

# IPhO 1974

理论题与解答 · 波兰华沙 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1974/

## 题目 1: 两个氢原子的非弹性碰撞（玻尔模型，多普勒频移）

一个处于基态的氢原子以速度  $v$  运动，与另一个静止的基态氢原子发生碰撞。利用玻尔模型，求原子的临界速度  $v_0$ ，使得低于此速度时，碰撞必定是弹性的。

当速度为  $v_0$  时，碰撞可能是非弹性的，发生碰撞的原子可能发出电磁辐射。估算沿氢原子初速度方向和沿相反方向发出的辐射的频率之差占这两个频率算术平均值的百分比。

已知数据：

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{氢原子的电离能})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{氢原子的质量})$$

( $m$ ——电子质量； $e$ ——电子电荷； $\hbar$ ——普朗克常量；不需要这些量的数值。)

题目译自官方英文原文。

### 答案

原题有两个未编号的问题，未给出各问的分值。

- 第一问——临界速率：

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

- 第二问——频率差：用  $\nu_+$  表示向前辐射的频率， $\nu_-$  表示向后辐射的频率，

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

向前辐射的频率较高。

### 解答

#### 第一问：非弹性碰撞的阈值

在玻尔模型中，氢原子的能级为

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

原子发生激发所需的最小能量对应于一个原子从  $n = 1$  跃迁到  $n = 2$ ，所需能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

能量和动量都必须守恒。特别地，初始动能不能全部转化为激发能，因为原子必须保持初始总动量。

设两原子碰撞后的速度分别为  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$ 。忽略激发时原子质量的微小变化，由动量守恒得

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

因此，它们的末态平动动能可写为

$$K_f = \frac{1}{2} m_H (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4} m_H v^2 + \frac{1}{4} m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

其最小值为

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4} m_H v^2,$$

当两个原子都以速度  $\mathbf{v}/2$  一同运动时，达到这一最小值。

因此，可用于激发的最大能量为

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2} m_H v^2 - \frac{1}{4} m_H v^2 = \frac{1}{4} m_H v^2.$$

所以，激发阈值满足

$$\frac{1}{4} m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4} E_i,$$

由此得

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

采用  $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$ ，这一数值与给定的  $13.6 \text{ eV}$  一致，

