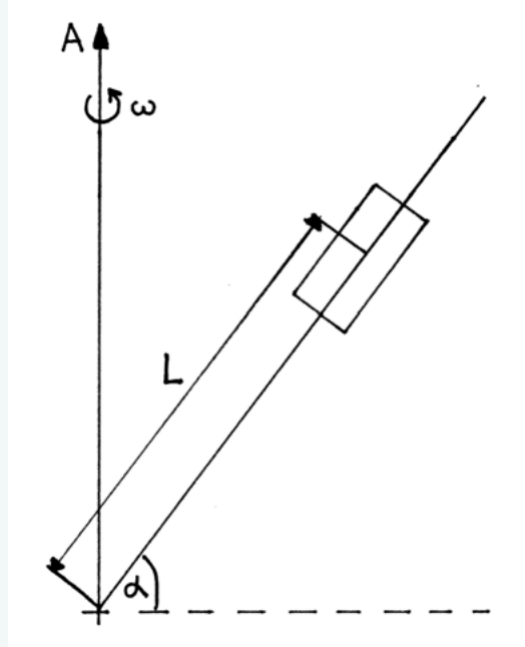


المسألة 1: قضيب دوّار

يدور قضيب بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور رأسي A. ويصنع القضيب زاوية ثابتة مقدارها $\pi/2 - \alpha$ مع المحور. يمكن لجسم كتلته m أن ينزلق على طول القضيب. معامل الاحتكاك هو $\mu = \tan \beta$. وتُسمى الزاوية β «زاوية الاحتكاك».

(a) حدّد الزوايا α التي يبقى عندها الجسم ساكناً، والتي يتحرّك عندها الجسم، إذا لم يكن القضيب يدور (أي عندما $\omega = 0$).

(b) يدور القضيب بسرعة زاوية ثابتة $\omega > 0$. ولا تتغيّر الزاوية α أثناء الدوران. أوجد شرط بقاء الجسم ساكناً بالنسبة إلى القضيب.



يمكنك استخدام العلاقات الآتية:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نفترض أن $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ وأن $0 \leq \beta < \pi/2$. ولتكن $L \geq 0$ المسافة المقاسة على طول القضيب من نقطة تقاطعه مع محور الدوران إلى الجسم.

• (a) يبقى الجسم الساكن في البداية ساكنًا عندما

$$0 \leq \alpha \leq \beta.$$

وينزلق إلى أسفل على طول القضيب عندما

$$\beta < \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

الحالة $\alpha = \beta$ هي حالة اتزان حدي.

• (b) الشرط اللازم والكافي للسكون بالنسبة إلى القضيب هو

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

عندما $0 \leq \alpha < \pi/2$ ، يكافئ هذا الشرط $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$ ، حيث

$$L_{\min} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \max\{0, \tan(\alpha - \beta)\},$$

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}, & \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}, \\ \infty, & \alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

إذا كان القضيب رأسيًا، أي $\alpha = \pi/2$ ، فإن السكون مستحيل.

الحل

نمذج الجسم بوصفه جسيمًا مقيّدًا بقضيب صلب في مجال جاذبية منتظم. ونستخدم قانون كولوم للاحتكاك السكوني: يمكن أن تتجه قوة الاحتكاك في أيّ من الاتجاهين على طول القضيب، على ألا يتجاوز مقدارها μN ، حيث N قوة رد الفعل العمودية. ونحدّد ما إذا كان الجسم الساكن في البداية بالنسبة إلى القضيب يستطيع البقاء كذلك.

(a) قضيب غير دوّار

يصنع القضيب زاوية α مع الأفقي. ولذلك تكون مركّبتا قوة الجاذبية

عموديًا على القضيب $mg \cos \alpha$ ، وإلى أسفل على طول القضيب $mg \sin \alpha$.

لا يوجد تسارع عمودي على القضيب، لذا

$$N = mg \cos \alpha.$$

لكي يتحقّق الاتزان، يجب أن يوازن الاحتكاك مركّبة قوة الجاذبية على طول القضيب:

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

عندما $0 \leq \alpha < \pi/2$ ، تصبح هذه العلاقة

$$\tan \alpha \leq \mu = \tan \beta,$$

ومن ثمّ $\alpha \leq \beta$. وعند المساواة، يبلغ الاحتكاك السكوني قيمته القصوى.

إذا كانت $\alpha > \beta$ ، فلا يستطيع الاحتكاك موازنة قوة الجاذبية، وينزلق الجسم المُطلَق من السكون إلى أسفل على طول القضيب. وعند $\alpha = \pi/2$ ، تنعدم قوة رد الفعل العمودية، وبالتالي ينعدم الاحتكاك المتاح، ولذلك يسقط الجسم أيضًا.

