

IPhO 1974

Problemas teóricos y soluciones · Varsovia, Polonia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1974/

Problema 1: Colisión inelástica de dos átomos de hidrógeno (modelo de Bohr, desplazamiento Doppler)

Un átomo de hidrógeno en el estado fundamental, que se mueve con velocidad v , choca con otro átomo de hidrógeno en el estado fundamental que se encuentra en reposo. Utilizando el modelo de Bohr, halle la velocidad mínima v_0 del átomo por debajo de la cual la colisión debe ser elástica.

A la velocidad v_0 , la colisión puede ser inelástica y los átomos que chocan pueden emitir radiación electromagnética. Estime la diferencia entre las frecuencias de la radiación emitida en el sentido de la velocidad inicial del átomo de hidrógeno y en el sentido opuesto como fracción (expresada en porcentaje) de su media aritmética.

Datos:

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{energía de ionización del átomo de hidrógeno})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{masa del átomo de hidrógeno})$$

(m - masa del electrón; e - carga eléctrica del electrón; $\hbar$ - constante de Planck; no son necesarios los valores numéricos de estas magnitudes.)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

El original contiene dos preguntas sin numerar y no indica puntuaciones.

- **Primera pregunta — rapidez umbral:**

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

- **Segunda pregunta — diferencia de frecuencias:** Si ν_+ denota la radiación emitida hacia delante y ν_- la emitida hacia atrás,

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

La radiación emitida hacia delante tiene la frecuencia más alta.

Solución

Primera pregunta: umbral para una colisión inelástica

En el modelo de Bohr, los niveles de energía del hidrógeno son

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

La excitación atómica mínima posible lleva un átomo de $n = 1$ a $n = 2$, lo que requiere

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

Deben conservarse tanto la energía como la cantidad de movimiento. En particular, no toda la energía cinética inicial puede convertirse en energía de excitación, porque los átomos deben conservar la cantidad de movimiento total inicial.

Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ sus velocidades después de la colisión. Despreciando el diminuto cambio de masa atómica debido a la excitación, la conservación de la cantidad de movimiento da

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

Por tanto, su energía cinética de traslación final puede escribirse como

$$K_f = \frac{1}{2}m_H(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4}m_H v^2 + \frac{1}{4}m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

Su valor mínimo es

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4}m_H v^2,$$

que se alcanza cuando ambos átomos se mueven juntos con velocidad $\mathbf{v}/2$.

Así, la energía máxima disponible para la excitación es

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2}m_H v^2 - \frac{1}{4}m_H v^2 = \frac{1}{4}m_H v^2.$$

En consecuencia, el umbral de excitación satisface

$$\frac{1}{4}m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4}E_i,$$

por lo que

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

Utilizando $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$, coherente con el valor dado de 13.6 eV,

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

Por debajo de esta rapidez, ninguna excitación atómica es energéticamente posible, de modo que la colisión es elástica dentro del modelo de niveles de Bohr considerado.

Segunda pregunta: diferencia de frecuencias por efecto Doppler

En el umbral, los átomos no tienen energía cinética relativa después de la excitación. Por tanto, el átomo excitado se mueve en la dirección y el sentido iniciales con rapidez

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Cuando vuelve al estado fundamental, su frecuencia de emisión en su sistema de referencia en reposo es

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

despreciando el retroceso debido al fotón.

Puesto que $u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$, bastan las fórmulas del efecto Doppler de primer orden:

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Por tanto,

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

Al dividir, se elimina la frecuencia en el sistema de referencia en reposo:

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

Con $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, el porcentaje solicitado es

$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Lámina con un índice de refracción que varía a lo ancho

Considérese una lámina transparente de caras paralelas y espesor d , representada en la Fig. 1. Su índice de refracción varía según

