

IPhO 1974

Theorieaufgaben und Lösungen · Warschau, Polen · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1974/

Aufgabe 1: Unelastischer Stoß zweier Wasserstoffatome (Bohrsches Modell, Dopplerverschiebung)

Ein Wasserstoffatom im Grundzustand, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, stößt mit einem anderen, ruhenden Wasserstoffatom im Grundzustand zusammen. Bestimmen Sie mithilfe des Bohrschen Modells die kleinste Geschwindigkeit v_0 des Atoms, unterhalb derer der Stoß elastisch sein muss.

Bei der Geschwindigkeit v_0 kann der Stoß unelastisch sein, und die zusammenstoßenden Atome können elektromagnetische Strahlung aussenden. Schätzen Sie die Differenz der Frequenzen der Strahlung, die in Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Wasserstoffatoms und in die entgegengesetzte Richtung ausgesandt wird, als Anteil (in Prozent) ihres arithmetischen Mittelwerts ab.

Gegeben:

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{Masse des Wasserstoffatoms})$$

(m - Masse des Elektrons; e - elektrische Ladung des Elektrons; $\hbar$ - Plancksche Konstante; Zahlenwerte dieser Größen sind nicht erforderlich.)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Das Original enthält zwei nicht nummerierte Fragen und gibt keine Punktzahlen an.

- **Erste Frage — Schwellengeschwindigkeit:**

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

- **Zweite Frage — Frequenzdifferenz:** Dabei bezeichnet ν_+ die nach vorn und ν_- die nach hinten ausgesandte Strahlung,

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

Die nach vorn ausgesandte Strahlung hat die höhere Frequenz.

Lösung

Erste Frage: Schwelle für einen unelastischen Stoß

Im Bohrschen Modell sind die Energieniveaus des Wasserstoffatoms

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

Die kleinstmögliche atomare Anregung führt ein Atom von $n = 1$ nach $n = 2$ und erfordert die Energie

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

Sowohl die Energie als auch der Impuls müssen erhalten bleiben. Insbesondere kann nicht die gesamte anfängliche kinetische Energie in Anregungsenergie umgewandelt werden, da der anfängliche Gesamtimpuls der Atome erhalten bleiben muss.

Seien $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Vernachlässigt man die winzige Änderung der Atommasse bei der Anregung, so ergibt die Impulserhaltung

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

Ihre kinetische Translationsenergie nach dem Stoß lässt sich daher schreiben als

$$K_f = \frac{1}{2}m_H(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4}m_H v^2 + \frac{1}{4}m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

Ihr Minimum beträgt

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4}m_H v^2,$$

und wird erreicht, wenn sich beide Atome gemeinsam mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}/2$ bewegen.

Damit ist die maximal für die Anregung verfügbare Energie

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2}m_H v^2 - \frac{1}{4}m_H v^2 = \frac{1}{4}m_H v^2.$$

An der Anregungsschwelle gilt folglich

$$\frac{1}{4}m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4}E_i,$$

also

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

Mit $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$, in Übereinstimmung mit den angegebenen 13.6 eV, ergibt sich

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

Unterhalb dieser Geschwindigkeit ist keine atomare Anregung energetisch möglich, sodass der Stoß im Rahmen des hier zugrunde gelegten Modells der Bohrschen Energieniveaus elastisch ist.

Zweite Frage: Doppler-Frequenzdifferenz

An der Schwelle besitzen die Atome nach der Anregung keine kinetische Energie der Relativbewegung. Das angeregte Atom bewegt sich daher in der ursprünglichen Richtung mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Bei seiner Rückkehr in den Grundzustand beträgt seine Emissionsfrequenz im Ruhesystem

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

wobei der Photonenrückstoß vernachlässigt wird.

