

IPhO 1974

Teorik sorular ve çözümler · Varşova, Polonya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1974/

Soru 1: İki hidrojen atomunun esnek olmayan çarpışması (Bohr modeli, Doppler kayması)

Temel durumda bulunan ve v hızıyla hareket eden bir hidrojen atomu, temel durumda bulunan ve durmakta olan başka bir hidrojen atomuyla çarpışır. Bohr modelini kullanarak, altındaki hızlarda çarpışmanın mutlaka esnek olduğu en küçük v_0 atom hızını bulun.

v_0 hızında çarpışma esnek olmayabilir ve çarpışan atomlar elektromanyetik ışınım yayabilir. Hidrojen atomunun başlangıç hızı yönünde ve buna zıt yönde yayılan ışınımın frekansları arasındaki farkın, bu frekansların aritmetik ortalamasına oranını yüzde olarak tahmin edin.

Veriler:

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{hidrojen atomunun iyonlaşma enerjisi})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{hidrojen atomunun kütlesi})$$

(m - elektronun kütlesi; e - elektronun elektrik yükü; $\hbar$ - Planck sabiti; bu niceliklerin sayısal değerleri gerekli değildir.)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Özgün metinde numaralandırılmamış iki soru vardır ve puan değerleri verilmemiştir.

- **Birinci soru — eşik hızı:**

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

- **İkinci soru — frekans farkı:** ν_+ ileri yönde, ν_- ise geri yönde yayılan ışınımın frekansını göstermek üzere,

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

İleri yönde yayılan ışınımın frekansı daha yüksektir.

Çözüm

Birinci soru: esnek olmayan çarpışma eşiği

Bohr modelinde hidrojenin enerji düzeyleri şöyledir:

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

Mümkün olan en küçük atomik uyarılma, bir atomu $n = 1$ düzeyinden $n = 2$ düzeyine çıkarır ve şu enerjiyi gerektirir:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

Hem enerji hem de momentum korunmalıdır. Özellikle, başlangıçtaki kinetik enerjinin tamamı uyarılma enerjisine dönüşmez; çünkü atomların başlangıçtaki toplam momentumu koruması gerekir.

Atomların çarpışmadan sonraki hızları $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ olsun. Uyarılma sırasında atom kütesinde meydana gelen çok küçük değişimi ihmal edersek, momentumun korunumundan

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

elde edilir. Dolayısıyla atomların son öteleme kinetik enerjisi şöyle yazılabilir:

$$K_f = \frac{1}{2} m_H (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4} m_H v^2 + \frac{1}{4} m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

Bu enerjinin en küçük değeri

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4} m_H v^2,$$

olup her iki atom da $\mathbf{v}/2$ hızıyla birlikte hareket ettiğinde bu değere ulaşılır.

Böylece uyarılma için kullanılabilecek en büyük enerji

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2} m_H v^2 - \frac{1}{4} m_H v^2 = \frac{1}{4} m_H v^2.$$

olur. Dolayısıyla uyarılma eşiği

$$\frac{1}{4} m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4} E_i,$$

eşitliğini sağlar; buradan

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

bulunur.

Verilen 13.6 eV değeriyle tutarlı olan $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$ değerini kullanırsak,

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

Bu hızın altında, enerji bakımından hiçbir atomik uyarılma mümkün değildir; dolayısıyla ele alınan Bohr enerji düzeyleri modeli çerçevesinde çarpışma esnektir.

İkinci soru: Doppler frekans farkı

Eşik hızında, uyarılmadan sonra atomların bağıl kinetik enerjisi yoktur. Bu nedenle uyarılmış atom başlangıç yönünde şu süratle hareket eder:

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Temel duruma döndüğünde, atomun durgun olduğu referans sistemindeki yayım frekansı

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

olur; burada fotonun geri tepmesi ihmal edilmiştir.

