

IPhO 1974

Теоретические задачи и решения · Варшава, Польша · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1974/

Задача 1: Неупругое столкновение двух атомов водорода (модель Бора, доплеровский сдвиг)

Атом водорода в основном состоянии, движущийся со скоростью v , сталкивается с другим атомом водорода в основном состоянии, находящимся в покое. Используя модель Бора, найдите наименьшую скорость v_0 атома, ниже которой столкновение обязательно будет упругим.

При скорости v_0 столкновение может быть неупругим, и сталкивающиеся атомы могут испускать электромагнитное излучение. Оцените разность частот излучения, испускаемого в направлении начальной скорости атома водорода и в противоположном направлении, как долю (выраженную в процентах) их среднего арифметического значения.

Данные:

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{энергия ионизации атома водорода})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{масса атома водорода})$$

(m — масса электрона; e — электрический заряд электрона; $\hbar$ — постоянная Планка; численные значения этих величин не требуются.)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В оригинале приведены два вопроса без нумерации, и количество баллов не указано.

- **Первый вопрос — пороговая скорость:**

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

- **Второй вопрос — разность частот:** Обозначим через ν_+ частоту излучения вперёд, а через ν_- — частоту излучения назад. Тогда

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

Излучение, испускаемое вперёд, имеет более высокую частоту.

Решение

Первый вопрос: порог неупругого столкновения

В модели Бора уровни энергии атома водорода имеют вид

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

Наименьшее возможное возбуждение атома соответствует переходу одного атома с уровня $n = 1$ на уровень $n = 2$, для чего требуется энергия

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

Должны сохраняться как энергия, так и импульс. В частности, вся начальная кинетическая энергия не может перейти в энергию возбуждения, поскольку суммарный импульс атомов должен остаться равным начальному.

Пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости атомов после столкновения. Пренебрегая ничтожно малым изменением массы атома при возбуждении, из закона сохранения импульса получаем

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

Поэтому их конечную кинетическую энергию поступательного движения можно записать в виде

$$K_f = \frac{1}{2} m_H (v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4} m_H v^2 + \frac{1}{4} m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

Её минимальное значение равно

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4} m_H v^2,$$

и достигается, когда оба атома движутся вместе со скоростью $\mathbf{v}/2$.

Таким образом, максимальная энергия, которая может быть затрачена на возбуждение, равна

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2} m_H v^2 - \frac{1}{4} m_H v^2 = \frac{1}{4} m_H v^2.$$

Следовательно, порог возбуждения определяется условием

$$\frac{1}{4} m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4} E_i,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

Используя значение $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$, согласующееся с данным значением 13.6 eV, получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

При скоростях ниже этой возбуждение атомов энергетически невозможно, поэтому в рамках рассматриваемой модели с боровскими уровнями энергии столкновение является упругим.

Второй вопрос: доплеровская разность частот

На пороге возбуждения кинетическая энергия относительного движения атомов после возбуждения равна нулю. Поэтому возбуждённый атом движется в первоначальном направлении со скоростью

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

При возвращении атома в основное состояние частота испускаемого излучения в системе отсчёта покоя атома равна

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

если пренебречь отдачей при испускании фотона.

Поскольку $u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$, достаточно формул эффекта Доплера в первом приближении:

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Отсюда

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

При делении частота излучения в системе отсчёта покоя атома сокращается:

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

При $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ искомая величина в процентах составляет

$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Пластинка с показателем преломления, изменяющимся по её ширине

Рассмотрим плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной d — рис. 1. Её показатель преломления изменяется по закону