Da $u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$ gilt, genügen die Dopplerformeln erster Ordnung:

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Somit gilt

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

Durch Division entfällt die Frequenz im Ruhesystem:

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

Mit $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ beträgt der gesuchte Prozentsatz

$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Platte mit einem über ihre Breite veränderlichen Brechungsindex

Betrachtet wird eine planparallele, transparente Platte der Dicke d – Abb. 1. Ihr Brechungsindex variiert gemäß

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$

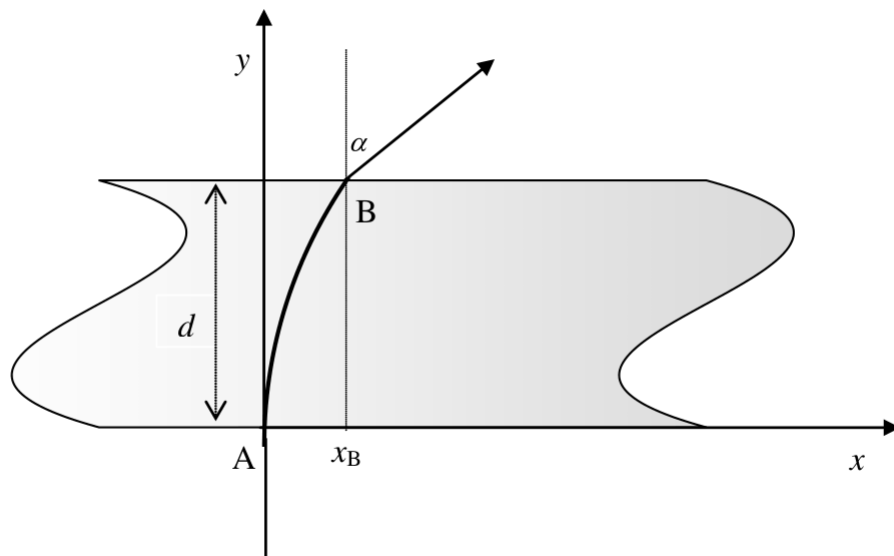


Abb. 1

Ein Lichtstrahl tritt aus der Luft im Punkt A ($x_A = 0$) senkrecht in die Platte ein und verlässt sie im Punkt B unter einem Winkel α .

1. Bestimmen Sie den Brechungsindex n_B im Punkt B.
2. Bestimmen Sie x_B (d. h. den Wert von x im Punkt B)
3. Bestimmen Sie die Dicke d der Platte.

Gegeben:

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

$$1. n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3} \text{ (dimensionslos).}$$

$$2. x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

$$3. d = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Lösung

1. Brechungsindex bei B

Wir verwenden die geometrische Optik, wobei wir annehmen, dass sich der Brechungsindex auf der Längenskala der Wellenlänge nur allmählich ändert, und setzen den Brechungsindex der Luft gleich 1.

Mit β bezeichnen wir den Winkel, den der Strahl innerhalb der Platte mit der positiven y -Achse bildet, die senkrecht auf den Plattenoberflächen steht. Aus dem senkrechten Einfall bei A folgt $\beta_A = 0$.

Um zu bestimmen, wie der Strahl gekrümmt wird, stellen wir uns die Platte in infinitesimal dünne vertikale Schichten mit jeweils konstantem Brechungsindex unterteilt vor. Die Normale jeder Schichtgrenzfläche zeigt in x -Richtung, sodass der Winkel des Strahls zu dieser Normalen $90^\circ - \beta$ beträgt. Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert daher für aufeinanderfolgende Schichten

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{konstant.}$$

Die Auswertung dieser Konstanten bei A, wo $n = n_0$ gilt, ergibt

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}.$$

Bei B sei der Einfallswinkel innerhalb der Platte β_B . Somit gilt

$$n_B \cos \beta_B = n_0.$$

Das Snelliussche Brechungsgesetz an der oberen Oberfläche, an der der Strahl in die Luft austritt, liefert

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen wird β_B eliminiert:

$$n_B^2 (\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha.$$

Daraus folgt

$$\boxed{n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}.$$

2. Position x_B

Mit dem vorgegebenen Brechungsindexprofil bei B,

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R},$$

erhalten wir

$$\boxed{x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B} \right)}.$$

Einsetzen liefert

$$x_B = 13 \text{ cm} \left(1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ cm} \left(\frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

