

المسألة 1: تصادم غير مرن بين ذرتي هيدروجين (نموذج بوهر، انزياح دوبلر)

تتصادم ذرة هيدروجين في الحالة الأرضية، تتحرك بسرعة v ، مع ذرة هيدروجين أخرى ساكنة في الحالة الأرضية. باستخدام نموذج بوهر، أوجد أصغر سرعة v_0 للذرة يجب أن يكون التصادم عند السرعات الأقل منها مرناً.

عند السرعة v_0 ، قد يكون التصادم غير مرن وقد تبعث الذرتان المتصادمتان إشعاعاً كهرومغناطيسياً. قدر الفرق بين ترددي الإشعاع المنبعث في اتجاه السرعة الابتدائية لذرة الهيدروجين وفي الاتجاه المعاكس، بوصفه نسبة (معبّرًا عنها بالنسبة المئوية) من متوسطهما الحسابي.

المعطيات:

$$E_i = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}; \quad (\text{طاقة تأين ذرة الهيدروجين})$$

$$m_H = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad (\text{كتلة ذرة الهيدروجين})$$

$$(m - \text{كتلة الإلكترون}; e - \text{الشحنة الكهربائية للإلكترون}; \hbar - \text{ثابت بلانك}; \text{لا حاجة إلى القيم العددية لهذه الكميات}).$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

يتضمن النص الأصلي سؤالين غير مرقّمين، ولا يحدد درجات لأيٍّ منهما.

• السؤال الأول — سرعة العتبة:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}} \simeq 6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

• السؤال الثاني — فرق الترددين: إذا رمزنا بـ ν_+ إلى الإشعاع الأمامي وبـ ν_- إلى الإشعاع الخلفي، فإن

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{v_0}{c} = 2.09 \times 10^{-4} = 0.0209\%.$$

يكون تردد الإشعاع الأمامي أعلى.

الحل

السؤال الأول: عتبة التصادم غير المرن

في نموذج بوهر، تُعطى مستويات طاقة الهيدروجين بالعلاقة

$$E_n = -\frac{E_i}{n^2}.$$

تنقل أدنى إثارة ذرية ممكنة إحدى الذرتين من $n = 1$ إلى $n = 2$ ، وتتطلب طاقة مقدارها

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_i \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E_i = 10.2 \text{ eV}.$$

يجب أن تتحفظ الطاقة وكمية الحركة كليهما. وعلى وجه الخصوص، لا يمكن أن تتحول الطاقة الحركية الابتدائية بأكملها إلى طاقة إثارة، لأن الذرتين يجب أن تحتفظا بكمية الحركة الكلية الابتدائية.

لتكن $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ سرعتي الذرتين بعد التصادم. بإهمال التغير الضئيل في الكتلة الذرية عند الإثارة، يعطي انحفاظ كمية الحركة

$$m_H \mathbf{v} = m_H \mathbf{v}_1 + m_H \mathbf{v}_2.$$

ولذلك يمكن كتابة طاقتهم الحركية الانتقالية النهائية على الصورة

$$K_f = \frac{1}{2}m_H(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{4}m_H v^2 + \frac{1}{4}m_H |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

وقيمتها الصغرى هي

$$K_{f,\min} = \frac{1}{4}m_H v^2,$$

وتتحقق عندما تتحرك الذرتان معاً بسرعة $\mathbf{v}/2$.

إن، أقصى طاقة متاحة للإثارة هي

$$K_i - K_{f,\min} = \frac{1}{2}m_H v^2 - \frac{1}{4}m_H v^2 = \frac{1}{4}m_H v^2.$$

ومن ثم تحقق عتبة الإثارة العلاقة

$$\frac{1}{4}m_H v_0^2 = \Delta E = \frac{3}{4}E_i,$$

وبالتالي

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_i}{m_H}}.$$

باستخدام $E_i = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$ ، وهي قيمة متوافقة مع القيمة المعطاة 13.6 eV ، نحصل على

$$v_0 = \sqrt{\frac{3(2.18 \times 10^{-18})}{1.67 \times 10^{-27}}} \simeq \boxed{6.26 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}}.$$

عند السرعات الأقل من هذه السرعة، لا تكون أي إثارة ذرية ممكنة من حيث الطاقة، ولذلك يكون التصادم مرناً ضمن نموذج مستويات بوهرف المقصود.

