

IPhO 1975

Theorieaufgaben und Lösungen · Güstrow, Deutsche Demokratische Republik · 3

Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

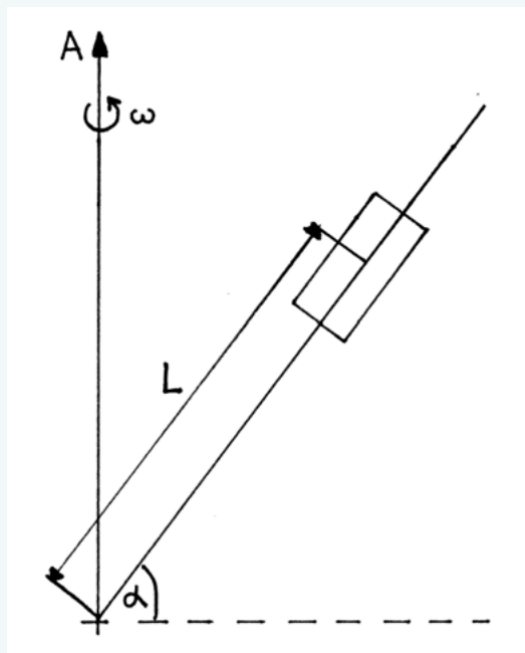
eulersolve.org/ippo/1975/

Aufgabe 1: Rotierender Stab

Ein Stab rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine vertikale Achse A. Der Stab schließt mit der Achse einen festen Winkel von $\pi/2 - \alpha$ ein. Ein Körper der Masse m kann entlang des Stabes gleiten. Der Reibungskoeffizient beträgt $\mu = \tan \beta$. Der Winkel β wird als „Reibungswinkel“ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Winkel α , bei denen der Körper in Ruhe bleibt, und diejenigen, bei denen sich der Körper bewegt, wenn der Stab nicht rotiert (d. h. $\omega = 0$).

b) Der Stab rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$. Der Winkel α ändert sich während der Rotation nicht. Finden Sie die Bedingung dafür, dass der Körper relativ zum Stab in Ruhe bleibt.



Sie können die folgenden Beziehungen verwenden:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es gelte $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ und $0 \leq \beta < \pi/2$. Mit $L \geq 0$ sei der entlang des Stabes gemessene Abstand von seinem Schnittpunkt mit der Rotationsachse bis zum Körper bezeichnet.

- **a)** Ein anfangs ruhender Körper bleibt in Ruhe, wenn

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Er gleitet den Stab hinab, wenn

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Der Fall $\alpha = \beta$ entspricht dem Grenzfall des Gleichgewichts.

- **b)** Die notwendige und hinreichende Bedingung für Ruhe relativ zum Stab lautet

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Für $0 \leq \alpha < \pi/2$ ist dies gleichbedeutend mit $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, wobei

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$
$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bei einem vertikalen Stab, $\alpha = \pi/2$, ist Ruhe unmöglich.

Lösung

Wir modellieren den Körper als Massenpunkt, dessen Bewegung auf einen starren Stab in einem homogenen Schwerfeld beschränkt ist. Wir verwenden das Coulombsche Haftreibungsgesetz: Die Reibungskraft kann entlang des Stabes in beide Richtungen wirken, wobei ihr Betrag höchstens μN ist; dabei ist N die Normalkraft. Wir bestimmen, ob ein Körper, der anfangs relativ zum Stab ruht, in diesem Zustand bleiben kann.

a) Nicht rotierender Stab

Der Stab bildet mit der Horizontalen einen Winkel α . Die Gewichtskraft hat daher die Komponenten

$$mg \sin \alpha \quad \text{entlang des Stabes abwärts,} \quad mg \cos \alpha \quad \text{senkrecht zum Stab.}$$

Senkrecht zum Stab tritt keine Beschleunigung auf, also gilt

$$N = mg \cos \alpha.$$

Für das Gleichgewicht muss die Reibung die Komponente der Gewichtskraft entlang des Stabes ausgleichen:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Für $0 \leq \alpha < \pi/2$ wird daraus

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

und somit $\alpha \leq \beta$. Bei Gleichheit erreicht die Haftreibung ihren Maximalwert.

