

IPhO 1972

理论题与解答 · 罗马尼亚布加勒斯特 · 4 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1972/

题目 1: 斜面上的三个圆柱体

三个质量相同、长度相同、外半径相同的圆柱体最初静止在一个斜面上。已知圆柱体与斜面之间的滑动摩擦系数为 μ ，且三个圆柱体的滑动摩擦系数相同。第一个圆柱体是空心的（圆管），第二个是均匀实心的，第三个具有与第一个完全相同的空腔，但两端用质量可忽略的端盖封闭，内部充满密度与筒壁材料相同的液体。液体与筒壁之间的摩擦可忽略。第一个圆柱体的材料密度是第二个或第三个圆柱体材料密度的 n 倍。

求：

- 各圆柱体在无滑动情况下的线加速度。比较各加速度的大小。
- 使所有圆柱体均不发生滑动时，斜面倾角 α 应满足的条件。
- 三个圆柱体均发生滑动滚动时，角加速度的相互比值。比较这些角加速度的大小。
- 已知液体质量为 m_l ，求装有液体的圆柱体发生滑动时，液体与筒壁之间的相互作用力。

题目译自官方英文原文。

答案

设共同的外半径为 R ，圆柱体 i 的固体部分的角加速度为 β_i 。设 $\hat{e}_{\parallel}$ 沿斜面向下， $\hat{e}_{\perp}$ 垂直于斜面并指向斜面外侧。以下大小比较均假定空腔确实存在，即 $n > 1$ ，且 $0 < \alpha < \pi/2$ 。

- a) 沿斜面向下的加速度为

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1}g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2+2n-1}g \sin \alpha$$

且

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

- b) 若给定的 μ 同时也表示最大静摩擦系数，则

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

圆柱体 1 决定这一极限条件。若 μ 严格地仅指滑动摩擦系数，则要确定准确的无滑动条件，还需要知道静摩擦系数。

- c) 当滑动摩擦力非零时,

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n - 1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

等价地, 角加速度的倒数满足

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n - 1} : \frac{1}{n^2}.$$

- d) 筒壁对液体施加的合力为

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

因此, 相互作用力的大小为

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

液体所受的力与外法线的夹角为 $\arctan \mu$, 方向偏向斜面上方。筒壁所受的力与之大小相等、方向相反。

解答

设三个圆柱体共同的总质量为 M , 共同的长度为 L , 圆柱体 1 和 3 的空腔半径为 r 。用 ρ 表示圆柱体 2、圆柱体 3 的筒壁及其内部液体的密度。圆柱体 1 的密度为 $n\rho$ 。

由质量相等可得

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

因此,

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n - 1}{n}.$$

于是, 第三个圆柱体的壳体质量及其内部液体的质量分别为

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n - 1}{n}.$$

我们将圆柱体视为刚体, 忽略滚动阻力, 并将完全封闭在内部的液体视为不可压缩的无黏性流体。圆形筒壁的转动不会迫使液体产生切向运动。压力对圆柱体轴线的力矩为零, 因此最初不旋转的液体随圆柱体一起平动, 而不发生自转。

因此, 全部质量 M 都参与平动, 但只有壳体对圆柱体 3 的转动惯量有贡献。利用均匀圆环柱体绕其轴线的转动惯量 $\frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$, 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n - 1}{2n}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} MR^2, \\ I_3 &= \frac{1}{2} \frac{M}{n} (R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n - 1}{2n^2}. \end{aligned}$$

这里, I_3 表示旋转壳体的转动惯量。

定义无量纲转动惯量

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

a) 无滑动时的线加速度

设静摩擦力为 f_i ，方向沿斜面向上。沿斜面方向的牛顿第二定律和绕圆柱体轴线的转动方程给出

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

对于无滑动滚动，

$$a_i = R \beta_i.$$

因此，

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = M k_i a_i,$$

从而

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

代入三个转动惯量，得

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.$$

当 $n > 1$ 时，

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

由于 a_i 随 k_i 的增大而减小，

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

充满液体的圆柱体加速度最大，因为液体增加了参与平动的质量，却没有增加转动惯量。

b) 所有圆柱体均作无滑动滚动的条件

垂直于斜面方向的加速度为零，因此每个圆柱体受到的支持力均为

$$N = Mg \cos \alpha.$$

滚动所需的静摩擦力为

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

由此得到

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

为明确区分静摩擦与滑动摩擦，用 $\mu_{s,i}$ 表示圆柱体 i 的最大静摩擦系数。三个圆柱体均能作无滑动滚动的充要条件为

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1} \right\}.$$

在通常采用的单一摩擦系数理想化模型中， $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$ 。由于 $k_1 > k_2 > k_3$ ，圆柱体 1 所需的摩擦力与其支持力之比最大，因此由它决定上限：

