

IPhO 1972

Teorik sorular ve çözümler · Bükreş, Romanya · 4 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1972/

Soru 1: Eğik düzlem üzerindeki üç silindir

Kütleleri, uzunlukları ve dış yarıçapları aynı olan üç silindir başlangıçta bir eğik düzlem üzerinde durmaktadır. Eğik düzlemdeki kayma sürtünmesi katsayısı μ bilinmektedir ve tüm silindirler için aynı değerdedir. Birinci silindirin içi boştur (boru), ikinci silindir homojen ve doludur; üçüncü silindirde ise tıpkı birincideki gibi bir boşluk vardır, ancak bu boşluk kütleleri ihmal edilebilir iki kapakla kapatılmış ve silindirin duvarlarıyla aynı yoğunluğa sahip bir sıvıyla doldurulmuştur. Sıvı ile silindir duvarı arasındaki sürtünme ihmal edilebilir kabul edilmektedir. Birinci silindirin yapıldığı malzemenin yoğunluğu, ikinci veya üçüncü silindirin yapıldığı malzemenin yoğunluğunun n katıdır.

Aşağıdakileri belirleyiniz:

- Kayma olmaması durumunda silindirlerin doğrusal ivmeleri. Tüm ivmeleri karşılaştırınız.
- Hiçbir silindirin kaymaması için eğik düzlemin α açısının sağlaması gereken koşul.
- Üç silindirin de kayarak yuvarlanması durumunda açısal ivmelerinin birbirlerine oranları. Bu ivmeleri karşılaştırınız.
- Sıvı kütlelerinin m_l olduğu bilindiğine göre, sıvı içeren silindirin kayması durumunda sıvı ile silindirin duvarları arasındaki etkileşim kuvveti.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Ortak dış yarıçap R , i silindirin katı kısmının açısal ivmesi ise β_i olsun. $\hat{e}_{\parallel}$ eğim boyunca aşağı yönü, $\hat{e}_{\perp}$ ise düzleme dik ve düzlemden dışarı yönü göstere. Aşağıdaki karşılaştırmalarda silindirlerde gerçekten boşluk bulunduğu, $n > 1$ olduğu ve $0 < \alpha < \pi/2$ olduğu varsayılmaktadır.

- a)** Eğim boyunca aşağı yöndeki ivmeler

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha$$

şeklinde ve

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

- **b)** Verilen μ aynı zamanda sınır statik sürtünme katsayısını da temsil ediyorsa,

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

Sınırlayıcı koşulu 1. silindir belirler. Eğer μ yalnızca kinetik sürtünmeyi ifade ediyorsa, kaymama koşulunu kesin olarak belirlemek için statik sürtünme katsayılarının da bilinmesi gerekir.

- **c)** Kayma sürtünmesi sıfırdan farklı olduğunda,

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Eşdeğer olarak, ivmelerin tersleri şu bağıntıyı sağlar:

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n^2}.$$

- **d)** Duvarların sıvıya uyguladığı bileşke kuvvet

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

Dolayısıyla etkileşim kuvvetinin büyüklüğü

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Sıvıya etki eden kuvvet, dışa dönük normalle eğim boyunca yukarı yöne doğru $\arctan \mu$ açısı yapar. Duvarlara etki eden kuvvet eşit büyüklükte ve zıt yönlüdür.

Çözüm

Ortak toplam kütle M , ortak uzunluk L , 1. ve 3. silindirlerin boşluk yarıçapı ise r olsun. 2. silindir, 3. silindir duvarlarının ve içindeki sıvının yoğunluğunu ρ ile gösterelim. 1. silindir yoğunluğu $n\rho$ 'dur.

