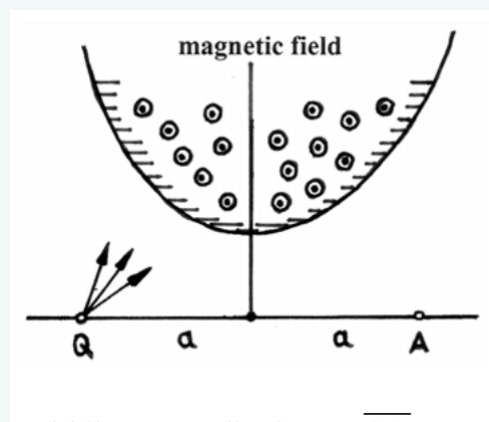
Así, cada distancia focal negativa alcanzable también corresponde a una sola longitud de onda físicamente admisible.

Ambos ejemplos tienen espesor finito y dos superficies curvas. Una abertura suficientemente pequeña permite que sean compatibles con la aproximación paraxial.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Iones en un campo magnético

Un haz de iones positivos (carga $+e$) de la misma masa constante m se propaga desde el punto Q en distintas direcciones en el plano del papel (véase la figura²). Los iones han sido acelerados mediante una tensión U . Se desvían en un campo magnético uniforme B perpendicular al plano del papel. Los límites del campo magnético están dispuestos de manera que los iones, inicialmente divergentes, se enfocan en el punto A ($\overline{QA} = 2 \cdot a$). Las trayectorias de los iones son simétricas respecto de la mediatriz de $\overline{QA}$.



² Observación: Esta figura ilustrativa no formaba parte del enunciado original del problema.

Entre los distintos límites posibles del campo magnético, se considerará un tipo específico en el que un campo magnético contiguo actúa en torno a la mediatriz y los puntos Q y A se encuentran en la región libre de campo.

- Expresa el radio de curvatura R de la trayectoria de la partícula en el campo magnético en función de la tensión U y de la inducción magnética B .
- Describe las propiedades características de las trayectorias de las partículas en la configuración mencionada anteriormente.
- Obtenga los límites del campo magnético mediante construcciones geométricas para los casos $R < a$, $R = a$ y $R > 0$.
- Describe la ecuación general de los límites del campo magnético.

Respuestas

Tómese el punto medio de QA como origen, con $Q = (-a, 0)$, $A = (a, 0)$ y el haz representado por encima del eje x .

- **a)**

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

- **b)** Cada trayectoria consta de un tramo rectilíneo de entrada, un arco de circunferencia de radio R y un tramo rectilíneo de salida. El centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de QA . Si la dirección inicial forma un ángulo θ con QA , la desviación magnética es 2θ , y cada tramo rectilíneo tiene una longitud

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

- **c)** Construya el centro de la circunferencia como la intersección de la mediatriz con una recta paralela al rayo incidente, desplazada una distancia R hacia el lado de la fuerza magnética. El pie de la perpendicular trazada desde el centro al rayo es el punto de entrada; la reflexión proporciona el punto de salida.

Para los rayos que avanzan hacia delante:

Caso	Ángulos permitidos con $\ell > 0$
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

Para $R < a$, las ramas completas del límite tienen asíntotas verticales $x = \pm R$. Para $R \geq a$, tienen extremos límite en Q, A ; una apertura angular finita mantiene esos puntos estrictamente fuera del campo.

- **d)** Las porciones del límite atravesadas por el haz son

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

o, de forma equivalente,

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

Su ecuación implícita es

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

con las restricciones de rama anteriores.

Solución

a) Radio de curvatura

Se utiliza la aproximación no relativista, se desprecia la energía cinética inicial de los iones antes de la aceleración y se desprecian las interacciones entre iones. La aceleración mediante la diferencia de potencial U da

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, por lo que cambia la dirección del movimiento sin modificar la rapidez. Dentro del campo uniforme, proporciona la fuerza centrípeta:

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Por consiguiente,

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

Aquí B representa el módulo del campo. Si los datos se expresan en unidades del SI, R se obtiene en metros.

b) Geometría de las trayectorias

Se considera que el límite del campo es abrupto y se desprecian los campos de borde. Sea O el punto medio de QA , y elijamos

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

Para el sentido del campo saliente del papel que se muestra en la figura, los iones positivos que se desplazan hacia arriba se desvían en sentido horario. Consideremos una dirección inicial

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Sean P el punto de entrada, P' el punto de salida y C el centro del arco de circunferencia.

Fuera del campo, la trayectoria es rectilínea. En un límite abrupto, la velocidad permanece continua, por lo que las porciones rectilíneas y circulares se unen tangencialmente. La simetría respecto del eje y exige que P' sea el reflejo de P , y el centro de la circunferencia debe estar en ese eje.