Wenn $\alpha > \beta$, kann die Reibung die Gewichtskraft nicht ausgleichen, und der aus der Ruhe losgelassene Körper gleitet den Stab hinab. Bei $\alpha = \pi/2$ verschwinden die Normalkraft und damit die verfügbare Reibungskraft, sodass der Körper auch in diesem Fall fällt.

b) Rotierender Stab

Wir verwenden ein Bezugssystem, das mit dem Stab rotiert. Auf einen Körper, der in diesem Bezugssystem ruht, wirkt keine Corioliskraft; ebenso tritt keine Eulerkraft auf, da ω konstant ist. Zusätzlich zur Gewichtskraft und zu den Kontaktkräften berücksichtigen wir die Zentrifugalkraft.

Der Abstand des Körpers von der vertikalen Achse beträgt

$$r = L \cos \alpha,$$

die Zentrifugalkraft wirkt also horizontal nach außen und hat den Betrag

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

Wir wählen die positive Richtung entlang des Stabes nach außen und oben. Die resultierende Komponente von Gewichtskraft und Zentrifugalkraft entlang des Stabes beträgt

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m (\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

Ihre Komponenten senkrecht zum Stab wirken in dieselbe Richtung. Die für das Gleichgewicht erforderliche Normalkraft beträgt folglich

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Die Reibung muss $F_{\parallel}$ ausgleichen, sodass Gleichgewicht genau dann möglich ist, wenn

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

Einsetzen und Kürzen von m ergibt

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

Die Rotation verändert somit sowohl die Kraft, welche die Reibung ausgleichen muss, als auch die Normalkraft, welche die verfügbare Reibungskraft bestimmt.

Um die Bedingung als Grenzen für L auszudrücken, zerlegen wir die Betragsungleichung in ihre beiden Ungleichungen. Wir multiplizieren mit $\cos \beta > 0$ und verwenden die angegebenen Additionstheoreme. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) &\geq g \sin(\alpha - \beta), \\ \omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) &\leq g \sin(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Für $0 \leq \alpha < \pi/2$ sind sowohl $\cos \alpha$ als auch $\cos(\alpha - \beta)$ positiv. Die erste Ungleichung erfordert daher

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

Wenn $\alpha \leq \beta$, ist die rechte Seite nichtpositiv, sodass sich daraus über $L \geq 0$ hinaus keine Einschränkung ergibt. Die Zusammenfassung dieser Fälle liefert das angegebene $L_{\min}$.

Für die zweite Ungleichung gilt:

- Wenn $\alpha + \beta < \pi/2$, ist ihr Koeffizient von L positiv, woraus folgt

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

- Wenn $\alpha + \beta \geq \pi/2$, ist ihre linke Seite nichtpositiv, während ihre rechte Seite positiv ist. Sie ist daher für jedes $L \geq 0$ erfüllt, und es gibt keine obere Grenze.

Unterhalb eines positiven $L_{\min}$ kann die Gewichtskraft nicht ausgeglichen werden, und der Körper neigt dazu, nach innen und unten zu gleiten. Oberhalb eines endlichen $L_{\max}$ kann die nach außen gerichtete Kraft nicht ausgeglichen werden, und der Körper neigt dazu, nach außen und oben zu gleiten. Die Gleichheit an jeder der beiden Grenzen ist als Grenzfall des Gleichgewichts eingeschlossen.