Kütlelerin eşitliğinden

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Buna göre üçüncü silindir kabuğunun kütlesi ve içindeki sıvının kütlesi

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n-1}{n}.$$

Silindirleri rijit kabul ediyor, yuvarlanma direncini ihmal ediyor ve tamamen kapalı hacimdeki sıvıyı sıkıştırılmaz ve viskozitesiz olarak modelliyoruz. Dairesel duvarın dönmesi, bu sıvıyı teğetsel harekete zorlamaz. Basınç kuvvetleri silindir eksenini etrafında tork oluşturmadığından, başlangıçta dönmeyen sıvı kendi etrafında dönmeden silindirle birlikte öteleme hareketi yapar.

Böylece M kütlelerinin tamamı öteleme hareketine katılırken, 3. silindir dönme eylemsizliğine yalnızca kabuk katkıda bulunur. Düzgün yoğunluklu, halka kesitli bir silindir eksenini etrafındaki $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ eylemsizlik momentini kullanarak,

$$I_1 = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{M}{n}(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n^2}.$$

Burada I_3 , dönen kabuğun eylemsizlik momentini belirtir.

Boyutsuz eylemsizlikleri şöyle tanımlayalım:

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

a) Kayma olmadan doğrusal ivmeler

Eğim boyunca yukarı yönlü statik sürtünme kuvveti f_i olsun. Düzlem boyunca Newton'ın ikinci yasası ve silindir eksenini etrafındaki dönme denklemi şu bağıntıları verir:

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

Kaymadan yuvarlanma için,

$$a_i = R\beta_i.$$

Dolayısıyla,

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = Mk_i a_i,$$

ve buradan

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

Üç eylemsizlik değerini yerine koyarsak,

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.$$

$n > 1$ için,

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

k_i arttıkça a_i azaldığından,

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

Sıvıyla dolu silindirin ivmesi en büyüktür; çünkü içindeki sıvı, dönme eylemsizliğini artırmadan öteleme hareketi yapan kütleyi artırır.

b) Tüm silindirlerin kaymadan yuvarlanması koşulu

Düzleme dik yönde ivme olmadığından, her silindire etki eden normal tepki kuvveti

$$N = Mg \cos \alpha.$$

Yuvarlanma için gereken statik sürtünme kuvveti

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

olduğundan,

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

Statik sürtünme ile kayma sürtünmesini açıkça ayırt etmek için, i silindirin sınır statik sürtünme katsayısını $\mu_{s,i}$ ile gösterelim. Üçünün de kaymadan yuvarlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2+2n-1}{2n-1} \right\}.$$

Alışılmış tek katsayılı idealleştirmede, $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$. $k_1 > k_2 > k_3$ olduğundan, normal tepki kuvvetine oranla en büyük sürtünme kuvvetini 1. silindir gerektirir ve dolayısıyla sınırı o belirler:

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{veya} \quad \alpha \leq \arctan \left(\mu \frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

Eşitlik, 1. silindir için statik sürtünmenin sınır değerine karşılık gelir.

c) Üçü de kayarken açısal ivme oranları

Belirtilen hareket rejiminde silindirler, düzleme göre eğim boyunca aşağı yönde kayar. Kinetik sürtünme yukarı yönde etki eder ve her biri için aynı büyüklüktedir:

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

Dolayısıyla öteleme ivmeleri eşittir:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Açısal ivmeleri,

$$I_i \beta_i = fR,$$

bağıntısından, kaymama koşulu olan $a = R\beta$ bağıntısı uygulanmadan elde edilir. Sonuç olarak,

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

Ortak çarpan sadeleştirilirse

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2.$$

Birbirlerine oranları

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n-1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n-1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

$n > 1$ için,

$$2n-1 > n, \quad n^2 - (2n-1) = (n-1)^2 > 0,$$

dolayısıyla

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Bir tutarlılık kontrolü olarak, durgun hâlden başlayarak eğim boyunca aşağı yönde kayma, $a_{sl} - R\beta_i > 0$ olmasını gerektirir. Tek katsayılı modelde üçü de bu koşulu şu durumda sağlar:

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2+2n-1}{2n-1}.$$

Eğim arttıkça kaymaya en son başlayan, 3. silindirdir.