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$

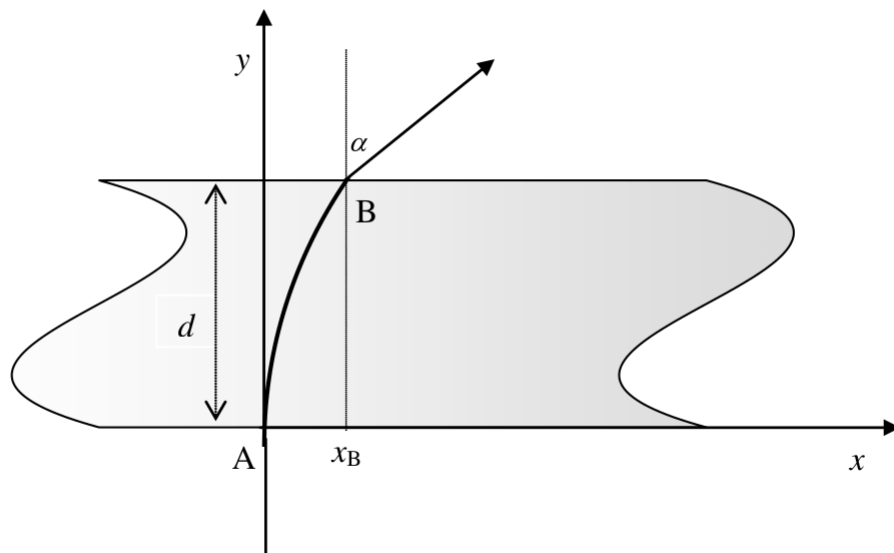


Fig. 1

Un haz de luz procedente del aire incide perpendicularmente sobre la lámina en el punto A ($x_A = 0$) y sale de ella por el punto B formando un ángulo α .

1. Halle el índice de refracción n_B en el punto B.
2. Halle x_B (es decir, el valor de x en el punto B)
3. Halle el espesor d de la lámina.

Datos:

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

$$1. n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3} \text{ (adimensional).}$$

$$2. x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

$$3. d = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Solución

1. Índice de refracción en B

Empleamos la óptica geométrica, considerando que el índice de refracción varía suavemente a la escala de la longitud de onda, y tomamos el índice de refracción del aire igual a 1.

Sea β el ángulo que forma el rayo dentro de la lámina con el semieje positivo y , que es normal a las superficies de la lámina. La incidencia normal en A implica $\beta_A = 0$.

Para determinar cómo se curva el rayo, imaginemos que dividimos la lámina en capas verticales infinitesimalmente delgadas de índice de refracción constante. La normal a la interfaz entre dos capas está orientada según x , por lo que el ángulo del rayo con dicha normal es $90^\circ - \beta$. Por tanto, la ley de Snell aplicada entre capas sucesivas da

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{constante}.$$

Al evaluar esta constante en A, donde $n = n_0$, se obtiene

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}.$$

Sea β_B el ángulo de incidencia interno en B. Entonces

$$n_B \cos \beta_B = n_0.$$

La ley de Snell en la superficie superior, por la que el rayo sale al aire, da

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha.$$

Al elevar al cuadrado y sumar estas ecuaciones, se elimina β_B :

$$n_B^2(\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha.$$

Por tanto,

$$n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}.$$

Numéricamente,

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}.$$

2. Posición x_B

Utilizando el perfil del índice dado en B,

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R},$$

obtenemos

$$x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B} \right).$$

Al sustituir los valores, resulta

$$x_B = 13 \text{ cm} \left(1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ cm} \left(\frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

3. Espesor d

Al combinar la magnitud conservada con el perfil del índice, se obtiene

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

El índice de refracción aumenta con x , por lo que el rayo se curva hacia valores positivos de x . En esta rama, su tangente satisface

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

Integrando desde A, donde $x = y = 0$, hasta un punto arbitrario del rayo,

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

En consecuencia, el rayo sigue el arco de circunferencia

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

de centro $(R, 0)$ y radio R . El arco pertinente parte de A con una tangente vertical y se curva hacia la derecha.

En B, $y = d$, por lo que

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

De forma equivalente, sustituyendo la expresión de x_B ,

$$d = R \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B} \right)^2} = \boxed{\frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}}.$$

Numéricamente,

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Motor que utiliza una fuente de gas y membranas semipermeables

Una expedición científica permaneció en una isla deshabitada. Los miembros de la expedición habían contado con algunas fuentes de energía, pero al cabo de un tiempo estas se agotaron. Entonces decidieron construir una fuente de energía alternativa. Por desgracia, en la isla reinaba una gran calma: no había viento, las nubes cubrían uniformemente el cielo, la presión atmosférica era constante y las temperaturas del aire y del agua del mar eran las mismas de día y de noche. Afortunadamente, encontraron una fuente de gas químicamente neutro que salía muy lentamente de una cavidad. La presión y la temperatura del gas son exactamente iguales a la presión y la temperatura de la atmósfera.

Sin embargo, la expedición disponía de ciertas membranas entre su equipo. Una de ellas era perfectamente permeable al gas y perfectamente impermeable al aire. Otra tenía la propiedad opuesta: era perfectamente permeable al aire y perfectamente impermeable al gas. Los miembros de la expedición disponían de materiales y herramientas que les permitían fabricar distintos dispositivos mecánicos, como cilindros con pistones, válvulas, etc. Decidieron construir un motor utilizando el gas de la cavidad.