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$

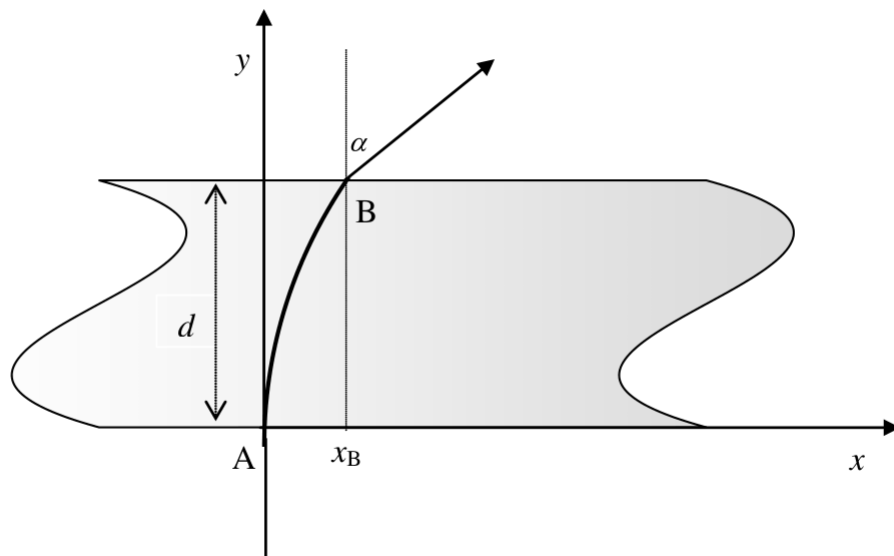


Рис. 1

Световой луч входит из воздуха перпендикулярно поверхности пластинки в точке A ($x_A = 0$) и выходит из неё в точке B под углом α .

1. Найдите показатель преломления n_B в точке B.
2. Найдите x_B (то есть значение x в точке B)
3. Найдите толщину d пластинки.

Дано:

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

$$1. n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3} \text{ (безразмерная величина).}$$

$$2. x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

$$3. d = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Решение

1. Показатель преломления в точке B

Используем геометрическую оптику, считая, что показатель преломления плавно меняется на масштабе длины волны, и примем показатель преломления воздуха равным 1.

Обозначим через β угол, который луч внутри пластинки образует с положительным направлением оси y , перпендикулярной поверхностям пластинки. При нормальном падении в точке А имеем $\beta_A = 0$.

Чтобы определить, как искривляется луч, мысленно разделим пластинку на бесконечно тонкие вертикальные слои с постоянным показателем преломления. Нормаль к каждой границе раздела слоёв направлена вдоль оси x , поэтому угол между лучом и этой нормалью равен $90^\circ - \beta$.

Следовательно, закон Снеллиуса для последовательных слоёв даёт

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{постоянная}.$$

Вычисляя эту постоянную в точке А, где $n = n_0$, получаем

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}.$$

Обозначим угол падения изнутри пластинки в точке В через β_B . Тогда

$$n_B \cos \beta_B = n_0.$$

Закон Снеллиуса на верхней поверхности, где луч выходит в воздух, даёт

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha.$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая их, исключаем β_B :

$$n_B^2 (\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha.$$

Отсюда

$$\boxed{n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

Численно:

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}.$$

2. Координата x_B

Используя заданную зависимость показателя преломления от координаты в точке В,

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R},$$

получаем

$$\boxed{x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B} \right)}.$$

Подстановка даёт

$$x_B = 13 \text{ см} \left(1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ см} \left(\frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ см}}.$$

3. Толщина d

Совмещая выражение для сохраняющейся величины с зависимостью показателя преломления от координаты, получаем

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

Показатель преломления возрастает с увеличением x , поэтому луч искривляется в сторону положительного направления оси x . На этой ветви наклон касательной к траектории луча удовлетворяет соотношению

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

Интегрируя от точки А, где $x = y = 0$, до произвольной точки на луче, получаем

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Следовательно, луч идёт по дуге окружности

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

с центром $(R, 0)$ и радиусом R . Рассматриваемая дуга начинается в точке А с вертикальной касательной и изгибается вправо.

В точке В $y = d$, поэтому

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

Подставляя выражение для x_B , получаем эквивалентную запись:

$$d = R \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2} = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

Численно:

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Двигатель, использующий источник газа и полупроницаемые мембраны

На необитаемом острове находилась научная экспедиция. У участников экспедиции были некоторые источники энергии, но через некоторое время они иссякли. Тогда участники решили создать альтернативный источник энергии. К сожалению, на острове царил полный затишье: ветра не было, облака равномерно покрывали небо, атмосферное давление было постоянным, а температуры воздуха и морской воды были одинаковыми и днём, и ночью. К счастью, они обнаружили источник химически нейтрального газа, очень медленно выходившего из полости. Давление и температура газа в точности совпадают с давлением и температурой атмосферы.

Однако в снаряжении экспедиции имелись специальные мембраны. Одна из них была идеально проницаема для газа и совершенно непроницаема для воздуха. Другая обладала противоположным свойством: она была идеально проницаема для воздуха и совершенно

непроницаема для газа. У участников экспедиции были материалы и инструменты, позволявшие изготавливать различные механические устройства, такие как цилиндры с поршнями, клапаны и т. д. Они решили построить двигатель, использующий газ из полости.