(b) قضيب دوّار

نستخدم إطارًا مرجعيًا يدور مع القضيب. لا يتعرّض الجسم الساكن في هذا الإطار لقوة كوريوليس؛ كما لا توجد قوة أويلر لأن ω ثابتة. ونُدّرج قوة الطرد المركزي بالإضافة إلى قوة الجاذبية وقوى التلامس.

بُعد الجسم عن المحور الرأسي هو

$$r = L \cos \alpha,$$

لذا تتجه قوة الطرد المركزي أفقياً نحو الخارج، ومقدارها

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \cos \alpha.$$

نختار الاتجاه الموجب على طول القضيب نحو الخارج وإلى أعلى. وتكون مركبة محصلة قوتَي الجاذبية والطرد المركزي على طول القضيب

$$F_{\parallel} = F_c \cos \alpha - mg \sin \alpha = m (\omega^2 L \cos^2 \alpha - g \sin \alpha).$$

تؤثر مركبتا هاتين القوتين العموديتان على القضيب في الاتجاه نفسه. وبالتالي، فإن قوة رد الفعل العمودية اللازمة للاتزان هي

$$N = mg \cos \alpha + F_c \sin \alpha = m \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

يجب أن يوازن الاحتكاك $F_{\parallel}$ ، لذا يكون الاتزان ممكناً إذا وفقط إذا

$$|F_{\parallel}| \leq \mu N.$$

بالتعويض واختزال m نحصل على

$$|g \sin \alpha - \omega^2 L \cos^2 \alpha| \leq \tan \beta \cos \alpha (g + \omega^2 L \sin \alpha).$$

إنّ يغيّر الدوران كلّاً من القوة التي يجب أن يوازنها الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودية التي تحدّد الاحتكاك المتاح.

للتعبير عن الشرط على هيئة حدّين L ، نفكّ متباينة القيمة المطلقة إلى متباينتيها. ونضرب في $\cos \beta > 0$ ، ونستخدم صيغ جمع الزوايا المعطاة. فنحصل على

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) \geq g \sin(\alpha - \beta),$$

$$\omega^2 L \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) \leq g \sin(\alpha + \beta).$$

عندما $0 \leq \alpha < \pi/2$ ، تكون كلّ من $\cos \alpha$ و $\cos(\alpha - \beta)$ موجبة. ولذلك تقتضي المتباينة الأولى أن

$$L \geq \frac{g \tan(\alpha - \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

عندما $\alpha \leq \beta$ ، يكون الطرف الأيمن غير موجب، فلا يفرض ذلك أيّ قيد إضافي غير $L \geq 0$. وبالجمع بين هذه الحالات نحصل على $L_{\min}$ المذكور.

أمّا المتباينة الثانية:

• إذا كانت $\alpha + \beta < \pi/2$ ، فإن معامل L فيها موجب، فنحصل على

$$L \leq \frac{g \tan(\alpha + \beta)}{\omega^2 \cos \alpha}.$$

• إذا كانت $\alpha + \beta \geq \pi/2$ ، فإن طرفها الأيسر غير موجب، في حين أن طرفها الأيمن موجب. ولذلك تتحقّق لكلّ $L \geq 0$ ، ولا يوجد حدّ أعلى.

عندما تكون L أقل من قيمة موجبة $L_{\min}$ ، لا يمكن موازنة قوة الجاذبية، ويميل الجسم إلى الانزلاق نحو الداخل وإلى أسفل. وعندما تكون L أكبر من قيمة منتهية $L_{\max}$ ، لا يمكن موازنة القوة المتجهة نحو الخارج، ويميل الجسم إلى الانزلاق نحو الخارج وإلى أعلى. وتدرّج المساواة عند أيّ من الحدين بوصفها حالة اتزان حدي.