3. Dicke d

Die Kombination der Erhaltungsgröße mit dem Brechungsindexprofil ergibt

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

Der Brechungsindex nimmt mit x zu, daher wird der Strahl in Richtung positiver x -Werte gekrümmt. Auf diesem Zweig gilt für seine Tangente

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

Die Integration von A, wo $x = y = 0$ gilt, bis zu einem beliebigen Punkt auf dem Strahl ergibt

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Folglich verläuft der Strahl entlang des Kreisbogens

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

mit dem Mittelpunkt $(R, 0)$ und dem Radius R . Der betrachtete Kreisbogen beginnt bei A mit einer vertikalen Tangente und krümmt sich nach rechts.

Bei B gilt $y = d$, also

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

Gleichwertig ergibt sich durch Einsetzen des Ausdrucks für x_B

$$d = R \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2} = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Maschine mit einer Gasquelle und semipermeablen Membranen

Eine wissenschaftliche Expedition hielt sich auf einer unbewohnten Insel auf. Die Expeditionsteilnehmer hatten über einige Energiequellen verfügt, doch nach einiger Zeit waren diese erschöpft. Daraufhin beschlossen sie, eine alternative Energiequelle zu bauen. Leider war es auf der Insel sehr ruhig: Es wehte kein Wind, Wolken bedeckten den Himmel gleichmäßig, der Luftdruck war konstant, und die Temperaturen der Luft und des Meerwassers waren bei Tag und Nacht gleich. Glücklicherweise fanden sie eine Quelle eines chemisch neutralen Gases, das sehr langsam aus einem Hohlraum austrat. Druck und Temperatur des Gases stimmen genau mit Druck und Temperatur der Atmosphäre überein.

Die Expedition hatte jedoch bestimmte Membranen in ihrer Ausrüstung. Eine davon war für das Gas vollkommen durchlässig und für Luft vollkommen undurchlässig. Eine andere hatte die entgegengesetzte Eigenschaft: Sie war für Luft vollkommen durchlässig und für das Gas vollkommen undurchlässig. Die Expeditionsteilnehmer verfügten über Materialien und Werkzeuge, mit denen sie verschiedene mechanische Vorrichtungen wie Zylinder mit Kolben, Ventile usw. herstellen konnten. Sie beschlossen, eine Maschine zu bauen, die das Gas aus dem Hohlraum nutzt.

Zeigen Sie, dass es keine theoretische Grenze für die Leistung einer idealen Maschine gibt, die das Gas und die oben beschriebenen Membranen nutzt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 3:** Es seien $\dot{n}_g > 0$ der Stoffmengenstrom des Quellgases, T_0 die Umgebungstemperatur und r die Anzahl der pro Mol Gas verwendeten Mole Luft. Eine ideale Membranmaschine kann die Leistung

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 \left[\ln(1 + r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

abgeben. Da $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$ gilt, gibt es **keine endliche theoretische Obergrenze für ihre Leistung**, selbst bei einem festen, kleinen Gasstrom.

Lösung

Wir bezeichnen den gemeinsamen Druck der Atmosphäre und der Gasquelle mit p_0 und ihre Temperatur mit T_0 . Wir verwenden die Näherung idealer Gase, vernachlässigen die Reibung und ermöglichen durch Wärmeaustausch mit der Umgebung einen isothermen Betrieb. Die verfügbare Ressource ist der anfänglich getrennte Zustand von Quellgas und atmosphärischer Luft: Die Membranen ermöglichen es, bei ihrer Mischung mechanische Arbeit zu gewinnen.

Betrachten wir eine Füllung aus n Mol Quellgas und rn Mol Luft, die sich anfangs bei p_0, T_0 befinden. Ihre Volumina sind

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

wobei R die universelle Gaskonstante ist.