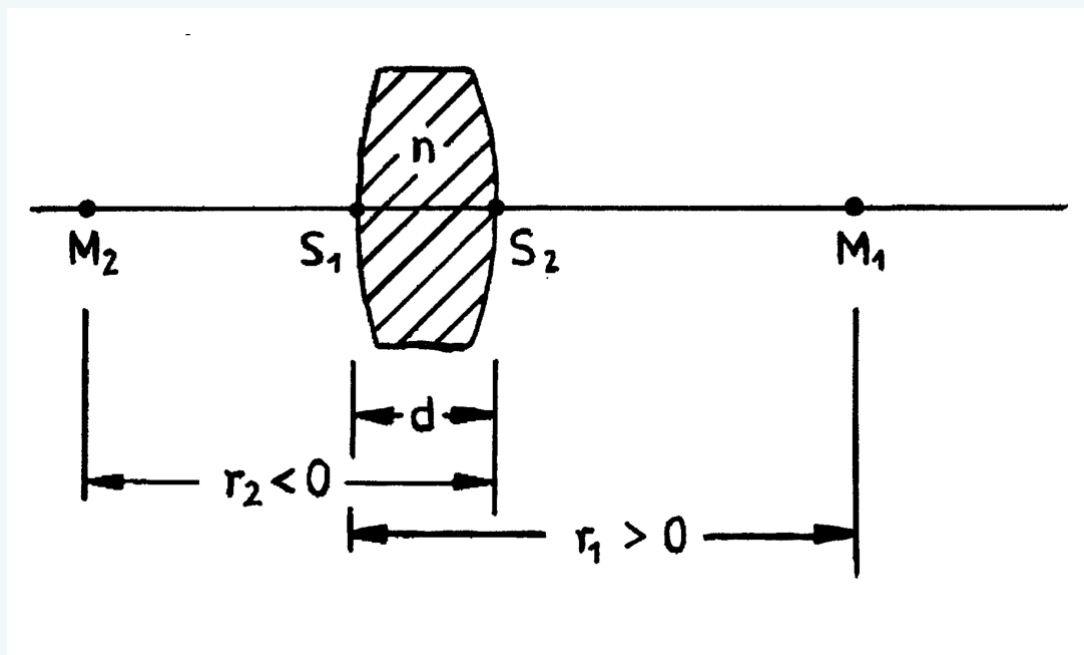
Schließlich liegt der Körper für $\alpha = \pi/2$ auf der Rotationsachse. Die Zentrifugalkraft und die Normalkraft verschwinden, sodass die Gewichtskraft unausgeglichen bleibt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Dicke Linse

Die Brennweite f einer dicken Glaslinse in Luft mit dem Brechungsindex n , den Krümmungsradien r_1, r_2 und dem Scheitelabstand d (siehe Abbildung) ist gegeben durch:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$



Anmerkung: $r_i > 0$ bedeutet, dass der Krümmungsmittelpunkt M_i rechts vom Flächenscheitel S_i liegt; $r_i < 0$ bedeutet, dass der Krümmungsmittelpunkt M_i links vom Flächenscheitel S_i liegt ($i = 1, 2$).

Für einige spezielle Anwendungen muss die Brennweite unabhängig von der Wellenlänge sein.

- Für wie viele verschiedene Wellenlängen kann dieselbe Brennweite erreicht werden?
- Geben Sie eine Beziehung zwischen r_i ($i = 1, 2$), d und dem Brechungsindex n an, mit der sich die geforderte Wellenlängenunabhängigkeit erfüllen lässt, und diskutieren Sie diese Beziehung.

Skizzieren Sie mögliche Linsenformen und markieren Sie die Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 .

c) Beweisen Sie, dass bei einer gegebenen plankonvexen Linse eine bestimmte Brennweite nur bei einer einzigen Wellenlänge erreicht werden kann.

d) Geben Sie mögliche Parameter der dicken Linse für zwei weitere Fälle an, in denen eine bestimmte Brennweite nur bei einer einzigen Wellenlänge realisiert werden kann. Berücksichtigen Sie dabei die physikalischen und geometrischen Gegebenheiten.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** Höchstens **zwei verschiedene Wellenlängen**, sofern verschiedene Wellenlängen im betrachteten Spektralbereich unterschiedliche Brechungsindizes besitzen.
- **b)** Für zwei verschiedene Brechungsindizes $n_1, n_2 > 1$ erfordert die exakte Gleichheit der Brennweiten

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

Wellenlängenunabhängigkeit in erster Ordnung bei einem Brechungsindex n_0 erfordert

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

Folglich gilt $0 < r_1 - r_2 < d$. Mögliche Formen sind eine ungewöhnlich dicke bikonvexe Linse und zwei zueinander umgekehrt orientierte Meniskuslinsen. Für ihre Krümmungsmittelpunkte gilt, dass M_1 links von M_2 liegt.