السؤال الثاني: فرق التردد الناتج عن تأثير دوبلر

عند العتبة، لا تكون للذرتين طاقة حركية نسبية بعد الإثارة. لذلك تتحرك الذرة المثارة في الاتجاه الابتدائي بسرعة

$$u = \frac{v_0}{2} \simeq 3.13 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

عندما تعود الذرة إلى الحالة الأرضية، يكون تردد الإشعاع المنبعث في إطار سكونها

$$\nu_* = \frac{\Delta E}{h}, \quad h = 2\pi\hbar,$$

مع إهمال الارتداد الناتج عن انبعاث الفوتون.

بما أن $u/c \simeq 1.04 \times 10^{-4} \ll 1$ ، فإن صيغ دوبلر من الرتبة الأولى تفي بالغرض:

$$\nu_+ \simeq \nu_* \left(1 + \frac{u}{c}\right), \quad \nu_- \simeq \nu_* \left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

ومن ثم

$$\nu_+ - \nu_- \simeq 2\nu_* \frac{u}{c}, \quad \frac{\nu_+ + \nu_-}{2} \simeq \nu_*.$$

بإجراء القسمة، يُختزل التردد في إطار السكون:

$$\frac{\nu_+ - \nu_-}{(\nu_+ + \nu_-)/2} \simeq \frac{2u}{c} = \frac{v_0}{c}.$$

باستخدام $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ، تكون النسبة المئوية المطلوبة

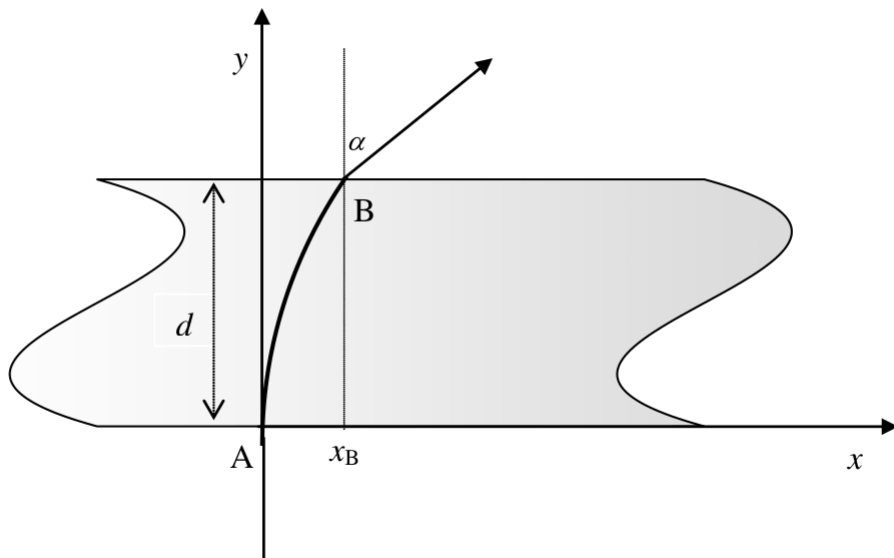
$$\frac{6.26 \times 10^4}{3.00 \times 10^8} \times 100\% \simeq \boxed{0.0209\%}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: صفيحة يتغير معامل انكسارها عبر عرضها

لنكن لدينا صفيحة شفافة متوازية الوجهين سمكها d - الشكل 1. يتغير معامل انكسارها وفق العلاقة

$$n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}.$$



الشكل 1

يدخل شعاع ضوئي من الهواء عمودياً على الصفيحة عند النقطة A ($x_A = 0$) ويخرج منها عند النقطة B بزاوية α .

1. أوجد معامل الانكسار n_B عند النقطة B.

2. أوجد x_B (أي قيمة x عند النقطة B)

3. أوجد سمك الصفيحة d .