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{或} \quad \alpha \leq \arctan\left(\mu \frac{4n-1}{2n-1}\right).$$

等号对应于圆柱体 1 所受静摩擦力达到最大静摩擦力的情况。

c) 三个圆柱体均滑动时的角加速度之比

在题目规定的运动状态下，各圆柱体相对于斜面向下滑动。滑动摩擦力沿斜面向上，且对每个圆柱体的大小相同：

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

因此，它们的平动加速度相等：

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

它们的角加速度由

$$I_i \beta_i = fR,$$

求得，此时不施加无滑动关系 $a = R\beta$ 。于是，

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

约去公因子，得到

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2.$$

各角加速度的相互比值为

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n-1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n-1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

当 $n > 1$ 时，

$$2n-1 > n, \quad n^2 - (2n-1) = (n-1)^2 > 0,$$

所以

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

作为一致性检验，从静止开始沿斜面向下滑动要求 $a_{sl} - R\beta_i > 0$ 。在单一摩擦系数模型中，当

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}.$$

时，三个圆柱体均满足这一条件。随着倾角增大，圆柱体 3 最后开始滑动。

d) 液体与筒壁之间的相互作用力

液体的质心随发生滑动的圆柱体一起沿斜面向下加速：

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

设筒壁对液体施加的合力的两个分量为 $F_{\parallel}$ 和 $F_{\perp}$ ，分别以沿斜面向下和垂直斜面向外为正方向。仅对液体应用牛顿第二定律，得

$$\begin{aligned} F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha &= m_l a_{sl}, \\ F_{\perp} - m_l g \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

因此，

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

这些分量来自压力的合力；沿斜面向上的分量并不要求液体与筒壁之间存在黏性摩擦。因此，

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$$

且

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

该力从外法线向斜面上方偏转的角度为

$$\theta = \arctan \mu.$$

根据牛顿第三定律，液体对筒壁施加大小相等、方向相反的力。

解答已与官方解答核对。

题目 2：活塞相连的两个气缸中的氦气和氧气

两个直径相同的气缸 A 和 B 内各有一个质量可忽略的活塞，两活塞由一根刚性连杆连接。活塞可以自由移动。连杆是一根装有阀门的短管。阀门最初关闭（图 2.1）。

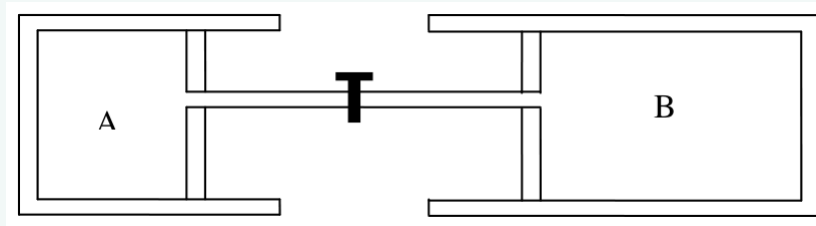


图 2.1

气缸 A 及其活塞均绝热，气缸 B 则与温度为 $\theta = 27^\circ\text{C}$ 的恒温器保持热接触。

最初，气缸 A 的活塞被固定，其中装有质量为 $m = 32\text{ kg}$ 的氦气，其压强高于大气压。气缸 B 内装有一定质量的氧气，压强为标准大气压。

解除对气缸 A 活塞的固定后，活塞以足够缓慢的速度运动（准静态过程）。达到平衡时，氦气的体积变为原来的八倍，而气缸 B 中氧气的密度变为原来的两倍。已知恒温器吸收的热量为

$Q' = 747,9 \cdot 10^4\text{J}$ ，求：

a) 根据气体分子运动论，通过研究分子与活塞的弹性碰撞，证明气缸 A 中所发生过程的温度与体积的关系为 $TV^{2/3} = \text{常量}$ 。

b) 计算氦气初态和末态的参数 p 、 V 和 T 。

c) 打开分隔两个气缸的阀门，计算混合气体的最终压强。

氦气的千摩尔质量为 $\mu = 40\text{ kg/kmol}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