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

低于这一速率时，能量不足以使原子发生任何激发，因此在本题所采用的玻尔能级模型内，碰撞是弹性的。

## 第二问：多普勒频率差

在阈值处，原子激发后，两原子之间的相对运动动能为零。因此，受激原子沿初始方向运动，其速率为

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

当它返回基态时，在其静止参考系中的发射频率为

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

这里忽略了发射光子引起的反冲。

由于  $u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$ ，采用一阶多普勒公式即可：

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

因此

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

相除后消去静止参考系中的频率，得到

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

取  $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ，所求百分比为

$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

解答已与官方解答核对。

## 题目 2：折射率沿宽度方向变化的平板

考虑一块厚度为  $d$  的透明平行平板，如图 1 所示。其折射率按下式变化：

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$

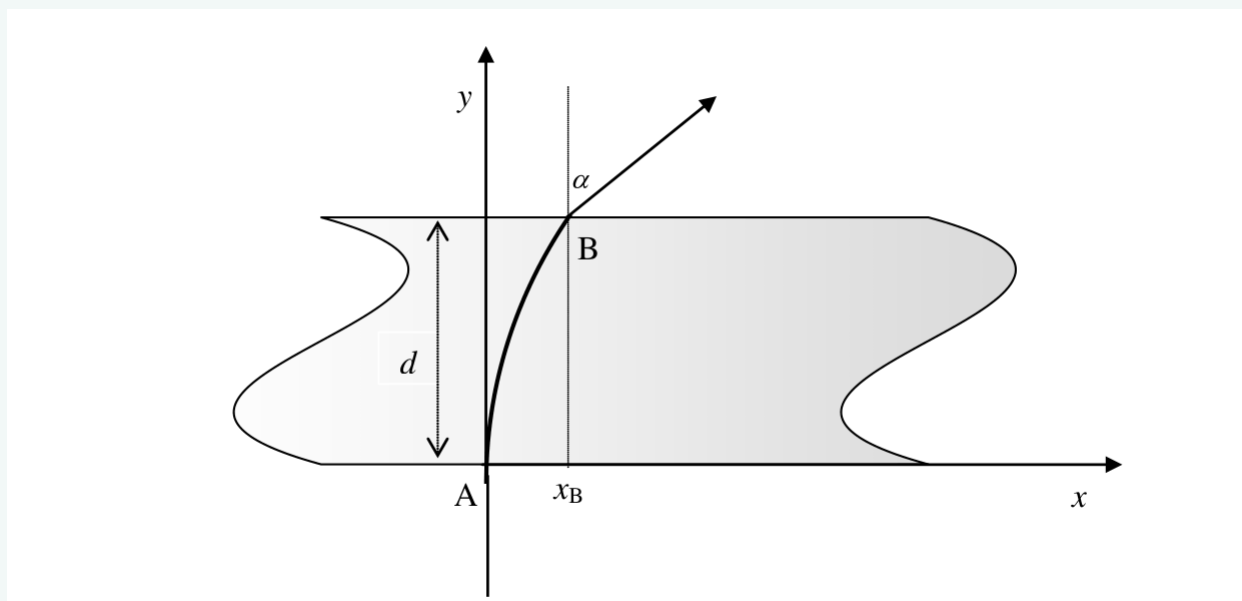


图 1

一束光从空气中在 A 点 ( $x_A = 0$ ) 垂直射入平板，并在 B 点以角度  $\alpha$  射出。

1. 求 B 点的折射率  $n_B$ 。
2. 求  $x_B$  (即 B 点的  $x$  值)。
3. 求平板的厚度  $d$ 。

已知：

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

题目译自官方英文原文。

## 答案

$$\begin{aligned} 1. n_B &= \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3} \text{ (无量纲) 。} \\ 2. x_B &= R \left( 1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}。 \\ 3. d &= \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}。 \end{aligned}$$

## 解答

### 1. B 点的折射率

我们采用几何光学方法，认为折射率在波长尺度上平滑变化，并取空气的折射率为 1。

用  $\beta$  表示平板内光线与  $y$  轴正方向的夹角， $y$  轴垂直于平板表面。光线在 A 点垂直入射，因此  $\beta_A = 0$ 。

为确定光线如何弯曲，设想将平板划分为无穷薄的竖直薄层，每层的折射率均为常量。各层界面的法线沿  $x$  方向，因此光线与该法线的夹角为  $90^\circ - \beta$ 。对相邻各层应用斯涅尔定律，得到

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{常量}。$$

在 A 点， $n = n_0$ ，由此确定该常量，得到

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}。$$

设光线在 B 点的内部入射角为  $\beta_B$ 。于是

$$n_B \cos \beta_B = n_0。$$

在光线射入空气的上表面处应用斯涅尔定律，得到

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha。$$

将这两个方程分别平方后相加，消去  $\beta_B$ ：

$$n_B^2 (\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha。$$

因此

$$\boxed{n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}。$$

代入数值得

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}。$$

### 2. 位置 $x_B$

将给定的折射率分布用于 B 点，有

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R}，$$

得到

$$x_B = R \left( 1 - \frac{n_0}{n_B} \right).$$

代入数值得

$$x_B = 13 \text{ cm} \left( 1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ cm} \left( \frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

### 3. 厚度 $d$

将守恒量与折射率分布结合，得到

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

折射率随  $x$  增大而增大，因此光线向  $x$  轴正方向弯曲。在这一分支上，光线的切线满足

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

从  $x = y = 0$  的 A 点积分至光线上的任意一点，得到

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

因此，光线沿着圆弧

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

传播，其圆心为  $(R, 0)$ ，半径为  $R$ 。所取的圆弧从 A 点出发，在该点的切线竖直，并向右弯曲。

在 B 点， $y = d$ ，所以

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

或者，代入  $x_B$  的表达式，可得等价形式

$$d = R \sqrt{1 - \left( \frac{n_0}{n_B} \right)^2} = \boxed{\frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}}.$$

代入数值得

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

解答已与官方解答核对。

## 题目 3：利用气源和半透膜的发动机

一支科学考察队驻留在一座无人岛上。队员们原本有一些能源，但过了一段时间，这些能源都耗尽了。于是，他们决定构建一种替代能源。不幸的是，岛上的环境十分平静：没有风，云层均匀地覆盖着天空，气压恒定，空气和海水的温度昼夜都相同。幸运的是，他们发现了一处气源，一种化学性质惰性的气体正从一个洞穴中非常缓慢地逸出。这种气体的压强和温度与大气的压强和温度完全相同。