المعطيات:

$$n_0 = 1.2; \quad R = 13 \text{ cm}; \quad \alpha = 30^\circ.$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

$$1. \quad n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha} = \boxed{1.3} \text{ (بلا أبعاد).}$$

$$2. \quad x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}$$

$$3. \quad d = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}} = \boxed{5.0 \text{ cm}}$$

الحل

1. معامل الانكسار عند B

نستخدم البصريات الهندسية، معتبرين أن معامل الانكسار يتغير بسلسلة على مقياس الطول الموجي، ونأخذ معامل انكسار الهواء مساوياً لـ 1.

لتكن الزاوية التي يصنعها الشعاع داخل الصفيحة مع الاتجاه الموجب للمحور y ، وهو عمودي على سطحي الصفيحة. من السقوط العمودي عند A نحصل على $\beta_A = 0$.

لتحديد كيفية انحناء الشعاع، نتخيل تقسيم الصفيحة إلى طبقات رأسية متناهية الرقة، لكل منها معامل انكسار ثابت. يتجه العمود على كل سطح فاصل بين الطبقات على امتداد المحور x ، ولذلك تكون زاوية الشعاع مع هذا العمود $90^\circ - \beta$. ومن ثم يعطي قانون سنيل عبر الطبقات المتتالية

$$n \sin(90^\circ - \beta) = n \cos \beta = \text{ثابت.}$$

بحساب هذا الثابت عند A، حيث $n = n_0$ ، نحصل على

$$\boxed{n(x) \cos \beta = n_0}.$$

عند B، لتكن زاوية السقوط الداخلية β_B . إذن

$$n_B \cos \beta_B = n_0.$$

يعطي قانون سنيل عند السطح العلوي، حيث يخرج الشعاع إلى الهواء،

$$n_B \sin \beta_B = \sin \alpha.$$

بتربيع طرفي كل من هاتين المعادلتين ثم جمعهما، نحذف β_B :

$$n_B^2 (\cos^2 \beta_B + \sin^2 \beta_B) = n_0^2 + \sin^2 \alpha.$$

ومن ثم

$$\boxed{n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

عددياً،

$$n_B = \sqrt{1.2^2 + \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1.44 + 0.25} = \boxed{1.3}.$$

2. الموضع x_B

باستخدام التوزيع المعطى لمعامل الانكسار عند B،

$$n_B = \frac{n_0}{1 - x_B/R},$$

نحصل على

$$x_B = R \left(1 - \frac{n_0}{n_B} \right).$$

بالتعويض نحصل على

$$x_B = 13 \text{ cm} \left(1 - \frac{1.2}{1.3} \right) = 13 \text{ cm} \left(\frac{1}{13} \right) = \boxed{1.0 \text{ cm}}.$$

3. السمك d

بالجمع بين الكمية المحفوظة وتوزيع معامل الانكسار نحصل على

$$\cos \beta = \frac{n_0}{n(x)} = 1 - \frac{x}{R}.$$

يزداد معامل الانكسار مع x ، ولذلك ينحني الشعاع نحو الاتجاه الموجب للمحور x . وعلى هذا الفرع، يحقق ميل المماس لمساره العلاقة

$$\frac{dy}{dx} = \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{R - x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

بالتكامل من A، حيث $x = y = 0$ ، إلى نقطة اعتباطية على مسار الشعاع،

$$y(x) = \int_0^x \frac{R - u}{\sqrt{2Ru - u^2}} du = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

وبالتالي، يتبع الشعاع القوس الدائري

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

الذي مركزه $(R, 0)$ ونصف قطره R . يبدأ القوس المعني عند A بمماس رأسي وينحني إلى اليمين.

عند B، يكون $y = d$ ، ولذلك

$$d = \sqrt{2Rx_B - x_B^2}.$$

وبصورة مكافئة، بالتعويض عن x_B بتعبيره،

$$d = R \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B} \right)^2} = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}}.$$

عددياً،

$$d = \sqrt{2(13 \text{ cm})(1.0 \text{ cm}) - (1.0 \text{ cm})^2} = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = \boxed{5.0 \text{ cm}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: محرك يستخدم مصدراً للغاز وأغشية شبه منفذة