Wir bringen diese Gase in einen Zylinder mit dem festen Gesamtvolumen

$$V = V_g + V_a,$$

wobei sich das Quellgas links und die Luft rechts befindet. Anfangs werden sie durch zwei unmittelbar nebeneinanderliegende Membrankolben getrennt:

- Die linke Membran lässt Quellgas durch, hält aber Luft zurück.
- Die rechte Membran lässt Luft durch, hält aber Quellgas zurück.

Wir lassen die linke Membran zum linken Ende und die rechte Membran zum rechten Ende wandern, wobei jede eine mechanische Last antreibt. Zwischen den Membranen befindet sich ein Gemisch; außerhalb befindet sich links reines Quellgas und rechts reine Luft. Schließlich nehmen beide Komponenten den gesamten Zylinder ein.

Die entscheidende Eigenschaft besteht darin, dass **eine durchtretende Komponente im reversiblen Betrieb auf beiden Seiten ihrer Membran den gleichen Partialdruck hat**. Daher heben sich am luftdurchlässigen Kolben die von der Luft ausgeübten Kräfte auf. Nur der Partialdruck des Quellgases

treibt diesen Kolben an. Ist das für das Quellgas zugängliche Volumen v_g , so beträgt die von ihm verrichtete Arbeit

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

Entsprechend gewinnt der gasdurchlässige Kolben Arbeit aus der expandierenden Luft:

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

Folglich beträgt die gesamte bei reversibler isothermer Mischung gewonnene Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\ &= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\ &= \boxed{nRT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]}. \end{aligned}$$

Am Ende hat das Gemisch den Gesamtdruck

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

Es kann daher ausgestoßen und durch frisches Gas und frische Luft beim gemeinsamen Druck p_0 ersetzt werden. Gewöhnliche Kolben und Bypassventile können diesen Austausch durchführen und die Membranen in ihre Ausgangslage zurückbringen. Da die einströmenden und ausströmenden Gesamtvolumina gleich sind, hebt sich ihre Volumenarbeit auf:

$$W_{\text{Ansaugen/Ausstoßen}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

Das verbrauchte Gemisch wird abgeführt, sodass die Maschine es nicht wieder trennen muss. Somit ist W die nutzbare Arbeit pro Füllung mit n Mol Quellgas.

Bei einer stetigen Gaszufuhr $\dot{n}_g$ ergibt der Betrieb nacheinander oder parallel arbeitender Zylinder die ideale mittlere Leistung

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} W = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

Ist q_g der bei p_0, T_0 gemessene Volumenstrom der Quelle, so gilt gleichwertig

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right],$$

wobei $p_0 q_g$ in Watt gemessen wird.

Nun erhöhen wir die pro Mol Quellgas verwendete Luftmenge. Da

$$\ln(1+r) \longrightarrow \infty, \quad r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \longrightarrow 1,$$

erhalten wir

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 [\ln r + 1 + o(1)] \longrightarrow \infty.$$

Somit setzt selbst ein beliebig kleiner, fester, positiver Gasstrom der Leistung keine endliche theoretische Obergrenze.

Diese Schlussfolgerung setzt voraus, dass die Größe der Apparatur, der Luftdurchsatz, die Membranfläche und der Wärmeaustausch unbeschränkt sind. Langsame, nahezu reversible Kolbenhübe können in hinreichend vielen parallelen Zylindern ausgeführt werden, um den vorgegebenen Gasstrom zu verarbeiten. Eine Erhöhung der Leistung erfordert eine immer größere Menge an frischer Luft pro Mol Gas.

Schließlich steht dies im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Bei idealen Gasen bleibt die innere Energie durch den Mischvorgang bei unveränderter Temperatur unverändert, sodass die aufgenommene Wärme gleich der Arbeit ist:

$$Q = W.$$

Die Entropiezunahme der Gase beträgt

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

was im reversiblen Betrieb die Entropieabnahme des Wärmereservoirs ausgleicht. Die Maschine verbraucht die anfängliche Trennung von Gas und Luft. Die Divergenz setzt den Zugang zu beliebig viel frischer Luft voraus; endliche Reservoirs und endliche Anlagen setzen praktische Grenzen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.