不过，考察队的装备中有一些膜。其中一种能让这种气体完全透过，却完全不让空气透过。另一种具有相反的性质：能让空气完全透过，却完全不让这种气体透过。队员们拥有材料和工具，可以制作各种机械装置，例如带活塞的气缸、阀门等。他们决定利用洞穴中逸出的气体制造一台发动机。

证明：利用上述气体和膜的理想发动机，其功率在理论上没有上限。

题目译自官方英文原文。

## 答案

- **题目 3:** 设  $\dot{n}_g > 0$  为气源气体的摩尔流量， $T_0$  为环境温度， $r$  为每摩尔气体所使用的空气摩尔数。理想的膜式发动机可以输出功率

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 \left[ \ln(1+r) + r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right].$$

由于当  $r \rightarrow \infty$  时， $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ ，因此即使气体流量固定且很小，其功率在理论上也不存在有限的上限。

## 解答

将大气和气源共同的压强记为  $p_0$ ，温度记为  $T_0$ 。采用理想气体近似，忽略摩擦，并允许装置通过与周围环境交换热量而等温运行。可利用的资源是气源气体与大气中的空气最初彼此分离的状态：利用这些膜，可以使两者在混合过程中做机械功。

考虑一次充入的工质，其中包含  $n$  摩尔气源气体和  $rn$  摩尔空气，初始状态均为  $p_0, T_0$ 。它们的体积为

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

其中  $R$  为普适气体常量。

将这些气体置于一个总容积固定为

$$V = V_g + V_a,$$

的气缸中，气源气体在左侧，空气在右侧。起初，两个相邻的膜活塞将它们隔开：

- 左侧的膜允许气源气体透过，但阻挡空气。
- 右侧的膜允许空气透过，但阻挡气源气体。

让左侧的膜向气缸左端移动，右侧的膜向气缸右端移动，各自驱动一个机械负载。两膜之间是混合气体；两膜外侧，左边是纯气源气体，右边是纯空气。最终，两种组分都占据整个气缸。

关键性质是，在可逆运行过程中，能够透过某一膜的组分在该膜两侧的分压相等。因此，对于透空气活塞，空气在其两侧施加的力相互抵消。只有气源气体的分压驱动该活塞。如果气源气体能够占据的体积为  $v_g$ ，则它所做的功为

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

类似地，透气源气体活塞从膨胀的空气中获取功：

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

因此，可逆等温混合过程中得到的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\ &= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\ &= \boxed{nRT_0 \left[ \ln(1+r) + r \ln \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \right]}. \end{aligned}$$

最终，混合气体的总压强为

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

因此，可以将其排出，并在共同压强  $p_0$  下充入新鲜的气源气体和空气。普通活塞和旁通阀可以完成这一更换过程，并使膜复位。由于流入和流出的总体积相等，它们的压强—体积功相互抵消：

$$W_{\text{进气/排气}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

做功后的混合气体被排出，因此发动机不需要再次将其分离。所以， $W$  就是每次充入  $n$  摩尔气源气体所获得的有用功。

对于摩尔流量为  $\dot{n}_g$  的稳定供气，使多个气缸依次或并联运行，可得到理想平均功率

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} W = \dot{n}_g RT_0 \left[ \ln(1+r) + r \ln \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

等价地，如果  $q_g$  是在  $p_0, T_0$  下测得的气源体积流量，则

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[ \ln(1+r) + r \ln \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \right],$$

其中  $p_0 q_g$  的单位为瓦特。

现在增加每摩尔气源气体所使用的空气量。由于

$$\ln(1+r) \longrightarrow \infty, \quad r \ln \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \longrightarrow 1,$$

可得

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 [\ln r + 1 + o(1)] \longrightarrow \infty.$$

因此，即使气体流量任意小、固定且为正，也不会对理论功率施加有限的上限。

这一结论允许装置尺寸、空气处理流量、膜面积和热交换均不受限制。通过使足够多的气缸并联运行，可以在采用缓慢、近乎可逆的活塞行程的同时，处理给定的气体流量。提高功率需要为每摩尔气体使用越来越多的新鲜空气。

最后，这一过程遵守热力学第二定律。对于温度不变的理想气体，混合过程不改变内能，因此吸收的热量等于所做的功：

$$Q = W.$$

气体的熵增为

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

在可逆运行过程中，这恰好补偿了热库的熵减。发动机消耗的是气源气体与空气最初彼此分离的状态。功率发散的前提是可以获取任意多的新鲜空气；有限的储量和有限的设备则构成实际限制。

---

解答已与官方解答核对。