以下是根据题目要求的绝热关系、最终的力学平衡以及总能量守恒得到的形式上的结果。题目关于准静态过程的表述存在物理一致性问题：释放活塞时，氩气的压强为 $64p_0$ ，而氧气的压强只有 p_0 ，因此质量可忽略的活塞组件不可能准静态地运动。

- a) $TV^{2/3} = \text{常量}$ ，等价地， $pV^{5/3} = \text{常量}$ 。
- b) 打开阀门之前，氩气的状态为：

状态	压强 p	体积 V	温度 T
初态	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6 \text{ Pa}$	1.03 m^3	$1.00 \times 10^3 \text{ K}$
末态	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5 \text{ Pa}$	8.20 m^3	250 K

- c) 打开阀门并达到热平衡后，

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

这里， p_0 为标准大气压。

解答

将两种气体均视为理想气体，并忽略连接短管的体积。取

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ K}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

氩气的物质的量为

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ kmol}.$$

下标 1 和 2 分别表示初态和阀门仍关闭时达到的平衡态。

a) 从分子碰撞推导

设氩气一侧的活塞面积为 S ，以速度 u 向外运动，且该速度远小于分子的热运动速率。考虑一个质量为 m_0 的氩原子，它朝活塞运动，垂直于活塞方向的速度分量为 v_x 。

在活塞的瞬时静止参考系中，弹性碰撞使法向速度反向。因此，在实验室参考系中，

$$v'_x = 2u - v_x.$$

其他速度分量保持不变。因此，原子的能量变化为

$$\Delta\epsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0 u (v_x - u).$$

传递给活塞的冲量为

$$I = 2m_0(v_x - u),$$

所以

$$\Delta\epsilon = -uI.$$

对所有分子碰撞求和，单位时间内传递的冲量就是力 $p_A S$ 。因此，

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

即

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

对于处于平衡态的单原子理想气体，分子运动论给出

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

因此

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

缓慢运动的假设使分子间碰撞能够维持各向同性的平衡速度分布。

代入能量方程，得到

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = - \frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

因此

$$\frac{dT_A}{T_A} = - \frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

积分得

$$T_A V_A^{2/3} = \text{常量}.$$

将其与 $p_A V_A = n_A R T_A$ 联立，还可得到

$$p_A V_A^{5/3} = \text{常量}.$$

b) 氩气的初态和末态

由题目给定的氩气膨胀情况可知

$$V_{A2} = 8V_{A1}.$$

利用 a) 的结果，

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

所以

$$T_{A2} = \frac{1}{4} T_{A1}.$$

阀门打开之前，氧气的质量不变。因此，其密度变为原来的两倍意味着

$$V_{B2} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

在初、末两个平衡态，氧气的温度均为恒温器的温度 T_0 。由理想气体状态方程可得

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2p_0.$$

在最终的力学平衡态，相连的活塞组件所受的力平衡。由于活塞面积相等，大气作用力相互抵消，因而

$$p_{A2} = p_{B2} = 2p_0.$$

此时，由氩气的绝热关系可得

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

为确定温度，将两种气体作为一个整体来考虑。活塞位移相等且横截面积相等，意味着

$$dV_A = -dV_B.$$

因此，两种气体的总体积保持不变，克服大气压力所做的净功为零。通过连杆传递的功属于整个系统内部的功。由于初、末两态的活塞均静止，总能量守恒给出

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

氧气的初温和末温相同，因此，对于理想气体，

$$\Delta U_B = 0.$$

所以

$$Q' = \frac{3}{2}n_A R(T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8}n_A R T_{A1}.$$

代入 $Q' = 7.479 \times 10^6 \text{ J}$ ，得

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

以及

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

最后，

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

且

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

保留三位有效数字，得

$$\boxed{(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})}$$

以及

$$\boxed{(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K})}.$$

c) 打开阀门后的最终压强

由活塞的几何关系可得

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

利用 $V_{A2} = 8V_{A1}$ 和 $V_{B2} = V_{B1}/2$ ，得

$$7V_{A1} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

因此

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

且保持不变的总体积为

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

阀门打开后，两种气体混合，最终达到恒温器的温度 T_0 。虽然气缸 A 绝热，但其中的气体可以通过打开的连接通道与气缸 B 交换能量。

氧气的物质的量保持不变，满足

$$n_B RT_0 = p_0 V_{B1} = 14 p_0 V_{A1}.$$

对于氩气，

$$n_A RT_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64 p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2 p_0 V_{A1}.$$