- **c)** Für eine plankonvexe Linse mit dem Radius $R > 0$ der konvexen Fläche gilt

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Jede erreichbare Brennweite legt daher genau einen Brechungsindex und somit eine Wellenlänge fest.

- **d)** Zwei physikalisch realisierbare Beispiele, wobei $R > 0$ eine beliebige Länge ist, sind

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

und

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Dabei handelt es sich um eine bikonvexe beziehungsweise eine bikonkave Linse. Für jede erreichbare Brennweite ist der andere algebraische Brechungsindex im ersten Beispiel negativ und im zweiten kleiner als 1.

Lösung

Wir verwenden die angegebene Formel im Rahmen der **paraxialen geometrischen Optik**, bei fester Linsengeometrie und homogenem Glas. Die Wellenlänge geht über $n = n(\lambda)$ ein. Für gewöhnliches Glas in einem transparenten Bereich mit normaler Dispersion gilt $n > 1$, und $n(\lambda)$ ist injektiv.

Wir definieren die Brechkraft und zwei zweckmäßige Konstanten:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

Für endliche, von null verschiedene Radien nimmt die gegebene Formel die folgende Form an:

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

a) Anzahl der Wellenlängen

Für eine vorgegebene endliche Brennweite F ergibt Gleichung (1)

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist quadratisch in n , sodass es höchstens zwei verschiedene Brechungsindizes geben kann. Für $C = 0$ wird sie linear.

Beide Lösungen können physikalisch zulässig sein: Teil (b) liefert eine Konstruktion für jedes gewählte Paar verschiedener Brechungsindizes von Glas. Das Maximum beträgt somit **zwei Wellenlängen**.

Eine exakte Konstanz über ein kontinuierliches Wellenlängenintervall ist für eine nicht entartete dispersive Linse unmöglich: Gleichung (2) kann nicht identisch in n erfüllt sein, da ihr konstanter Term $d > 0$ ist.

b) Bedingungen und mögliche Linsenformen

Für zwei verschiedene Brechungsindizes n_1 und n_2 ist die Gleichheit der Brennweiten gleichbedeutend mit der Gleichheit der Brechkraften. Subtraktion von Gleichung (1) für die beiden Brechungsindizes ergibt

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

Da $n_1 \neq n_2$, gilt

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

Somit folgt

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2). \quad (3)$$

Wegen $n_1, n_2 > 1$ gilt

$$0 < r_1 - r_2 < d. \quad (4)$$

Für zwei beliebige verfügbare Brechungsindizes von Glas wähle man beispielsweise $r_1 = R$, $r_2 = -R$ und

$$d = \frac{2Rn_1n_2}{n_1n_2 - 1}.$$

Dies ergibt eine bikonvexe Linse, die Gleichung (3) erfüllt, und zeigt damit, dass zwei physikalische Lösungen möglich sind.

Für eine feste Linse lautet der zugehörige zweite Brechungsindex

$$n_2 = \frac{d}{Cn_1}.$$

Beide Brechungsindizes müssen innerhalb des tatsächlichen Dispersionsbereichs des Glases liegen.

Um **Unabhängigkeit in erster Ordnung in der Nähe einer Wellenlänge** zu erhalten, fordert man

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

Da bei gewöhnlicher Dispersion $dn/d\lambda \neq 0$ gilt, erfordert dies $df/dn = 0$ oder, gleichbedeutend damit für endliches f , $d\Phi/dn = 0$. Gleichung (1) ergibt

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

Somit gilt beim Auslegungsbrechungsindex n_0

$$\boxed{C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).} \quad (5)$$

Die exakte Bedingung für zwei Wellenlängen und die Stationaritätsbedingung sind durch folgende Beziehung verknüpft:

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

Die beiden verschiedenen Brechungsindizes liegen daher auf entgegengesetzten Seiten des Brechungsindex am stationären Punkt. Bei der stationären Brennweite selbst hat die quadratische Gleichung eine doppelte Lösung: Es gibt genau eine Wellenlänge, bei der die Änderung in erster Ordnung verschwindet.