أقامت بعثة علمية في جزيرة غير مأهولة. وكان لدى أفراد البعثة بعض مصادر الطاقة، لكنها نفدت بعد فترة من الزمن. فقرروا عندئذ إنشاء مصدر بديل للطاقة. ولسوء الحظ، كانت الجزيرة ساكنة تماماً: فلم تكن هناك رياح، وكانت السحب تغطي السماء بانتظام، وكان ضغط الهواء ثابتاً، وكانت درجة حرارة الهواء وماء البحر متساويتين وثابتتين ليلاً ونهاراً. ولحسن الحظ، وجدوا مصدراً للغاز خامل كيميائياً يتدفق ببطء شديد من تجويف. وكان ضغط الغاز ودرجة حرارته مساويين تماماً لضغط الغلاف الجوي ودرجة حرارته. غير أن البعثة كانت تملك ضمن معداتها أغشية معينة. كان أحدها منفذاً تماماً للغاز وغير منفذ إطلاقاً للهواء. وكان لغشاء آخر خاصية معاكسة: إذ كان منفذاً تماماً للهواء وغير منفذ إطلاقاً للغاز. وكان لدى أفراد البعثة مواد وأدوات تتيح لهم صنع أجهزة ميكانيكية مختلفة، مثل أسطوانات ذات مكابس وصمامات وغيرها. فقرروا إنشاء محرك باستخدام الغاز المنبعث من التجويف.

يُبين أنه لا يوجد حد نظري لقدرة محرك مثالي يستخدم الغاز والأغشية المذكورة أعلاه.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- المسألة 3: لتكن $\dot{n}_g > 0$ معدل التدفق المولي لغاز المصدر، و T_0 درجة حرارة الوسط المحيط، و r عدد مولات الهواء المستخدمة لكل مول من الغاز. يمكن لمحرك مثالي يعمل بالأغشية أن يعطي قدرة مقدارها

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g R T_0 \left[\ln(1+r) + r \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right].$$

وبما أن $\mathcal{P}(r) \rightarrow \infty$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، فلا يوجد حد أعلى نظري لـ $\mathcal{P}(r)$ ، حتى عند معدل تدفق غاز ثابت وصغير.

الحل

لنرمز إلى الضغط المشترك للغلاف الجوي والمصدر بـ p_0 ، وإلى درجة حرارتهما بـ T_0 . نستخدم تقريب الغاز المثالي، ونهمل الاحتكاك، ونتيح التشغيل متساوي الحرارة عن طريق التبادل الحراري مع الوسط المحيط. ويتمثل المورد المتاح في حالة الانفصال الابتدائية لغاز المصدر وهواء الغلاف الجوي: فالأغشية تتيح مزجهما لإنتاج شغل ميكانيكي.

لننظر في شحنة تتكون من n مول من غاز المصدر و rn مول من الهواء، عند p_0, T_0 ابتدائياً. ويكون حجمهما

$$V_g = \frac{nRT_0}{p_0}, \quad V_a = \frac{rnRT_0}{p_0} = rV_g,$$

حيث R هو ثابت الغازات العام.

نضع هذين الغازين في أسطوانة ذات حجم كلي ثابت

$$V = V_g + V_a,$$

بحيث يكون غاز المصدر على اليسار والهواء على اليمين. ويفصل بينهما في البداية مكبس غشائي متجاوران:

- يسمح الغشاء الأيسر بمرور غاز المصدر، لكنه يمنع مرور الهواء.
- يسمح الغشاء الأيمن بمرور الهواء، لكنه يمنع مرور غاز المصدر.

نسمح للغشاء الأيسر بالتحرك نحو الطرف الأيسر، وللغشاء الأيمن بالتحرك نحو الطرف الأيمن، بحيث يحرك كل منهما حملاً ميكانيكياً. ويوجد مزيج بين الغشاءين؛ أما خارجهما فيوجد غاز مصدر نقي على اليسار وهواء نقي على اليمين. وفي النهاية، يشغل كلا المكونين الأسطوانة بأكملها.