对最终的混合气体应用理想气体状态方程，得

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B) RT_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14) p_0 V_{A1}}{15 V_{A1}}.$$

因此

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 = 2.2133 p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：带电电容器极板间的电介质液体上升

一个具有矩形极板的平行板电容器竖直固定，其下部与一种电介质液体接触（图 3.1）。

求极板间液体上升的高度 h ，并解释这一现象。

忽略毛细现象的影响。

假设极板间距远小于极板的线度。

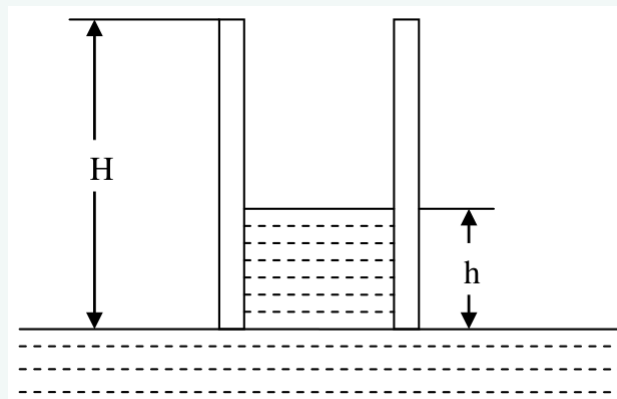


图 3.1

已知：带电电容器的初始电场强度 E 、液体的密度 ρ 和相对介电常数 ϵ_r ，以及电容器极板的高度 H 。

进行讨论。

题目译自官方英文原文。

答案

- **题目 3 — 高度：** 假设带电电容器与外界电路隔离，令 $a = \varepsilon_r - 1 > 0$ 。设 h_* 为下列方程的唯一非负解：

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

当 $h_* < H$ 时，平衡高度为 $h = h_*$ 。液体充满极板间隙直至顶部（在理想近似下为 $h = H$ ）的条件为

$$E \geq E_c = \varepsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}}.$$

- **题目 3 — 解释与讨论：** 极化产生向上的电场力。在液面上升但尚未到达顶部的平衡状态下，电场力产生的压强与静液压强平衡：

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\varepsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

这一平衡状态唯一且稳定。若 $E = 0$ 或 $\varepsilon_r = 1$ ，液面不会上升。

- **题目 3 — 恒定电压的另一种情况：** 如果改由电源维持初始电压，则结果为

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2\rho g} \right\}.$$

解答

题目 3。 题目提到的是初始电场，且未指定电压源，这表明应考虑与外界电路隔离的电容器，其自由电荷量保持不变。我们先求解这一情况。

设极板宽度为 b ，极板间距为 d ，外部液面位于 $z = 0$ 。我们认为储液容器足够大，使该液面高度保持不变。液体是线性、均匀且不可压缩的电介质；空气的介电常数为 ε_0 。由于 d 远小于极板的尺寸，忽略边缘效应对电容的修正。

液面上升过程中的电容与电场。 当液体上升至高度 $h < H$ 时，充有液体的部分和充有空气的部分构成两个并联的电容器。因此

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b(H-h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

其中

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

初始时 $V_0 = Ed$ ，因此守恒的电荷量为

$$Q = C_0 E d.$$

于是，液面上升后的电场强度为

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \boxed{\frac{E}{1 + ah/H}}.$$

因此，随着液体进入这个与外界电路隔离的电容器，电场强度逐渐减小。

平衡高度。 在电荷量恒定时，电场能为

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

将液体从储液容器提升至极板间隙所需增加的重力势能为

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

静态平衡时，总能量取极小值。因此

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = b d \left[\rho g h - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

所以

$$\boxed{\rho g h = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

或者，等价地，

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2 \rho g}}.$$

由这个三次方程即可根据已知量确定平衡高度。 b 和 d 都被约去，这解释了为什么不需要给出它们的数值。

物理解释。 插入电介质会增大电容，并在电荷量恒定时降低电场能。相应的向上的力为

$$F_e = - \frac{dU_e}{dh} \bigg|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