d) Sıvı ile duvarlar arasındaki etkileşim kuvveti

Sıvının kütle merkezi, kayan silindirle birlikte eğim boyunca aşağı yönde ivmelenir:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Duvarların sıvıya uyguladığı bileşke kuvvetin bileşenleri $F_{\parallel}$ ve $F_{\perp}$ olsun; pozitif yönler, eğim boyunca aşağı ve düzleme dik olarak düzleminden dışarı yönler olsun. Newton'ın ikinci yasasını yalnızca sıvıya uygularsak,

$$\begin{aligned} F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha &= m_l a_{sl}, \\ F_{\perp} - m_l g \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Buradan

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

Bu bileşenler bileşke basınç kuvvetinden kaynaklanır; eğim boyunca yukarı yönlü bir bileşenin bulunması, sıvı ile duvar arasında viskoz sürtünme olmasını gerektirmez. Dolayısıyla,

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$$

ve

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Dışa dönük normalden eğim boyunca yukarı yöne doğru yaptığı açı

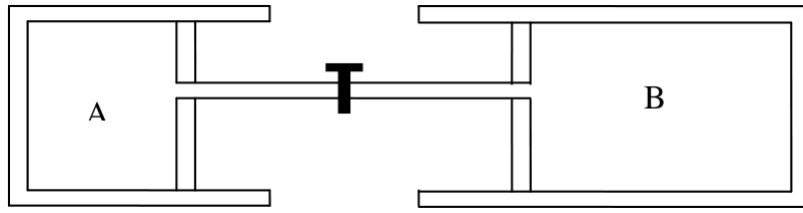
$$\theta = \arctan \mu.$$

Newton'ın üçüncü yasasına göre sıvı, duvarlara zıt yönde kuvvet uygular.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Pistonları birbirine bağlı iki silindirde argon ve oksijen

Çapları eşit olan A ve B silindirlerinin içinde, kütleleri ihmal edilebilen ve rijit bir çubukla birbirine bağlanmış iki piston bulunmaktadır. Pistonlar serbestçe hareket edebilmektedir. Çubuk, üzerinde bir vana bulunan kısa bir borudur. Vana başlangıçta kapalıdır (şek. 2.1).



Şek. 2.1

A silindiri ve pistonu adyabatik olarak yalıtılmıştır; B silindiri ise sıcaklığı $\theta = 27^\circ\text{C}$ olan bir termostatla ısıl temas hâlinindedir.

Başlangıçta A silindirinin pistonu sabitlenmiştir ve silindirin içinde atmosfer basıncından daha yüksek bir basınçta, kütlesi $m = 32 \text{ kg}$ olan argon bulunmaktadır. B silindirinin içinde ise normal atmosfer basıncında bir miktar oksijen bulunmaktadır.

A silindirin pistonu serbest bırakıldığında yeterince yavaş (kuazistatik olarak) hareket eder ve dengeye ulaşıldığında gazın hacmi başlangıçtaki değerinin sekiz katına çıkmış, B silindirindeki oksijenin yoğunluğu ise iki katına çıkmıştır. Termostatın $Q' = 747,9 \cdot 10^4 \text{ J}$ ısı aldığını bilerek aşağıdakileri belirleyiniz:

- Moleküllerin pistonla esnek çarpışmalarını inceleyerek, gazların kinetik teorisi temelinde A silindirinde gerçekleşen sürecin ısı denkleminin $TV^{2/3} = \text{sabit}$ olduğunu gösteriniz.
- Argonun başlangıç ve son durumlarındaki p , V ve T parametrelerini hesaplayınız.
- İki silindiri birbirinden ayıran vana açıldığında gaz karışımının son basıncını hesaplayınız.