Die verbleibende Abhängigkeit ist im Allgemeinen von zweiter Ordnung, denn

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{Pn^3} \neq 0.$$

Einsetzen in die Brennweitenformel ergibt

$$\boxed{f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}.} \quad (6)$$

Die zulässige bikonvexe Form hat somit eine positive Brennweite, während die zulässigen Meniskusformen negative Brennweiten haben.

Zur präzisen Beschreibung der Skizzen setzen wir

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

Die Krümmungsmittelpunkte liegen dann bei

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

Unter der Bedingung von Gleichung (5) gilt

$$\boxed{x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0.} \quad (7)$$

Sei $\delta = d(1 - 1/n_0^2)$, sodass $0 < \delta < d$. Die folgenden Wahlen liefern drei konkrete Skizzen; die aufgeführten Punkte sind von links nach rechts angeordnet.

Linsenform	Mögliche Radien	Reihenfolge der Scheitel und Mittelpunkte
Bikonvex: Beide optischen Flächen sind nach außen gewölbt	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	S_1, M_1, M_2, S_2
Meniskus: erste Fläche konvex, zweite Fläche konkav	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	S_1, S_2, M_1, M_2
Umgekehrter Meniskus: erste Fläche konkav, zweite Fläche konvex	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	M_1, M_2, S_1, S_2

Die optischen Flächen können kleine Kugelkalotten sein, die durch eine Seitenwand verbunden sind. Im bikonvexen Fall wird Bedingung (4) zu

$$d > r_1 + |r_2|.$$

Sie erfordert daher ein langes Glasstück mit konvexen Stirnflächen anstelle der üblichen dünnen bikonvexen Form. Bei einer bikonkaven Linse gilt $r_1 < 0 < r_2$, was $r_1 > r_2$ widerspricht; sie kann die Achromasiebedingung daher nicht erfüllen.

c) Plankonvexe Linse

Es gibt zwei Orientierungen. Der Grenzübergang zu einer ebenen Fläche ergibt

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n - 1},$$

oder

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n - 1}.$$

Für eine konvexe Kugelfläche mit dem Radiusbetrag R vereinfachen sich beide zu

$$f(n) = \frac{R}{n - 1}.$$

Die Dicke fällt aus dem Ausdruck für die effektive Brennweite heraus. Außerdem gilt

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n - 1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

Somit ist $f(n)$ streng monoton, und eine vorgegebene erreichbare Brennweite bestimmt den Brechungsindex zu

$$\boxed{n = 1 + \frac{R}{F}}.$$

Innerhalb eines Bereichs mit injektiver Dispersionsfunktion gibt es daher genau eine zugehörige Wellenlänge.

d) Zwei weitere Fälle mit nur einer physikalisch zulässigen Wellenlänge

Für $C \neq 0$ ergibt sich aus Gleichung (2) für das Produkt der beiden algebraischen Brechungsindizes

$$n\tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

Daraus ergeben sich zwei nützliche Familien.

1. $r_1 - r_2 \geq d$, oder $C \leq 0$.

Für $C < 0$ gehört zu einer physikalischen Lösung $n > 1$ eine negative zweite Lösung,

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

die kein gewöhnliches Glas beschreiben kann. Für $C = 0$ ist Gleichung (2) linear und hat wiederum höchstens eine Lösung.

Ein konkretes Beispiel ist

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

Dies ist eine physikalisch realisierbare bikonvexe Linse. Ihre Brennweite beträgt

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

und es gilt

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

Jede erreichbare positive Brennweite tritt daher nur bei einem physikalisch zulässigen Brechungsindex auf. Die andere algebraische Lösung ist $\tilde{n} = -1/n$.

2. $r_1 \leq r_2$, oder $C \geq d$.

Für eine physikalische Lösung $n > 1$ gilt

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

Die zweite Lösung liegt daher außerhalb des Bereichs für gewöhnliches Glas.