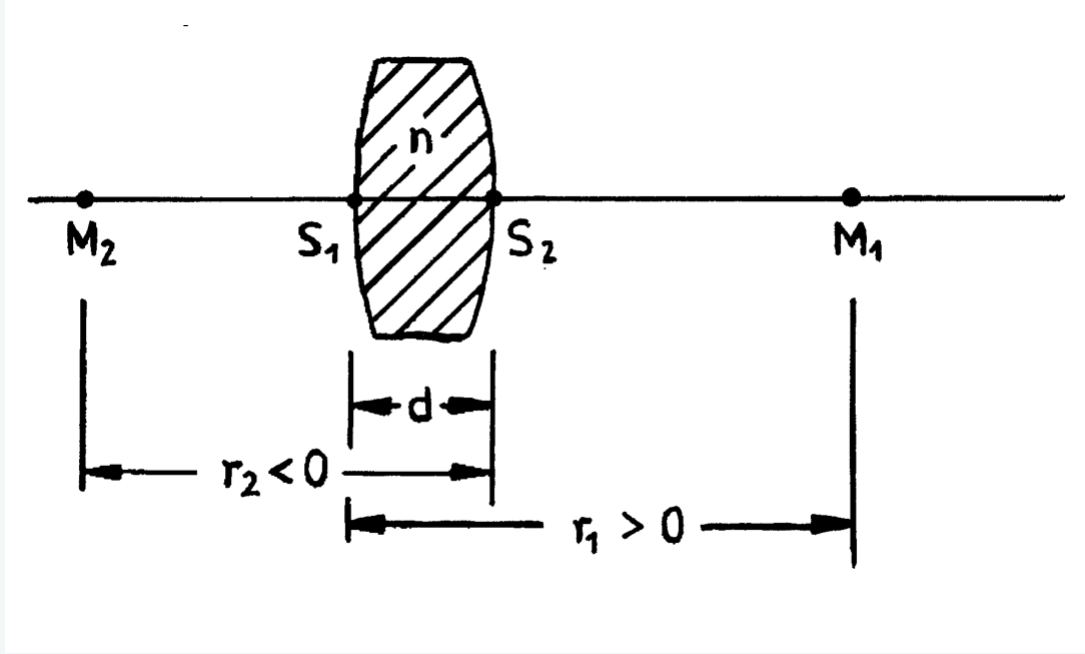
أخيراً، عندما $\alpha = \pi/2$ ، يقع الجسم على محور الدوران. وتتعدم قوة الطرد المركزي وقوة رد الفعل العمودية، فتبقى قوة الجاذبية دون موازنة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: عدسة سمكية

يُعطى البعد البؤري f لعدسة زجاجية سمكية في الهواء، معامل انكسارها n ، ونصف قطرَي تكور سطحَيها r_1 ، r_2 ، والمسافة بين رأسي سطحَيها d (انظر الشكل)، بالعلاقة:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$



ملاحظة: تعني $r_i > 0$ أن مركز التكور M_i يقع إلى يمين رأس السطح الفاصل مع الهواء S_i ، وتعني $r_i < 0$ أن مركز التكور M_i يقع إلى يسار رأس السطح الفاصل مع الهواء S_i ($i = 1, 2$).

في بعض التطبيقات الخاصة، يُشترط أن يكون البعد البؤري مستقلاً عن الطول الموجي.

(a) عند كم طول موجي مختلف يمكن الحصول على البعد البؤري نفسه؟

(b) بين علاقة بين r_i ($i = 1, 2$) و d ومعامل الانكسار n يمكن عند تحققها استيفاء شرط الاستقلال عن الطول الموجي، وناقش هذه العلاقة.

ارسم تخطيطياً الأشكال الممكنة للعدسات، وحدد مركزي التكور M_1 و M_2 .

(c) أثبت أنه، لعدسة محدبة مستوية معينة، لا يمكن الحصول على بعد بؤري محدد إلا عند طول موجي واحد.

(d) اذكر قيماً ممكنة لمعاملات العدسة السميكة في حالتين إضافيتين لا يمكن فيهما تحقيق بعد بؤري معين إلا عند طول موجي واحد. خذ الظروف الفيزيائية والهندسية في الحسبان.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) طولان موجيان مختلفان على الأكثر، بافتراض أن الأطوال الموجية المختلفة تقابلها معاملات انكسار مختلفة ضمن المجال الطيفي المدروس.

- (b) لمعاملتي انكسار مختلفين $n_1, n_2 > 1$ ، يتطلب التساوي التام للبعدين البؤريين أن يكون

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

ويطلب الاستقلال عن الطول الموجي من الرتبة الأولى عند معامل انكسار n_0 أن يكون

$$r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).$$

وبالتالي، $0 < r_1 - r_2 < d$. والأشكال الممكنة هي عدسة محدبة الوجهين ذات سماكة كبيرة على غير المعتاد، وعدستان هلايتان متعاكستا الاتجاه. وتقع مراكز تكورها بحيث يكون M_1 إلى يسار M_2 .

- (c) لعدسة محدبة مستوية نصف قطر تكورها سطحها المحدب $R > 0$ ،

$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

لذلك يحدّد كل بعد بؤري قابل للتحقيق معامل انكسار واحدًا بالضبط، ومن ثم طولًا موجيًا واحدًا.

- (d) مثالان قابلان للتحقيق فيزيائيًا، حيث $R > 0$ طول اختياري، هما

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R$$

و

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

وهما عدسة محدبة الوجهين وعدسة مقعرة الوجهين، على الترتيب. ولكل بعد بؤري قابل للتحقيق، يكون معامل الانكسار الجبري الآخر سالبًا في المثال الأول وأصغر من 1 في المثال الثاني.

الحل

نستخدم الصيغة المعطاة في إطار البصريّات الهندسية في التقريب المجاور للمحور، مع ثبات هندسة العدسة وتجانس الزجاج. ويظهر اعتمادها على الطول الموجي من خلال $n = n(\lambda)$. بالنسبة إلى الزجاج العادي ضمن مجال شفاف ذي تشتت عادي، يكون $n > 1$ وتكون الدالة $n(\lambda)$ متباينة.