因此，电场力产生的压强为

$$p_e = \frac{F_e}{b d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

液体不断上升，直到这一压强与升高的液柱所对应的静液压强 $\rho g h$ 平衡。

令初始与最终总能量相等，一般描述的是运动过程中可能出现的一个转折点，而不是静态平衡。平衡条件是上面所用的能量导数为零。

讨论。

对于 $a > 0$ ，定义

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

在 $h \geq 0$ 的范围内，

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

因此恰有一个非负解。这一平衡是稳定的：增大 h 会使向下的重力增大，同时使向上的电场力减小。具体地，

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = bd \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

上述推导适用于液面位于极板上下两端之间的情况。将 $h = H$ 代入平衡方程，得到

$$H\varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_c^2}{2\rho g},$$

由此得到上面给出的阈值 E_c 。若 $E > E_c$ ，则顶部以下不存在液面部分上升的平衡状态：极板间隙将被液体完全充满。确定上边缘附近或其上方的液面具体形状需要考虑边缘电场，而平行板近似无法确定这一形状。

当电容仅有微小变化，即

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

时，电场强度近似保持其初始值，且

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g}.$$

特别地，当 $E \rightarrow 0$ 或 $\varepsilon_r \rightarrow 1$ 时，上升高度趋于零。

对于与外界电路隔离的电容器，增大介电常数并不总会增大上升高度，因为这也会使电场减弱。在 E, H 固定时，大介电常数极限下有

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2\rho g(\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

为进行更定量的分析，令

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

由平衡方程可得

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

因此，在施加几何限制 $h \leq H$ 之前，改变介电常数所能达到的最大高度为

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

该最大值在 $x = 1$ ，即 $a = 2/\sqrt{B}$ 时取得。若这一最大值超过 H ，则在一定的介电常数范围内，液体可以完全充满极板间隙。

最后，如果电容器始终连接着电压源，则 $V = Ed$ 和 $\mathcal{E} = E$ 保持不变。计入电源的作用后，有效电势能为 $-CV^2/2$ 。此时，平衡条件给出

$$\rho gh = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2,$$

由此得到“答案”部分中的恒定电压结果。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 4：两种介质之间的平凸透镜；比累对切透镜

一块直径为 $2r$ 、曲率半径为 R 、折射率为 n_o 的平凸薄透镜，其左侧为空气 ($n_1 = 1$)，右侧为折射率 $n_2 \neq 1$ 的透明介质。透镜的凸面朝向空气。在空气中，沿主光轴距透镜 s_1 处有一个单色点光源。

a) 利用高斯近似证明：由距透镜的距离 s_2 表示的像的位置与光源的位置之间存在如下关系：

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

其中， f_1 和 f_2 分别为透镜在空气中和在折射率为 n_2 的介质中的焦距。

注意：所有折射率均为绝对折射率。

b) 沿垂直于透镜平面的方向将透镜切成相等的两半。将这两半移开，使其间距为 $\delta \ll r$ (比累对切透镜)。在所得系统的对称轴上，距透镜 s_1 ($s_1 > f_1$) 处放置一个点光源 (图 4.1)。透镜右侧距透镜 d 处有一个屏 E。屏与透镜的平面平行。如果透镜右侧为空气，屏上会出现 N 条干涉条纹。

求 N 随波长变化的函数关系。

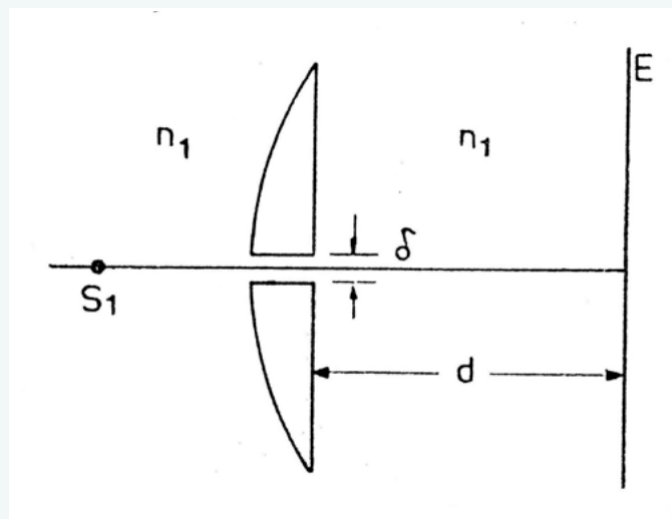


图 4.1

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 焦距和成像公式为

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}, \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