الخاصية الأساسية هي أن المكون النافذ عبر الغشاء يكون له الضغط الجزئي نفسه على جانبي غشائه عند التشغيل العكوس. ومن ثم، تتعادل القوى الناشئة عن الهواء على جانبي المكبس المنفذ للهواء. ولا يدفع ذلك المكبس إلا الضغط الجزئي لغاز المصدر. فإذا كان الحجم المتاح لغاز المصدر هو v_g ، فإن الشغل الذي يبذله هو

$$dW_g = p_g dv_g = \frac{nRT_0}{v_g} dv_g.$$

وبالمثل، يستخلص المكبس المنفذ للغاز شغلاً من الهواء المتمد:

$$dW_a = p_a dv_a = \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a.$$

وبناءً على ذلك، يكون الشغل الكلي الناتج عن المزج العكوس متساوي الحرارة

$$\begin{aligned}
W &= \int_{V_g}^V \frac{nRT_0}{v_g} dv_g + \int_{V_a}^V \frac{rnRT_0}{v_a} dv_a \\
&= nRT_0 \ln \frac{V}{V_g} + rnRT_0 \ln \frac{V}{V_a} \\
&= \boxed{nRT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]}.
\end{aligned}$$

في النهاية، يكون الضغط الكلي للمزيج

$$p_f = \frac{(1+r)nRT_0}{V} = p_0.$$

ولذلك يمكن طرده واستبداله بغاز وهواء جديدين عند الضغط المشترك p_0 . ويمكن لمكبس عادية وصمامات تجاوز إجراء هذا التبادل وإعادة الأغشية إلى وضعها الابتدائي. وبما أن الحجم الكلي الداخل يساوي الحجم الكلي الخارج، فإن شغلي الضغط والحجم المصاحبين لهما يتلاشيان:

$$W_{\text{السحب/الطرد}} = p_0(V_g + V_a) - p_0V = 0.$$

يُصَرَّف المزيج المستهلك، فلا يحتاج المحرك إلى فصله مرة أخرى. ومن ثم فإن W هو الشغل المفيد لكل شحنة تحتوي على n مول من غاز المصدر.

عند إمداد ثابت بالغاز بمعدل $\dot{n}_g$ ، يعطي تشغيل أسطوانات متعاقبة أو متوازية قدرة متوسطة مثالية مقدارها

$$\mathcal{P}(r) = \frac{\dot{n}_g}{n} W = \dot{n}_g RT_0 \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right].$$

وبصورة مكافئة، إذا كان q_g معدل التدفق الحجمي للمصدر مقاسًا عند p_0, T_0 ، فإن

$$\mathcal{P}(r) = p_0 q_g \left[\ln(1+r) + r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right],$$

حيث يُقاس $p_0 q_g$ بالواط.

نزيد الآن كمية الهواء المستخدمة لكل مول من غاز المصدر. وبما أن

$$\ln(1+r) \rightarrow \infty, \quad r \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right) \rightarrow 1,$$

فإننا نحصل على

$$\mathcal{P}(r) = \dot{n}_g RT_0 [\ln r + 1 + o(1)] \rightarrow \infty.$$

وعليه، حتى معدل تدفق غاز موجب وثابت وصغير كيفما نشاء لا يفرض حدًا أعلى نظريًا منتهيًا للقدرة.

تسمح هذه النتيجة بأن يكون حجم الجهاز ومعدل مرور الهواء ومساحة الأغشية والتبادل الحراري غير مقيّدة. ويمكن تنفيذ أشواط بطيئة وشبه عكوسة في عدد كافٍ من الأسطوانات المتوازية لمعالجة معدل تدفق الغاز المحدد. وتتطلب زيادة القدرة كمية متزايدة من الهواء الجديد لكل مول من الغاز.

وأخيرًا، يتفق ذلك مع القانون الثاني للديناميكا الحرارية. ففي الغازات المثالية عند ثبات درجة الحرارة، لا تغيّر عملية المزج الطاقة الداخلية، ولذلك تساوي الحرارة الممتصة الشغل المبذول:

$$Q = W.$$

وتكون زيادة إنتروبيا الغازين

$$\Delta S_{\text{mix}} = nR \ln \frac{V}{V_g} + rnR \ln \frac{V}{V_a} = \frac{W}{T_0},$$

وهي تعادل نقصان إنتروبيا الخزان الحراري عند التشغيل العكوس. ويستهلك المحرك حالة الانفصال الابتدائية للغاز والهواء. ويفترض تباعد القدرة إلى ما لا نهاية إتاحة كمية كبيرة كيفما نشاء من الهواء الجديد؛ أما الخزانات المحدودة والمعدات المحدودة فتفرض حدوداً عملية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.