Ein konkretes Beispiel ist

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

Dies ist eine bikonkave Linse mit positiver Mittendicke; ihre Dicke nimmt mit dem Abstand von der Achse zu. Ihre Brennweite beträgt

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

und ihr anderer algebraischer Brechungsindex ist

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

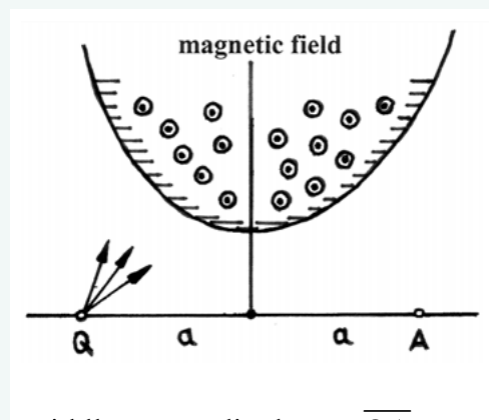
Somit entspricht auch jede erreichbare negative Brennweite nur einer physikalisch zulässigen Wellenlänge.

Beide Beispiele haben eine endliche Dicke und zwei gekrümmte Flächen. Eine hinreichend kleine Apertur macht sie mit der paraxialen Näherung vereinbar.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Ionen in einem Magnetfeld

Ein Strahl positiver Ionen (Ladung $+e$) gleicher und konstanter Masse m breitet sich vom Punkt Q aus in verschiedenen Richtungen in der Papierebene aus (siehe Abbildung²). Die Ionen wurden durch eine Spannung U beschleunigt. Sie werden in einem homogenen Magnetfeld B abgelenkt, das senkrecht zur Papierebene steht. Die Grenzen des Magnetfeldes sind so gestaltet, dass die zunächst auseinanderlaufenden Ionen im Punkt A fokussiert werden ($\overline{QA} = 2 \cdot a$). Die Bahnen der Ionen sind symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten auf $\overline{QA}$.



² Anmerkung: Diese veranschaulichende Abbildung war nicht Bestandteil der ursprünglichen Aufgabenstellung.

Unter den verschiedenen möglichen Begrenzungen von Magnetfeldern soll ein bestimmter Typ betrachtet werden, bei dem ein zusammenhängendes Magnetfeld um die Mittelsenkrechte herum wirkt und die Punkte Q und A im feldfreien Bereich liegen.

- Geben Sie den Krümmungsradius R der Teilchenbahn im Magnetfeld als Funktion der Spannung U und der magnetischen Flussdichte B an.
- Beschreiben Sie die charakteristischen Eigenschaften der Teilchenbahnen in der oben genannten Anordnung.
- Bestimmen Sie die Grenzen des Magnetfeldes durch geometrische Konstruktionen für die Fälle $R < a$, $R = a$ und $R > 0$.
- Geben Sie die allgemeine Gleichung für die Grenzen des Magnetfeldes an.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wählen wir den Mittelpunkt von QA als Ursprung, mit $Q = (-a, 0)$, $A = (a, 0)$ und dem dargestellten Strahl oberhalb der x -Achse.

- a)

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

- b) Jede Bahn besteht aus einem geraden einlaufenden Abschnitt, einem Kreisbogen mit Radius R und einem geraden auslaufenden Abschnitt. Der Kreismittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten von QA . Schließt die Anfangsrichtung mit QA einen Winkel θ ein, so beträgt die magnetische Ablenkung 2θ , und jeder gerade Abschnitt hat die Länge

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

- c) Konstruieren Sie den Kreismittelpunkt als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit einer Parallelen zum einlaufenden Strahl, die um R in Richtung der magnetischen Kraft versetzt ist. Der Lotfußpunkt auf dem Strahl ist der Eintrittspunkt; durch Spiegelung erhält man den Austrittspunkt.

Für die vorwärts gerichteten Strahlen:

Fall	Zulässige Winkel mit $\ell > 0$
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

Für $R < a$ haben die vollständigen Grenzkurvenäste die senkrechten Asymptoten $x = \pm R$. Für $R \geq a$ haben sie Grenzendpunkte bei Q, A ; eine endliche Winkelöffnung hält diese Punkte strikt außerhalb des Feldes.