Argonun kilomolar kütlesi $\mu = 40 \text{ kg/kmol}$ değerindedir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Aşağıdakiler, istenen adyabatik bağıntıdan, son mekanik dengeden ve toplam enerji korunumundan elde edilen biçimsel sonuçlardır. Kuazistatik ifadesi fiziksel bir tutarlılık sorunu içermektedir: Piston serbest bırakıldığında argonun basıncı $64p_0$, oksijeninki ise yalnızca p_0 olduğundan kütleli piston düzeneği kuazistatik olarak hareket edemez.

- a) $TV^{2/3} = \text{sabit}$, eşdeğer olarak $pV^{5/3} = \text{sabit}$.
- b) Vana açılmadan önce argonun durumları şöyledir:

Durum	Basınç p	Hacim V	Sıcaklık T
Başlangıç	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6 \text{ Pa}$	1.03 m^3	$1.00 \times 10^3 \text{ K}$
Son	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5 \text{ Pa}$	8.20 m^3	250 K

- c) Vana açılıp ısı dengeye ulaşıldıktan sonra,

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75}p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Burada p_0 normal atmosfer basıncıdır.

Çözüm

Her iki gazı da ideal kabul edelim ve kısa bağlantı borusunun hacmini ihmal edelim. Şu değerleri kullanalım:

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ K}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Argonun madde miktarı

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ kmol}.$$

1 ve 2 alt indisleri, sırasıyla başlangıç durumunu ve vana hâlâ kapalıyken ulaşılan denge durumunu göstermektedir.

a) Moleküler çarpışmalardan türetim

Argon pistonunun alanı S olsun ve piston, moleküllerin ısı hızlarına göre küçük olan u süratiyle dışarı doğru hareket etsin. Kütlesi m_0 olan ve pistona dik hız bileşeni v_x ile yaklaşan bir argon atomunu ele alalım.

Pistonun anlık durgunluk referans sisteminde, esnek bir çarpışma dik hız bileşeninin yönünü tersine çevirir. Dolayısıyla laboratuvar referans sisteminde,

$$v'_x = 2u - v_x.$$

Diğer hız bileşenleri değişmeden kalır. Bu nedenle atomun enerji değişimi

$$\Delta\varepsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0u(v_x - u).$$

Pistona aktarılan itme

$$I = 2m_0(v_x - u),$$

dolayısıyla

$$\Delta\varepsilon = -uI.$$

Moleküler çarpışmaların tümü üzerinden toplandığında, birim zamanda aktarılan itme $p_A S$ kuvvetine eşittir. Buna göre,

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

ya da

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

Dengedeki tek atomlu bir ideal gaz için kinetik teori şu bağıntıları verir:

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

Buradan

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

Yavaş hareket varsayımı, moleküller arası çarpışmaların izotropik bir denge hız dağılımını korumasına olanak verir.

Enerji denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = - \frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

Dolayısıyla

$$\frac{dT_A}{T_A} = - \frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

İntegral alındığında,

$$\boxed{T_A V_A^{2/3} = \text{sabit}}.$$

Bu bağıntı $p_A V_A = n_A R T_A$ ile birleştirildiğinde ayrıca

$$\boxed{p_A V_A^{5/3} = \text{sabit}}.$$

b) Argonun başlangıç ve son durumları

Argonun belirtilen genişlemesinden

$$V_{A2} = 8V_{A1}.$$

a) kısmını kullanarak,

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

Böylece

$$T_{A2} = \frac{1}{4}T_{A1}.$$

Vana açılmadan önce oksijenin kütlesi değişmez. Bu nedenle yoğunluğunun iki katına çıkması,

$$V_{B2} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

anlamına gelir. Başlangıç ve sondaki her iki denge durumunda da oksijen, termostat sıcaklığı T_0 'dadır.

Bu durumda ideal gaz denklemi

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2p_0.$$

sonucunu verir.

Son mekanik denge durumunda, birbirine bağlı piston düzeneğine etki eden kuvvetler dengelenir. Piston alanları eşit olduğundan atmosferin uyguladığı kuvvetler birbirini götürür ve geriye

$$p_{A2} = p_{B2} = 2p_0.$$

kalır. Argonun adyabatik bağıntısı şimdi

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

sonucunu verir.