نعرف القدرة البصرية وثابتين ملائمين:

$$\Phi(n) = \frac{1}{f(n)}, \quad P = r_1 r_2, \quad C = d + r_2 - r_1.$$

عندما يكون نصف قطر التكور منتهيين وغير صفريين، تصبح الصيغة المعطاة

$$\Phi(n) = \frac{1}{P} \left[Cn - (C + d) + \frac{d}{n} \right]. \quad (1)$$

(a) عدد الأطوال الموجية

لبعد بؤري منتهٍ محدّد F ، تعطي المعادلة (1)

$$Cn^2 - \left(C + d + \frac{P}{F} \right) n + d = 0. \quad (2)$$

هذه معادلة تربيعية في n ، لذا لا يمكن أن يوجد أكثر من معاملتي انكسار مختلفين. وإذا كان $C = 0$ ، فإنها تصبح خطية.

يمكن أن يكون كلا الجذرين مقبولا فيزيائيا: فالجزء (b) يقدّم طريقة لبناء عدسة لأي زوج مختار من معاملتي انكسار مختلفين للزجاج. ومن ثم فإن الحد الأقصى هو طولان موجيان.

يستحيل الثبات التام على امتداد مجال متصل من الأطوال الموجية لعدسة مشتتة غير منحلة: إذ لا يمكن أن تتحقق المعادلة (2) كمتطابقة في n ، لأن حدّها الثابت هو $d > 0$.

(b) الشروط والأشكال الممكنة للعدسات

لمعاملتي انكسار مختلفين n_1 و n_2 ، يكافئ تساوي البعدين البؤريين تساوي القدرتين البصريتين. وبطرح المعادلة (1) عند معاملي الانكسار، نحصل على

$$P[\Phi(n_1) - \Phi(n_2)] = (n_1 - n_2) \left(C - \frac{d}{n_1 n_2} \right).$$

بما أن $n_1 \neq n_2$ ، فإن

$$C = \frac{d}{n_1 n_2}.$$

وعليه،

$$\boxed{r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right), \quad d = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1} (r_1 - r_2).} \quad (3)$$

بما أن $n_1, n_2 > 1$ ، فإن

$$\boxed{0 < r_1 - r_2 < d.} \quad (4)$$

على سبيل المثال، لأي معاملي انكسار متاحين للزجاج، نختار $r_1 = R$ و $r_2 = -R$ ، و

$$d = \frac{2R n_1 n_2}{n_1 n_2 - 1}.$$

ينتج عن ذلك عدسة محدّبة الوجهين تحقق المعادلة (3)، مما يثبت إمكان وجود حلّين فيزيائيين.

لعدسة ثابتة، يكون معامل الانكسار المقترن هو

$$n_2 = \frac{d}{C n_1}.$$

يجب أن يقع كلا معاملي الانكسار ضمن مجال التشتت الفعلي للزجاج.

للحصول على استقلال من الرتبة الأولى قرب طول موجي واحد، نشترط

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = 0.$$

بما أن التشتت العادي يحقق $dn/d\lambda \neq 0$ ، فإن هذا يتطلب $df/dn = 0$ ، أو، على نحو مكافئ، $d\Phi/dn = 0$ عندما يكون f منتهيًا. وتعطي المعادلة (1)

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{P} \left(C - \frac{d}{n^2} \right).$$

إذن، عند معامل الانكسار التصميمي n_0 ،

$$\boxed{C = \frac{d}{n_0^2}, \quad r_1 - r_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_0^2} \right).} \quad (5)$$

يرتبط شرط التطابق التام عند طولين موجيين بشرط انعدام المشتقة بالعلاقة

$$n_0 = \sqrt{n_1 n_2}.$$

لذلك يقع معاملا الانكسار المختلفان على جانبي معامل الانكسار الذي تنعدم عنده المشتقة. وعند قيمة البعد البؤري التي تنعدم عندها المشتقة نفسها، يكون للمعادلة التربيعية جذر مضاعف: يوجد طول موجي واحد يحقق هذه القيمة تمامًا، مع انعدام التغير من الرتبة الأولى.

ويكون الاعتماد المتبقي عمومًا من الرتبة الثانية، لأن

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} = \frac{2d}{Pn^3} \neq 0.$$

بالتعويض في صيغة البعد البؤري نحصل على

$$f(n_0) = -\frac{n_0^2 r_1 r_2}{d(n_0 - 1)^2}. \quad (6)$$

إذن، يكون البعد البؤري للشكل المقبول المحدب الوجهين موجباً، بينما يكون البعد البؤري للأشكال الهلالية المقبولة سالباً. لوصف الرسوم التخطيطية بدقة، نضع

$$x(S_1) = 0, \quad x(S_2) = d.$$

عندئذ يكون موضعاً مركزي التكور

$$x(M_1) = r_1, \quad x(M_2) = d + r_2.$$

بموجب المعادلة (5)،

$$x(M_2) - x(M_1) = \frac{d}{n_0^2} > 0. \quad (7)$$

لتكن $\delta = d(1 - 1/n_0^2)$ ، ومن ثم $0 < \delta < d$. تعطي الاختيارات التالية ثلاثة رسوم تخطيطية محدّدة؛ والنقاط المذكورة مرتبة من اليسار إلى اليمين.