- d) Die vom Strahl durchquerten Abschnitte der Grenze sind

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

oder gleichwertig

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

Ihre implizite Gleichung lautet

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

mit den oben angegebenen Einschränkungen für die Äste.

Lösung

a) Krümmungsradius

Wir verwenden die nichtrelativistische Näherung, vernachlässigen die anfängliche kinetische Energie der Ionen vor der Beschleunigung und vernachlässigen Wechselwirkungen zwischen den Ionen. Die Beschleunigung durch die Potentialdifferenz U ergibt

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Die magnetische Kraft steht senkrecht zur Geschwindigkeit und ändert daher die Bewegungsrichtung, ohne den Geschwindigkeitsbetrag zu ändern. Innerhalb des homogenen Feldes liefert sie die Zentripetalkraft:

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Folglich gilt

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

Hier bezeichnet B den Betrag der magnetischen Flussdichte. Werden die Größen in SI-Einheiten eingesetzt, ergibt sich R in Metern.

b) Geometrie der Bahnen

Wir behandeln die Feldgrenze als scharf und vernachlässigen Randfelder. Sei O der Mittelpunkt von QA , und wir wählen

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

Bei der dargestellten, aus der Papierebene heraus gerichteten Feldrichtung werden positive Ionen, die sich nach oben bewegen, im Uhrzeigersinn abgelenkt. Wir betrachten die Anfangsrichtung

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Seien P der Eintrittspunkt, P' der Austrittspunkt und C der Mittelpunkt des Kreisbogens.

Außerhalb des Feldes verläuft die Bahn geradlinig. An einer scharfen Grenze bleibt die Geschwindigkeit stetig, sodass die geraden und kreisförmigen Abschnitte tangential ineinander übergehen. Die Symmetrie bezüglich der y -Achse erfordert, dass P' das Spiegelbild von P ist, und der Kreismittelpunkt muss auf dieser Achse liegen.

Mit $QP = \ell$ gilt

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

Der Radiusvektor von P nach C zeigt in Richtung der magnetischen Kraft:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

Da $C_x = 0$, gilt

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

und somit

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Daraus folgt

$$P = (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta), \\ P' = (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta).$$

Der Mittelpunkt ist

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta} \right).$$

Die austretende Geschwindigkeit hat die Richtung $(\cos \theta, -\sin \theta)$. Ein gerader Abschnitt der Länge ℓ führt das Ion dann von P' nach A , denn

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

Die Geschwindigkeit dreht sich innerhalb des Feldes somit um 2θ . Der Kreisbogen überstreicht bei C denselben Mittelpunktswinkel, und seine Sehne hat die Länge

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

c) Geometrische Konstruktion und die drei Fälle

Für eine gewählte Einfallrichtung erfolgt die Konstruktion so:

1. Zeichnen Sie den von Q ausgehenden Strahl.
2. Zeichnen Sie eine parallele Gerade im senkrechten Abstand R auf der Seite, zu der die magnetische Kraft das Ion ablenkt.
3. Ihr Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten von QA ist C .
4. Füllen Sie das Lot von C auf den einlaufenden Strahl. Sein Fußpunkt ist P .
5. Spiegeln Sie P an der Mittelsenkrechten, um P' zu erhalten, und zeichnen Sie den im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogen mit Radius R , der beide Punkte verbindet.

Durch Variation der Einfallrichtung erhält man die Eintrittsgrenze. Durch Spiegelung erhält man die Austrittsgrenze. Der Lotfußpunkt muss in Strahlrichtung vor Q liegen, also gilt

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

Zur Beschreibung der Formen setzen wir $s = |x|$.

- $R < a$.

Jeder spitze Einfallswinkel ist zulässig. Wenn θ von 0 aus gegen $\pi/2$ wächst, verläuft die Grenze von O aus zu unendlicher Höhe und nähert sich auf den beiden Seiten

$$x = -R \quad \text{und} \quad x = R$$

an. Da $a > R$, liegen Q und A außerhalb dieses Streifens.