Покажите, что мощность идеального двигателя, использующего описанные выше газ и мембраны, теоретически не ограничена.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 3:** Пусть $\dot{n}_g > 0$ — молярный расход газа из источника, T_0 — температура окружающей среды, а r — число молей воздуха, используемых на один моль газа. Идеальный мембранный двигатель может развивать мощность

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 \left[\ln(1 + r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

Поскольку $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, **конечной теоретической верхней границы его мощности не существует**, даже при фиксированном малом расходе газа.

Решение

Обозначим общее давление атмосферы и газа из источника через p_0 , а их температуру — через T_0 . Воспользуемся приближением идеального газа, пренебрежём трением и допустим изотермическую работу за счёт теплообмена с окружающей средой. Доступный ресурс — исходное разделённое состояние газа из источника и атмосферного воздуха: мембраны позволяют получать механическую работу при их смешении.

Рассмотрим порцию, состоящую из n молей газа из источника и rn молей воздуха, первоначально находящихся при p_0, T_0 . Их объёмы равны

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Поместим эти газы в цилиндр постоянного общего объёма

$$V = V_g + V_a,$$

так, чтобы газ из источника находился слева, а воздух — справа. Первоначально их разделяют два расположенных вплотную друг к другу мембранных поршня:

- Левая мембрана пропускает газ из источника, но не пропускает воздух.
- Правая мембрана пропускает воздух, но не пропускает газ из источника.

Позволим левой мембране двигаться к левому торцу, а правой — к правому, причём каждая из них совершает работу над механической нагрузкой. Между мембранами находится смесь; вне этого промежутка слева находится чистый газ из источника, а справа — чистый воздух. В конечном итоге оба компонента занимают весь цилиндр.

Ключевое свойство заключается в том, что при обратимой работе **парциальные давления компонента, проникающего через мембрану, одинаковы по обе её стороны**. Поэтому силы, обусловленные давлением воздуха по обе стороны поршня, проницаемого для воздуха, взаимно компенсируются. Этот поршень движется только под действием парциального давления газа из источника. Если объём, доступный газу из источника, равен v_g , то совершаемая им работа равна

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

Аналогично поршень, проницаемый для газа, позволяет получать работу при расширении воздуха:

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

Следовательно, полная работа, полученная при обратимом изотермическом смешении, равна

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\ &= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\ &= \boxed{nRT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]}. \end{aligned}$$

В конце процесса полное давление смеси равно

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

Поэтому смесь можно выпустить и заменить свежим газом и воздухом при общем давлении p_0 . Обычные поршни и перепускные клапаны позволяют осуществить эту замену и вернуть мембраны в исходное положение. Поскольку полные объёмы поступающих и выходящих газов равны, работы сил давления при впуске и выпуске взаимно компенсируются:

$$W_{\text{впуск/выпуск}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

Отработанная смесь выбрасывается, поэтому двигателю не требуется вновь разделять её. Таким образом, W — полезная работа, получаемая от одной порции, содержащей n молей газа из источника.

При постоянной подаче газа с молярным расходом $\dot{n}_g$ использование цилиндров, работающих последовательно или параллельно, даёт идеальную среднюю мощность

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} W = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

Эквивалентно, если q_g — объёмный расход газа из источника, измеренный при p_0, T_0 , то

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right],$$

где $p_0 q_g$ измеряется в ваттах.

Теперь увеличим количество воздуха, используемого на один моль газа из источника. Поскольку

$$\ln(1+r) \rightarrow \infty, \quad r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \rightarrow 1,$$

получаем

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 [\ln r + 1 + o(1)] \rightarrow \infty.$$

Следовательно, даже сколь угодно малый, фиксированный положительный расход газа не накладывает конечного теоретического ограничения на мощность.

Этот вывод допускает неограниченные размеры установки, расход воздуха, площадь мембран и теплообмен. Медленные, почти обратимые рабочие ходы можно осуществлять в достаточно большом числе параллельно работающих цилиндров, чтобы использовать заданный поток газа. Для увеличения мощности требуется всё большее количество свежего воздуха на один моль газа.

Наконец, это не противоречит второму началу термодинамики. Для идеальных газов при неизменной температуре процесс смешения не изменяет внутреннюю энергию, поэтому поглощённая теплота равна работе:

$$Q = W.$$

Увеличение энтропии газов равно

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

что при обратимой работе компенсирует уменьшение энтропии теплового резервуара.

Двигатель использует исходную разделённость газа и воздуха. Неограниченный рост мощности предполагает доступ к сколь угодно большому количеству свежего воздуха; конечные резервуары и конечные размеры оборудования накладывают практические ограничения.

Решение проверено по официальному решению.