ترتيب الرؤوس والمراكز	أنصاف أقطار التكور الممكنة	شكل العدسة
S_1, M_1, M_2, S_2	$r_1 = \delta/2, \quad r_2 = -\delta/2$	محدّبة الوجهين: كلا الوجهين البصريين بارز إلى الخارج
S_1, S_2, M_1, M_2	$r_1 = d + \delta, \quad r_2 = d$	هلالية: الوجه الأول محدب، والوجه الثاني مقعر
M_1, M_2, S_1, S_2	$r_1 = -d, \quad r_2 = -(d + \delta)$	هلالية معكوسة: الوجه الأول مقعر، والوجه الثاني محدب

يمكن أن يكون الوجهان البصريان قلعسوتين كرويتين صغيرتين يصل بينهما جدار جانبي. وفي حالة العدسة المحدّبة الوجهين، يصبح الشرط

$$d > r_1 + |r_2|.$$

لذلك يتطلب هذا قطعة طويلة من الزجاج ذات وجهين طرفيين محدّبين، بدلاً من الشكل المعتاد للعدسة الرقيقة المحدّبة الوجهين. أما العدسة المقعرة الوجهين فتحقق $0 < r_1 < r_2$ ، وهو ما يناقض $r_1 > r_2$ ، ولذلك لا يمكنها تحقيق شرط اللالونية.

(c) عدسة محدّبة مستوية

يوجد اتجاهان ممكنان للعدسة. بأخذ نهاية السطح المستوي نحصل على

$$r_2 \rightarrow \infty : \quad f = \frac{r_1}{n - 1},$$

أو

$$r_1 \rightarrow \infty : \quad f = -\frac{r_2}{n - 1}.$$

لسطح كروي محدب مقدار نصف قطر تكوره R ، تختزل العلاقتان إلى

$$f(n) = \frac{R}{n - 1}.$$

لا تظهر السماكة في البعد البؤري الفعّال. وعلاوة على ذلك،

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R}{(n - 1)^2} < 0 \quad (n > 1).$$

إذن، الدالة $f(n)$ رتيبة تماماً، ويحدّد البعد البؤري المعيّن القابل للتحقيق

$$n = 1 + \frac{R}{F}.$$

لذلك يوجد طول موجي مقابل واحد بالضبط ضمن مجال تكون فيه علاقة التشتت متباينة.

(d) حالتان إضافيتان لا يوجد فيهما سوى طول موجي فيزيائي واحد

عندما يكون $C \neq 0$ ، تبين المعادلة (2) أن حاصل ضرب معاملي الانكسار الجبريين هو

$$n\tilde{n} = \frac{d}{C}. \quad (8)$$

تحدد هذه العلاقة فئتين مفيدتين.

1. $r_1 - r_2 \geq d$ ، أو $C \leq 0$.

إذا كان $C < 0$ ، فإن الجذر الفيزيائي $n > 1$ يقترب بجذر سالب،

$$\tilde{n} = \frac{d}{Cn} < 0,$$

لا يمكن أن يصف الزجاج العادي. وإذا كان $C = 0$ ، فإن المعادلة (2) تكون خطية، ولا يكون لها أيضاً أكثر من حل واحد.

ومن الأمثلة المحددة

$$r_1 = R, \quad r_2 = -R, \quad d = R.$$

هذه عدسة محدبة الوجهين قابلة للتحقيق فيزيائياً. وبعدها البؤري هو

$$f(n) = \frac{Rn}{n^2 - 1},$$

و

$$\frac{df}{dn} = -\frac{R(n^2 + 1)}{(n^2 - 1)^2} < 0.$$

لذلك يتحقق كل بعد بؤري موجب قابل للتحقيق عند معامل انكسار فيزيائي واحد فقط. أما جذرها الجبري الآخر فهو $\tilde{n} = -1/n$.

2. $r_1 \leq r_2$ ، أو $C \geq d$.

للجذر الفيزيائي $n > 1$

$$0 < \tilde{n} = \frac{d}{Cn} \leq \frac{1}{n} < 1.$$

لذلك يقع الجذر الثاني خارج مجال معاملات انكسار الزجاج العادي.