In der Nähe von O gilt

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

sodass die vollständige Grenzkurve unten eine Spitze besitzt.

Die Äste müssen nicht durchgehend monoton ansteigen. Falls

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

besitzt jeder Ast zunächst ein lokales Maximum und anschließend ein lokales Minimum, bevor er zu seiner Asymptote hin ansteigt. Andernfalls steigt er monoton an. Diese Eigenschaften folgen aus der in Teil (d) angegebenen Ableitung.

- $R = a$.

Die Konstruktion funktioniert für jeden spitzen Winkel, und es gilt

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

Jeder Ast beginnt bei O , steigt bis zu einem Maximum an und kehrt für $\theta \rightarrow \pi/2$ zum jeweiligen Quell- oder Bildpunkt zurück.

Das Maximum liegt bei

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

mit der Höhe

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

Die kreisförmige Grenzbahn ist der obere Halbkreis mit Radius a und Mittelpunkt O , dessen Endpunkte Q, A sind.

- $R > a$ — der vermutlich beabsichtigte dritte Fall.

Die Konstruktion erfordert

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

Geometrisch erhält man α aus einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse R und Gegenkathete a .

Jeder Grenzkurvenast beginnt bei O , steigt bis zu einem einzigen Maximum an und kehrt für $\theta \rightarrow \alpha$ zu Q oder A zurück. In diesem Grenzfall gilt $\ell \rightarrow 0$, und die Kreisbahn hat den Mittelpunkt

$$C = (0, -\sqrt{R^2 - a^2}).$$

Ihr höchster Punkt liegt bei

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Für $R \geq a$ würden Q, A bei Verwendung der vollständigen Grenzkurve auf der Feldgrenze liegen. Damit sie strikt innerhalb feldfreier Bereiche bleiben, wählen wir einen Strahl, dessen maximaler Winkel strikt unter dem Grenzwert liegt. Wir führen den nicht genutzten Teil der Grenze um seine Bahnen herum weiter; beispielsweise schließen wir das Feld oberhalb dieser Bahnen mit einem Kreisbogen ab, der für einen etwas größeren zulässigen Winkel konstruiert wird. Das resultierende Feld ist zusammenhängend und bleibt von Q, A getrennt.

Nur diejenigen Grenzabschnitte, die der Strahl tatsächlich durchquert, sind durch die Fokussierungsbedingung festgelegt.

d) Allgemeine Gleichung der Grenze

Aus Teil (b) folgt

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

Für den Ast mit spitzen Winkeln gilt

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Eliminieren von θ ergibt

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

Somit gilt

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

Der nicht quadrierte Ausdruck und der Definitionsbereich wählen die physikalisch relevante obere Grenzkurve aus. Durch das Quadrieren allein werden auch andere Äste zugelassen.

Der Vollständigkeit halber ergibt die Ableitung

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

Somit erfüllen alle in Teil (c) erwähnten stationären Höhen die Gleichung

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

Für $R > a$ hat diese Gleichung genau eine Nullstelle in $0 < s < a$, die das Maximum jedes Astes liefert.

Wir können auch überprüfen, dass die konstruierte Grenze jede Bahn im jeweils richtigen Bereich hält.

Wir schreiben die Höhe des Kreismittelpunkts für die Eintrittskoordinate s als

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Dann gilt

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

Ein bei $s = s_0$ eintretendes Ion folgt dem oberen Kreisbogen

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

Für $s < s_0$ ergibt die Monotonie von $c(s)$

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

Somit liegt der kreisförmige Abschnitt oberhalb der Eintritts- und Austrittsgrenzen, also innerhalb des Feldes. Vor dem Eintritt liegt die einlaufende Gerade unterhalb der Grenze, denn

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

gilt für $s > s_0$ im Definitionsbereich der Grenze. Durch Spiegelung erhält man dasselbe Ergebnis nach dem Austritt. Die Grenze bewirkt somit die geforderte Fokussierung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.