Demuestre que no existe ningún límite teórico para la potencia de un motor ideal que utilice el gas y las membranas descritos anteriormente.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 3:** Sean $\dot{n}_g > 0$ el caudal molar del gas de la fuente, T_0 la temperatura ambiente y r el número de moles de aire utilizados por mol de gas. Un motor ideal de membranas puede suministrar

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 \left[\ln(1 + r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

Como $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$, **no existe ninguna cota superior teórica finita para su potencia**, incluso con un caudal de gas pequeño y fijo.

Solución

Denotemos por p_0 la presión común de la atmósfera y de la fuente, y por T_0 su temperatura. Utilicemos la aproximación de gas ideal, despreciemos el rozamiento y permitamos un funcionamiento isotérmico mediante el intercambio de calor con el entorno. El recurso disponible es el estado inicialmente separado del gas de la fuente y del aire atmosférico: las membranas permiten que su mezcla produzca trabajo mecánico.

Consideremos una carga compuesta por n moles de gas de la fuente y rn moles de aire, inicialmente a p_0, T_0 . Sus volúmenes son

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

donde R es la constante universal de los gases.

Coloquemos estos gases en un cilindro de volumen total fijo

$$V = V_g + V_a,$$

con el gas de la fuente a la izquierda y el aire a la derecha. Inicialmente, dos pistones de membrana adyacentes los separan:

- La membrana izquierda deja pasar el gas de la fuente, pero bloquea el aire.
- La membrana derecha deja pasar el aire, pero bloquea el gas de la fuente.

Permitamos que la membrana izquierda se desplace hacia el extremo izquierdo y la membrana derecha hacia el extremo derecho, accionando cada una una carga mecánica. Entre las membranas hay una mezcla; fuera de ellas hay gas puro de la fuente a la izquierda y aire puro a la derecha. Finalmente, ambos componentes ocupan todo el cilindro.

La propiedad esencial es que **un componente que atraviesa una membrana tiene la misma presión parcial a ambos lados de ella** durante un funcionamiento reversible. Por tanto, las fuerzas debidas al aire a ambos lados del pistón permeable al aire se anulan. Solo la presión parcial del gas de la fuente impulsa ese pistón. Si el volumen accesible al gas de la fuente es v_g , su trabajo es

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

Del mismo modo, el pistón permeable al gas extrae trabajo del aire que se expande:

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

En consecuencia, el trabajo total obtenido en la mezcla isotérmica reversible es

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\ &= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\ &= nRT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Al final, la mezcla tiene una presión total

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

Por tanto, puede expulsarse y sustituirse por gas y aire nuevos a la presión común p_0 . Unos pistones convencionales y unas válvulas de derivación pueden efectuar este intercambio y devolver las membranas a su posición inicial. Como los volúmenes totales de entrada y salida son iguales, sus trabajos de presión-volumen se anulan:

$$W_{\text{admisión/escape}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

La mezcla utilizada se descarga, por lo que el motor no necesita volver a separarla. Así, $\bar{W}$ es el trabajo útil por carga de n moles de gas de la fuente.

Para un suministro constante de gas $\dot{n}_g$, el funcionamiento de cilindros sucesivos o en paralelo proporciona la potencia media ideal

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} \bar{W} = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right].$$

De manera equivalente, si q_g es el caudal volumétrico de la fuente medido a p_0, T_0 , entonces

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[\ln(1+r) + r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right],$$

con $p_0 q_g$ medido en vatios.

Aumentemos ahora la cantidad de aire utilizada por mol de gas de la fuente. Como

$$\ln(1+r) \longrightarrow \infty, \quad r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \longrightarrow 1,$$

obtenemos

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 [\ln r + 1 + o(1)] \longrightarrow \infty.$$

Por tanto, incluso un caudal de gas positivo, fijo y arbitrariamente pequeño no impone ningún límite superior teórico finito a la potencia.

Esta conclusión supone que no hay restricciones en el tamaño del aparato, el caudal de aire, el área de las membranas ni el intercambio de calor. Las carreras lentas y casi reversibles de los pistones pueden realizarse en un número suficientemente grande de cilindros en paralelo para procesar el caudal de gas prescrito. Aumentar la potencia requiere una cantidad cada vez mayor de aire nuevo por mol de gas.

Por último, esto respeta el segundo principio de la termodinámica. Para gases ideales a temperatura constante, el proceso de mezcla no modifica la energía interna, por lo que el calor absorbido es igual al trabajo:

$$Q = W.$$

El aumento de entropía de los gases es

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

lo que compensa la disminución de entropía del foco térmico durante el funcionamiento reversible. El motor consume la separación inicial entre el gas y el aire. La divergencia supone acceso a una cantidad arbitrariamente grande de aire nuevo; los depósitos finitos y los equipos de tamaño finito imponen límites prácticos.

La solución se comprobó con la solución oficial.