ومن الأمثلة المحددة

$$r_1 = -R, \quad r_2 = R, \quad d = R.$$

هذه عدسة مقعرة الوجهين ذات سماكة مركزية موجبة؛ وتزداد سماكتها بالابتعاد عن المحور. وبعدها البؤري هو

$$f(n) = -\frac{Rn}{(n-1)(3n-1)} < 0,$$

ومعامل انكسارها الجبري الآخر هو

$$\tilde{n} = \frac{1}{3n} < 1.$$

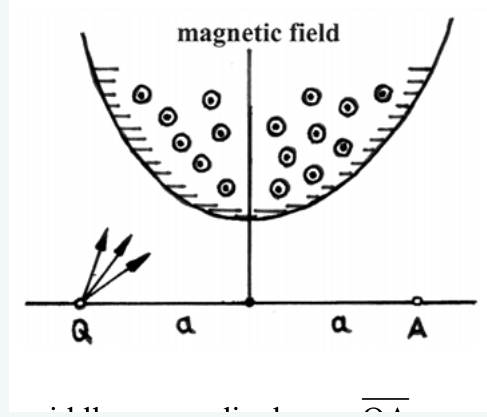
ومن ثم فإن كل بعد بؤري سالب قابل للتحقيق يقابله أيضاً طول موجي فيزيائي واحد فقط.

كلا المثالين ذو سماكة منتهية وسطحين منحنين. وتجعل فتحة صغيرة بما يكفي كليهما متوافقاً مع التقريب المجاور للمحور.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: أيونات في مجال مغناطيسي

تنتشر حزمة من الأيونات الموجبة (شحنتها $+e$)، ذات كتلة واحدة ثابتة m ، من النقطة Q في اتجاهات مختلفة في مستوى الورقة (انظر الشكل²). سرّعت الأيونات بجهد U . وتنحرف في مجال مغناطيسي منتظم B عمودي على مستوى الورقة. شكّلت حدود المجال المغناطيسي بحيث تتجمع الأيونات المتباعدة في البداية عند النقطة A ($\overline{QA} = 2 \cdot a$). وتتناظر مسارات الأيونات بالنسبة إلى العمود المنصف للقطعة $\overline{QA}$.



² ملاحظة: لم يكن هذا الشكل التوضيحي جزءاً من الصياغة الأصلية للمسألة.

من بين الأشكال المختلفة الممكنة لحدود المجالات المغناطيسية، سندرس نوعاً محدداً يشغل فيه المجال المغناطيسي منطقة متصلة حول العمود المنصف، وتقع فيه النقطتان Q و A في المنطقة الخالية من المجال.

(a) عبّر عن نصف قطر انحناء R مسار الجسيم في المجال المغناطيسي بدلالة الجهد U والحث المغناطيسي B .

(b) صِف الخصائص المميزة لمسارات الجسيمات في الترتيب المذكور أعلاه.

(c) أوجد حدود المجال المغناطيسي بإنشاءات هندسية للحالات $R < a$ و $R = a$ و $R > 0$.

(d) بيّن المعادلة العامة لحدود المجال المغناطيسي.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اتخذ منتصف QA مبدأً للإحداثيات، بحيث تكون $Q = (-a, 0)$ و $A = (a, 0)$ ، وتكون الحزمة المرسومة فوق محور x .

(a) •

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

(b) • يتكون كل مسار من قطعة مستقيمة واردة، وقوس دائري نصف قطره R ، وقطعة مستقيمة خارجة. يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة QA . إذا كان الاتجاه الابتدائي يصنع زاوية θ مع QA ، فإن زاوية الانحراف المغناطيسي هي 2θ ، وطول كل قطعة مستقيمة هو

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

(c) • أنشئ مركز الدائرة بتقاطع العمود المنصف مع مستقيم موازٍ للشعاع الوارد، مزاح عنه بمقدار R نحو جهة القوة المغناطيسية. ومسقط المركز العمودي على الشعاع هو نقطة الدخول؛ ويعطي انعكاسها نقطة الخروج.

للأشعة المتجهة إلى الأمام:

الحالة	$\ell > 0$ الزوايا المسموح بها مع
$R < a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R = a$	$0 < \theta < \pi/2$
$R > a$	$0 < \theta < \arcsin(a/R)$

عندما يكون $R < a$ ، يكون لفرعي الحدود الكاملين خطا تقارب رأسيان $x = \pm R$. وعندما يكون $R \geq a$ ، تكون لهما نهايتان حديّتان عند A, Q ؛ وتُبقى فتحة زاوية محدودة هاتين النقطتين خارج المجال تماماً.

• (d) أجزاء الحدود التي تعبرها الحزمة هي

$$x = \pm R \sin \theta, \quad y = (a - R \sin \theta) \tan \theta$$

أو، على نحو مكافئ،

$$y = \frac{|x|(a - |x|)}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 0 \leq |x| < \min(a, R).$$

ومعادلتها الضمنية هي

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2,$$

مع القيود السابقة على الفروع.