$u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$ olduğundan, birinci mertebeden Doppler formülleri yeterlidir:

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Dolayısıyla

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

Oran alındığında atomun durgun olduğu referans sistemindeki frekans sadeleşir:

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

$c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ değeriyle, istenen yüzde şöyledir:

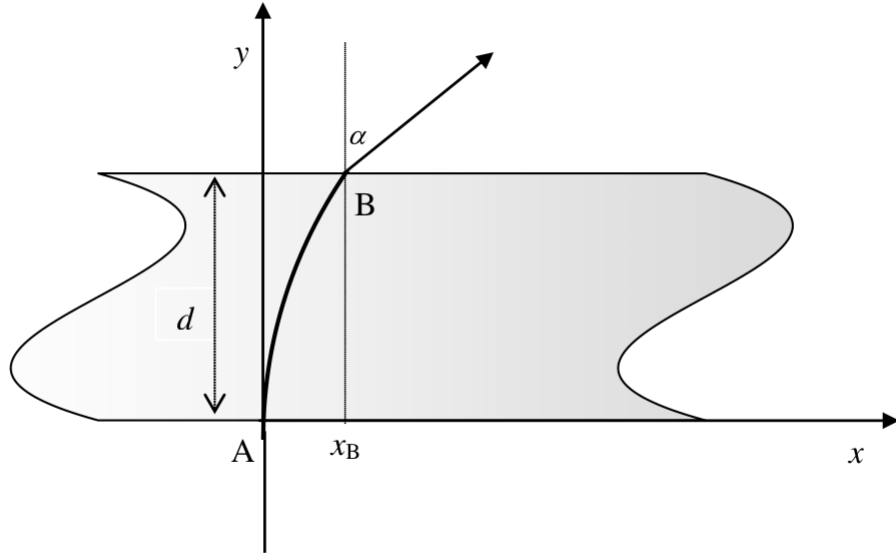
$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Kırılma indisi genişliği boyunca değişen levha

Kalınlığı d olan, yüzeyleri birbirine paralel, saydam bir levhayı ele alalım – Şekil 1. Levhanın kırılma indisi aşağıdaki bağıntıya göre değişmektedir:

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$



Şekil 1

Bir ışık demeti havadan levhaya A noktasında ($x_A = 0$) dik olarak girer ve B noktasında levhadan α açısıyla çıkar.

1. B noktasındaki n_B kırılma indisini bulunuz.
2. x_B 'yi (yani B noktasındaki x değerini) bulunuz.
3. Levhanın d kalınlığını bulunuz.

Veriler:

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. $n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3}$ (boyutsuz).
2. $x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$
3. $d = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$

Çözüm

1. B noktasındaki kırılma indisi

Kırılma indisinin dalga boyu ölçeğinde düzgün biçimde değiştiğini kabul ederek geometrik optiği kullanıyor ve havanın kırılma indisini 1 alıyoruz.

β , levhanın içindeki ışının, levha yüzeylerine dik olan pozitif y ekseniiyle yaptığı açığı göstere. Işının A noktasında dik gelmesi, $\beta_A = 0$ olmasını gerektirir.

Işının nasıl büküldüğünü belirlemek için levhayı, her biri sabit kırılma indisine sahip sonsuz ince düşey katmanlara ayırdığımızı düşünelim. Her bir katman ara yüzeyinin normali x doğrultusundadır; dolayısıyla ışının bu normalle yaptığı açı $90^\circ - \beta$ 'dir. Bu nedenle, ardışık katmanlar arasında Snell yasası şu bağıntıyı verir:

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{sabit}.$$

Bu sabiti, $n = n_0$ olan A noktasında hesapladığımızda şu sonuç elde edilir:

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}.$$

B noktasında levha içindeki gelme açısı β_B olsun. Böylece

$$n_B \cos \beta_B = n_0.$$

Işının havaya çıktığı üst yüzeyde Snell yasası şu bağıntıyı verir:

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha.$$

Bu denklemlerin karelerini alıp toplayarak β_B 'yi eleriz:

$$n_B^2 (\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha.$$

Buradan şu sonuç bulunur:

$$\boxed{n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

Sayısal olarak,

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}.$$

2. x_B konumu

B noktasında verilen indis profilini,

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R},$$

kullanarak şu sonucu elde ederiz:

$$\boxed{x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B} \right)}.$$

Değerleri yerine koyarsak şu sonuç bulunur:

$$x_B = 13 \text{ cm} \left(1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ cm} \left(\frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