• b) 令

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f}.$$

对于通常的屏的位置，即孔径外缘不限制干涉区域的情形，

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}.$$

这要求

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

这里， N 是用重叠区域的宽度除以条纹间距得到的通常意义下的条纹数。

考虑有限孔径的截光作用时，相应的条纹数为

$$\bar{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max \left\{ 0, \min \left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0 \right] \right\}, & d > v. \end{cases}$$

当重叠区域的宽度为正时，计入边界上的极大值，亮纹极大值的整数个数为

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\bar{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

解答

a) 光在两个表面上的折射

采用薄透镜近似和高斯近似：忽略两个表面之间的距离，并且仅保留光线高度和角度的一阶项。取光从左向右传播，实光源的 s_1 为正，实像的 s_2 为正。

考虑一条在高度 y 处入射的光线。它与光轴的夹角为

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

由于曲率中心位于凸面的右侧，表面法线与光轴的夹角为

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

设 θ_o 为透镜内部光线与光轴的夹角。在小角度近似下，由斯涅尔定律得

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

因此

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

在法线平行于光轴的平面处，

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

对于到达轴上像点的光线，

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

联立这些方程并约去 y ，得到

$$\boxed{\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}}.$$

前焦距是使出射光线平行时的物距。令 $s_2 \rightarrow \infty$ ，得

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

后焦距是平行光入射时的像距。令 $s_1 \rightarrow \infty$ ，得

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

因此，将成像公式除以 $(n_o - 1)/R$ ，得到

$$\boxed{\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1}.$$

若将 s_2 视为带符号的距离，同一关系也适用于虚像。

b) 两半透镜所成的像

现在透镜两侧的介质均为空气，因此焦距为

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

每一半透镜都在纵向距离 v 处成像，其中

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f} > 0.$$

选取垂直于切口的横向坐标 y 。图中所示的完整间隙宽度为 δ ，因此两半透镜的光轴位于

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

相对于每一半透镜的光轴，光源的高度为 $-c_{\pm}$ 。横向放大率为 $-v/s_1$ ，由此得到像的位置

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

因此，两个像之间的距离为

$$\boxed{b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}}.$$

这两个像充当相干次级光源。镜面对称性使它们的相位相同，因此中央条纹是亮纹。

条纹间距

对于位于像平面之后的屏，令

$$L = d - v > 0.$$

在屏上坐标为 y 的位置，来自两个像的光线在近轴近似下的光程差为

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

因此，亮纹满足

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

其间距为

$$\boxed{\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d-v)}{\delta v}}.$$

在近轴近似下，这些条纹是平行于切口的直线。

光束重叠区域的宽度

我们采用光束的几何包络，并忽略孔径边缘的衍射。

通过每一半透镜光心的光线不发生偏折。这两条光线到达屏上的位置为

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

只要孔径外缘不截去重叠区域，其宽度就是

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

用这一宽度除以条纹间距，得到

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

代入 $v = fs_1/(s_1 - f)$ ，得

$$\boxed{N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}}.$$

当几何参数和折射率固定时，该式与 $1/\lambda$ 成正比。

有限孔径条件

题目未说明屏相对于像平面的位置，因此还必须检验重叠条件。

一条通过上半透镜中高度 y_0 处的光线，会经过高度为 y_+ 的像点。它在屏上的高度为

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v} \right) y_0 + \frac{d}{v} y_+.$$

上半透镜所占的范围为

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

对于 $d > v$ ，定义

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

在屏的中央截线上，上方光束所占的范围为

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

下方光束所占的范围为

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

它们的重叠区域关于 $y = 0$ 对称，宽度为

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

因此，通常的表达式 N_0 适用的条件是

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

在部分重叠的情形下，

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

这就证明了答案中给出的 $\overline{N} = W/\beta$ 的一般表达式。对于 $d \leq v$ ，两束几何光束始终位于对称轴的两侧，互不重叠。

最后，当 $W > 0$ 时，亮纹极大值对应于满足下式的整数：

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

计入恰好位于边界上的极大值，得到

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。