الحل

(a) نصف قطر الانحناء

نستخدم التقريب غير النسبي، ونهمل الطاقة الحركية الابتدائية للأيونات قبل التسريع، كما نهمل التأثيرات بين الأيونات. يعطي التسريع عبر فرق الجهد U

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

القوة المغناطيسية عمودية على السرعة، ولذلك تغيّر اتجاه الحركة دون أن تغيّر مقدار السرعة. وداخل المجال المنتظم، تؤمّن القوة الجاذبة المركزية:

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

ومن ثم،

$$R = \frac{mv}{eB} = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}.$$

يرمز B هنا إلى مقدار المجال. وعند استخدام وحدات النظام الدولي للمدخلات، يكون R بالأمتار.

(b) هندسة المسارات

نفترض أن حدّ المجال حاد، مع إهمال مجالات الحواف. لتكن O منتصف QA ، ولنختر

$$Q = (-a, 0), \quad A = (a, 0).$$

بالنسبة إلى اتجاه المجال المرسوم، الخارج من مستوى الورقة، تنحني الأيونات الموجبة المتحركة إلى الأعلى في اتجاه عقارب الساعة. لننظر في اتجاه ابتدائي

$$\mathbf{v} = v(\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

لتكن P نقطة الدخول، و P' نقطة الخروج، و C مركز القوس الدائري.

خارج المجال، يكون المسار مستقيماً. وعند الحدّ الحاد، تظل السرعة المتجهة متصلة، ولذلك يلتقي الجزآن المستقيم والدائري مماسياً. يقتضي التناظر حول محور y أن تكون P' صورة P بالانعكاس، وأن يقع مركز الدائرة على ذلك المحور.

بكتابة $QP = \ell$ ،

$$P = (-a + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta).$$

يتجه نصف القطر من P نحو C في اتجاه القوة المغناطيسية:

$$C - P = R(\sin \theta, -\cos \theta).$$

وبما أن $C_x = 0$ ،

$$-a + \ell \cos \theta + R \sin \theta = 0,$$

وبالتالي

$$\ell = \frac{a - R \sin \theta}{\cos \theta}.$$

ينتج عن ذلك أن

$$P = (-R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta),$$

$$P' = (R \sin \theta, (a - R \sin \theta) \tan \theta).$$

والمركز هو

$$C = \left(0, \frac{a \sin \theta - R}{\cos \theta}\right).$$

اتجاه السرعة الخارجة هو $(\cos \theta, -\sin \theta)$. ثم تنقل قطعة مستقيمة طولها ℓ الأيون من P' إلى A ، لأن

$$P' + \ell(\cos \theta, -\sin \theta) = (a, 0).$$

إذن تدور السرعة المتجهة بزاوية 2θ داخل المجال. ويقابل القوس الدائري الزاوية نفسها عند C ، وطول وتره هو

$$PP' = 2R \sin \theta.$$

(c) الإنشاء الهندسي والحالات الثلاث

لاتجاه وارد مختار، يكون الإنشاء كما يلي:

1. ارسم الشعاع المنطلق من Q .
2. ارسم مستقيماً موازياً له على مسافة عمودية R ، في الجهة التي تحني القوة المغناطيسية الأيون نحوها.
3. نقطة تقاطعه مع العمود المنصف للقطعة QA هي C .
4. أسقط عموداً من C على الشعاع الوارد. قدم هذا العمود هي P .
5. اعكس P بالنسبة إلى العمود المنصف للحصول على P' ، وارسم القوس الدائري الذي يصل بينهما في اتجاه عقارب الساعة ونصف قطره R .

بتغيير الاتجاه الوارد، نرسم حدّ الدخول. وبالانعكاس، نرسم حدّ الخروج. يجب أن تقع قدم العمود أمام Q ، ولذلك

$$\ell > 0 \iff R \sin \theta < a.$$

لوصف الأشكال، نضع $s = |x|$.

$$\bullet R < a$$

كل زاوية ورود حادة مسموح بها. ومع ازدياد θ من 0 نحو $\pi/2$ ، يمتد الحدّ من O نحو ارتفاع لا نهائي، مقترباً من

$$x = -R \quad \text{و} \quad x = R$$

على الجانبين. وبما أن $a > R$ ، تقع Q و A خارج هذا الشريط.

بالقرب من O ،

$$y \sim \frac{a}{R}|x|,$$

ولذلك يكون للمحل الهندسي الحدّي الكامل رأس مدبب في أسفله.

ليس من الضروري أن يرتفع الفرعان رتيباً على امتدادهما كله. إذا كان

$$\frac{R}{a} > \sqrt{\frac{27}{32}},$$

فإن لكل فرع قيمة عظمى محلية تليها قيمة صغرى محلية قبل أن يرتفع نحو خط تقاربه. وفيما عدا ذلك، يرتفع رتيباً. وتنتج هذه الخصائص من المشتقة الواردة في الجزء (d).

$$\bullet R = a.$$

يصح الإنشاء لكل زاوية حادة، ويكون

$$y = s \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad 0 \leq s < a.$$

يبدأ كل فرع عند O ، ويرتفع إلى قيمة عظمى، ثم يعود نحو نقطة المصدر أو الصورة المقابلة عندما $\theta \rightarrow \pi/2$.