Escribiendo $QP = \ell$,

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

El radio desde P hacia C apunta en la dirección de la fuerza magnética:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

Como $C_x = 0$,

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

y, por tanto,

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Se deduce que

$$P = (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta),$$

$$P' = (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta).$$

El centro es

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta} \right).$$

La velocidad de salida tiene la dirección $(\cos \theta, -\sin \theta)$. Un tramo rectilíneo de longitud ℓ lleva entonces al ion desde P' hasta A , puesto que

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

Así pues, la velocidad gira un ángulo 2θ dentro del campo. El arco de circunferencia subtiende el mismo ángulo en C , y su cuerda tiene una longitud

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

c) Construcción geométrica y los tres regímenes

Para una dirección de incidencia elegida, la construcción es la siguiente:

1. Trace el rayo desde Q .
2. Trace una recta paralela a una distancia perpendicular R , en el lado hacia el que la fuerza magnética desvía al ion.
3. Su intersección con la mediatriz de QA es C .
4. Trace la perpendicular desde C hasta el rayo incidente. Su pie es P .
5. Refleje P respecto de la mediatriz para obtener P' , y trace el arco de circunferencia de radio R que los une en sentido horario.

Al variar la dirección de incidencia se traza el límite de entrada. La reflexión traza el límite de salida. El pie de la perpendicular debe quedar por delante de Q , de modo que

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

Para describir las formas, tomemos $s = |x|$.

- $R < a$.

Todo ángulo agudo de incidencia es admisible. Cuando θ aumenta desde 0 hacia $\pi/2$, el límite va desde O hacia una altura infinita, aproximándose a

$$x = -R \quad \text{y} \quad x = R$$

a ambos lados. Como $a > R$, Q y A se encuentran fuera de esta franja.

Cerca de O ,

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

por lo que el lugar geométrico límite completo tiene una parte inferior puntiaguda.

Las ramas no tienen por qué ascender monótonamente en todo su recorrido. Si

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

cada rama tiene un máximo local seguido de un mínimo local antes de ascender hacia su asíntota. En caso contrario, asciende monótonamente. Estas características se deducen de la derivada dada en el apartado (d).

- $R = a$.

La construcción es válida para todo ángulo agudo, y

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

Cada rama comienza en O , asciende hasta un máximo y regresa hacia el punto fuente o imagen correspondiente cuando $\theta \rightarrow \pi/2$.

El máximo se alcanza en

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

con una altura

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

La trayectoria circular límite es la semicircunferencia superior de radio a centrada en O , con extremos Q, A .

- $R > a$ — probablemente el tercer caso que se pretendía plantear.

La construcción requiere

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

Geométricamente, α se obtiene a partir de un triángulo rectángulo con hipotenusa R y cateto opuesto a .

Cada rama del límite comienza en O , asciende hasta un único máximo y regresa hacia Q o A cuando $\theta \rightarrow \alpha$. En ese límite, $\ell \rightarrow 0$, y la trayectoria circular tiene centro

$$C = (0, -\sqrt{R^2 - a^2}).$$

Su punto más alto es

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Para $R \geq a$, utilizar el lugar geométrico límite completo situaría Q, A en el límite del campo. Para mantenerlos estrictamente dentro de regiones libres de campo, se elige un haz cuyo ángulo máximo sea estrictamente inferior al valor límite. Se prolonga la parte no utilizada del límite alrededor de sus trayectorias; por ejemplo, se cierra el campo por encima de ellas mediante un arco de circunferencia construido para un ángulo admisible ligeramente mayor. El campo resultante es conexo y permanece separado de Q, A .

Solo las porciones del límite que el haz atraviesa realmente quedan fijadas por la condición de enfoque.

d) Ecuación general del límite

Del apartado (b),

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

Para la rama de ángulos agudos,

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Al eliminar θ se obtiene

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

Por tanto,

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

La expresión sin elevar al cuadrado y el dominio seleccionan el límite superior físico. La elevación al cuadrado por sí sola también admite otras ramas.

Para completar el análisis, al derivar se obtiene

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

Así, todas las alturas estacionarias mencionadas en el apartado (c) satisfacen

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

Para $R > a$, esta ecuación tiene exactamente una raíz en $0 < s < a$, que da el máximo de cada rama.

También podemos verificar que el límite construido mantiene cada trayectoria en la región apropiada.

Escribamos la altura del centro para la coordenada de entrada s como

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Entonces

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

Un ion que entra en $s = s_0$ sigue el arco de circunferencia superior

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

Para $s < s_0$, la monotonía de $c(s)$ da

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

Por tanto, la porción circular se encuentra por encima de los límites de entrada y salida, dentro del campo. Antes de la entrada, la recta incidente se encuentra por debajo del límite porque

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

para $s > s_0$ en el dominio del límite. La reflexión establece el mismo resultado después de la salida. Por consiguiente, el límite produce el enfoque requerido.

La solución se comprobó con la solución oficial.