3. d kalınlığı

Korunan büyüklüğü indis profiliyle birleştirdiğimizde şu bağıntı elde edilir:

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

Kırılma indisi x ile arttığından ışın pozitif x yönüne doğru bükülür. Bu dal üzerinde ışının teğeti şu bağıntıyı sağlar:

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

$x = y = 0$ olan A noktasından ışın üzerindeki herhangi bir noktaya kadar integral alırsak,

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Sonuç olarak ışın,

$$\boxed{(x - R)^2 + y^2 = R^2},$$

denklemleriyle verilen, merkezi $(R, 0)$ ve yarıçapı R olan çember yayını izler. İlgili yay, A noktasında düşey bir teğetle başlar ve sağa doğru bükülür.

B noktasında $y = d$ olduğundan

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

Eşdeğer olarak, x_B ifadesini yerine koyarsak,

$$d = R\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2} = \boxed{\frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}}.$$

Sayısal olarak,

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Bir gaz kaynağı ve yarı geçirgen zarlar kullanan motor

Bir bilimsel keşif ekibi, üzerinde insan yaşamayan bir adada konaklıyordu. Ekip üyelerinin bazı enerji kaynakları vardı, ancak bir süre sonra bu kaynaklar tükendi. Bunun üzerine alternatif bir enerji kaynağı oluşturmaya karar verdiler. Ne yazık ki adada hava çok durgundu: rüzgâr esmiyor, bulutlar gökyüzünü düzgün biçimde kaplıyor, hava basıncı sabit kalıyor ve havanın ve deniz suyunun sıcaklıkları gece gündüz aynı oluyordu. Neyse ki bir oyuktan çok yavaş çıkan, kimyasal olarak tepkimeye girmeyen bir gaz kaynağı buldular. Gazın basıncı ve sıcaklığı, atmosferin basıncı ve sıcaklığıyla tam olarak aynıdır.

Ancak keşif ekibinin donanımında bazı zarlar vardı. Bunlardan biri gazı kusursuz biçimde geçiriyor, havayı ise hiç geçirmiyordu. Bir diğeri bunun tam tersi özelliğe sahipti: havayı kusursuz biçimde geçiriyor, gazı ise hiç geçirmiyordu. Ekip üyelerinin elinde pistonlu silindirler, vanalar vb. çeşitli mekanik düzenekler yapmalarını sağlayacak malzemeler ve aletler vardı. Oyuktan çıkan gazı kullanarak bir motor yapmaya karar verdiler.

Yukarıda ele alınan gazı ve zarları kullanan ideal bir motorun gücünün teorik bir sınırı olmadığını gösteriniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 3:** Kaynak gazının molar debisi $\dot{n}_g > 0$, ortam sıcaklığı T_0 ve bir mol gaz başına kullanılan havanın mol sayısı r olsun. İdeal bir zar motoru

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right].$$

gücünü üretebilir. $r \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ olduğundan, gaz debisi sabit ve küçük olsa bile **gücünün sonlu bir teorik üst sınırı yoktur.**

Çözüm

Atmosferin ve kaynağın ortak basıncını p_0 , sıcaklıklarını ise T_0 ile gösterelim. İdeal gaz yaklaşımını kullanalım, sürtünmeyi ihmal edelim ve çevreyle ısı alışverişi yoluyla izotermal çalışmaya izin verelim. Kullanılabilir kaynak, kaynak gazı ile atmosfer havasının başlangıçta birbirinden ayrı olmasıdır: zarlar, bunların karışmasının mekanik iş üretmesini sağlar.

Başlangıçta p_0, T_0 koşullarında bulunan n mol kaynak gazı ve rn mol havadan oluşan bir dolumu ele alalım. Bunların hacimleri

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

olup burada R evrensel gaz sabitidir.