تتحقق القيمة العظمى عند

$$s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a,$$

بارتفاع

$$y_{\max} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} \approx 0.3003a.$$

المسار الدائري الحدّي هو نصف الدائرة العلوي الذي نصف قطره a ومركزه O ، ونقطتا نهايته A ، Q .

$$\bullet R > a \text{ — وهي على الأرجح الحالة الثالثة المقصودة.}$$

يتطلب الإنشاء

$$0 < \theta < \alpha, \quad \boxed{\alpha = \arcsin(a/R)}.$$

هندسياً، تُستخرج α من مثلث قائم الزاوية وتره R وضلعه المقابل a .

يبدأ كل فرع من الحدود عند O ، ويرتفع إلى قيمة عظمى واحدة، ثم يعود نحو Q أو A عندما $\theta \rightarrow \alpha$. وعند هذه النهاية، يكون $\ell \rightarrow 0$ ، ويكون مركز المسار الدائري

$$C = (0, -\sqrt{R^2 - a^2}).$$

وأعلى نقطة فيه هي

$$y = R - \sqrt{R^2 - a^2}.$$

عندما يكون $R \geq a$ ، فإن استخدام المحل الهندسي الحدّي الكامل يضع A ، Q على حدّ المجال. ولإبقائهما داخل منطقتين خاليتين من المجال تماماً، نختار حزمة تكون زاويتها العظمى أقلّ تماماً من القيمة الحدّية. ونُكمل الجزء غير المستخدم من الحدود حول مساراتها: فمثلاً، نغلق المجال من أعلاها بقوس دائري مُنشأ لزاوية مسموح بها أكبر قليلاً. يكون المجال الناتج متصلاً ويظل منفصلاً عن A ، Q .

لا يحدد شرط التجميع إلا أجزاء الحدود التي تعبرها الحزمة فعلاً.

(d) المعادلة العامة للحدود

من الجزء (b)،

$$s = R \sin \theta, \quad y = (a - s) \tan \theta.$$

بالنسبة إلى فرع الزوايا الحادة،

$$\tan \theta = \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

بحذف θ نحصل على

$$y = f(s) = \frac{s(a - s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad s = |x|, \quad 0 \leq s < \min(a, R).$$

ومن ثم

$$(R^2 - x^2)y^2 = x^2(a - |x|)^2.$$

يحدد التعبير غير المربع ومجال التعريف الحدّ العلوي الفيزيائي. أما التربيع وحده فيسمح بفروع أخرى أيضاً.

واستكمالاً للعرض، يعطي الاشتقاق

$$f'(s) = \frac{s^3 - 2R^2s + aR^2}{(R^2 - s^2)^{3/2}}.$$

إنّ تحقق جميع الارتفاعات التي تنعدم عندها المشتقة، والمذكورة في الجزء (c)، المعادلة

$$s^3 - 2R^2s + aR^2 = 0.$$

عندما يكون $R > a$ ، يكون لهذه المعادلة جذر واحد بالضبط في $0 < s < a$ ، وهو الذي يعطي القيمة العظمى لكل فرع.

يمكننا أيضاً التحقق من أن الحدّ المنشأ يُبقي كل مسار في المنطقة المناسبة. نكتب ارتفاع المركز لإحداثي الدخول s على الصورة

$$c(s) = f(s) - \sqrt{R^2 - s^2} = \frac{as - R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

عندئذ

$$c'(s) = \frac{R^2(a - s)}{(R^2 - s^2)^{3/2}} > 0.$$

يتبع الأيون الذي يدخل عند $s = s_0$ القوس الدائري العلوي

$$y_{\text{arc}}(s) = c(s_0) + \sqrt{R^2 - s^2}, \quad 0 \leq s \leq s_0.$$

عندما يكون $s < s_0$ ، تعطينا رتبة $c(s)$

$$y_{\text{arc}}(s) > c(s) + \sqrt{R^2 - s^2} = f(s).$$

إنّ يقع الجزء الدائري فوق حدّي الدخول والخروج، داخل المجال. وقبل الدخول، يقع المستقيم الوارد تحت الحدّ لأن

$$y_{\text{line}}(s) = (a - s) \tan \theta < (a - s) \frac{s}{\sqrt{R^2 - s^2}} = f(s)$$

عندما يكون $s > s_0$ ضمن مجال تعريف الحدّ. ويثبت الانعكاس النتيجة نفسها بعد الخروج. ومن ثمّ تحقق الحدود التجميع المطلوب.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.