Bu gazları, kaynak gazı solda ve hava sağda olacak şekilde, toplam hacmi sabit ve

$$V = V_g + V_a,$$

olan bir silindire yerleştirelim. Başlangıçta, yan yana duran iki zar piston bunları birbirinden ayırır:

- Soldaki zar kaynak gazını geçirir, ancak havayı geçirmez.
- Sağdaki zar havayı geçirir, ancak kaynak gazını geçirmez.

Her biri mekanik bir yükü hareket ettirecek şekilde, soldaki zarın sol uca, sağdaki zarın ise sağ uca doğru hareket etmesine izin verelim. Zarların arasında bir karışım bulunur; zarların dışında ise solda saf kaynak gazı, sağda saf hava vardır. Sonunda her iki bileşen de silindirin tamamını kaplar.

Temel özellik, tersinir çalışma sırasında **zardan geçebilen bir bileşenin, zarının iki tarafındaki kısmi basınçlarının eşit olmasıdır**. Dolayısıyla, havayı geçiren pistonun iki tarafında havadan kaynaklanan kuvvetler birbirini dengeler. Bu pistonu yalnızca kaynak gazının kısmi basıncı hareket ettirir. Kaynak gazının erişebildiği hacim v_g ise yaptığı iş

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

olur. Benzer şekilde, gazı geçiren piston genleşen havadan iş elde eder:

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

Buna göre, tersinir izotermal karışma sırasında elde edilen toplam iş

$$\begin{aligned}
W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\
&= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\
&= \boxed{nRT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]}.
\end{aligned}$$

olur.

Son durumda karışımın toplam basıncı

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

olur. Bu nedenle karışım dışarı atılabilir ve yerine ortak p_0 basıncında taze gaz ve hava alınabilir. Sıradan pistonlar ve baypas vanaları bu değişimi gerçekleştirebilir ve zarları başlangıç konumlarına döndürebilir. İçeri giren ve dışarı çıkan toplam hacimler eşit olduğundan, bunların basınç-hacim işleri birbirini götürür:

$$W_{\text{emme/egzoz}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

Kullanılmış karışım dışarı atıldığı için motorun onu yeniden ayırması gerekmez. Böylece W , n mol kaynak gazı içeren her dolum başına elde edilen yararlı iştir.

$\dot{n}_g$ sabit gaz debisi için, silindirlerin art arda veya paralel olarak çalıştırılması ideal ortalama gücü verir:

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} W = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

Eşdeğer olarak, q_g kaynağın p_0, T_0 koşullarında ölçülen hacimsel debisi ise

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right],$$

olur; burada $p_0 q_g$ watt cinsinden ölçülür.

Şimdi bir mol kaynak gazı başına kullanılan hava miktarını artıralım.

$$\ln(1+r) \longrightarrow \infty, \quad r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \longrightarrow 1,$$

olduğundan,

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 [\ln r + 1 + o(1)] \longrightarrow \infty.$$

sonucunu elde ederiz. Dolayısıyla, istenildiği kadar küçük, sabit ve pozitif bir gaz debisi bile sonlu bir teorik güç üst sınırı getirmez.

Bu sonuç, düzenek boyutunun, hava debisinin, zar alanının ve ısı alışverişinin sınırsız olmasına izin verir. Belirlenen gaz debisini işleyebilmek için yeterince çok sayıda paralel silindirde yavaş, tersinire yakın piston hareketleri gerçekleştirilebilir. Gücü artırmak, bir mol gaz başına giderek daha büyük miktarda taze hava gerektirir.

Son olarak, bu durum ikinci yasayla uyumludur. Sıcaklığı değişmeyen ideal gazlarda karışma süreci iç enerjiyi değiştirmez; dolayısıyla alınan ısı yapılan işe eşittir:

$$Q = W.$$

Gazların entropi artışı

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

olup bu artış, tersinir çalışma sırasında ısı deposunun entropi azalmasını dengeler. Motor, gaz ile havanın başlangıçtaki ayrılığını tüketir. Gücün sonsuza gitmesi, istenildiği kadar çok taze havaya erişilebildiğini varsayar; sonlu depolar ve sonlu donanım pratik sınırlar getirir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.