Sıcaklıkları belirlemek için her iki gazı birlikte ele alalım. Pistonların yer değiştirmelerinin ve kesit alanlarının eşit olması,

$$dV_A = -dV_B.$$

bağıntısını gerektirir. Dolayısıyla gazların toplam hacmi sabittir ve atmosfere karşı yapılan net iş sıfırdır. Çubuk aracılığıyla aktarılan iş, birleşik sistemin içindeki bir iş aktarımıdır. Pistonlar hem başlangıçta hem de sonda durgun olduğundan, toplam enerji korunumu

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

bağıntısını verir. Oksijenin başlangıç ve son sıcaklıkları aynı olduğundan, ideal bir gaz için,

$$\Delta U_B = 0.$$

Bu nedenle

$$Q' = \frac{3}{2}n_A R(T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8}n_A R T_{A1}.$$

$Q' = 7.479 \times 10^6$ J değeriyle,

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

ve

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

Son olarak,

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

ve

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

Üç anlamlı basamakla,

$$\boxed{(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})}$$

ve

$$\boxed{(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K})}.$$

c) Vana açıldıktan sonraki son basınç

Piston geometrisinden

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

$V_{A2} = 8V_{A1}$ ve $V_{B2} = V_{B1}/2$ kullanılarak,

$$7V_{A1} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

Buradan

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

ve sabit toplam hacim

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

Vana açıldıktan sonra gazlar karışır ve sonunda termostat sıcaklığı T_0 'a ulaşır. A silindiri yalıtılmış olsa da içindeki gaz, açık bağlantı üzerinden B silindiriyle enerji alışverişinde bulunabilir.

Korunan oksijen miktarı şu bağıntıyı sağlar:

$$n_B R T_0 = p_0 V_{B1} = 14p_0 V_{A1}.$$

Argon için,

$$n_A R T_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2p_0 V_{A1}.$$

Son karışıma ideal gaz denklemini uygulayarak,

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B) R T_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14)p_0 V_{A1}}{15V_{A1}}.$$

Dolayısıyla

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 = 2.2133 p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

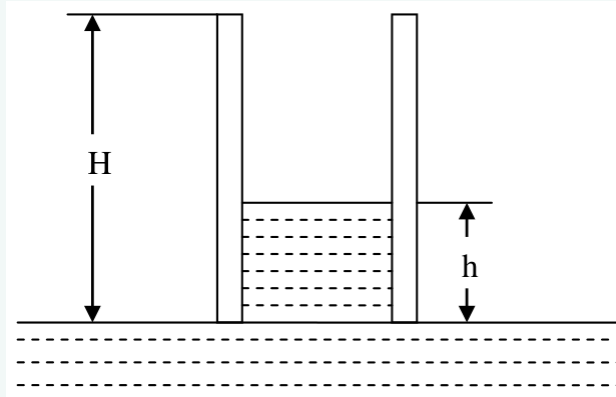
Soru 3: Yüklü bir kondansatörün levhaları arasında yükselen dielektrik SIVI

Dikdörtgen levhalı düzlem bir kondansatör, alt kısmı dielektrik bir sıvıyla temas edecek şekilde düşey konumda sabitlenmiştir (şek. 3.1)

Sıvının levhalar arasındaki yüksekliğini, h , belirleyiniz ve bu olayı açıklayınız.

Kılcallık etkileri ihmal edilmektedir.

Levhalar arasındaki uzaklığın, levhaların doğrusal boyutlarından çok daha küçük olduğu varsayılmaktadır.



Şek. 3.1

Bilinenler: yüklü kondansatörün başlangıçtaki elektrik alan şiddeti E , sıvının yoğunluğu ρ ve bağıl elektriksel geçirgenliği ϵ_r ile kondansatör levhalarının yüksekliği H .

Tartışınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 3 — Yükseklik:** Yüklü kondansatörün yalıtılmış olduğunu varsayarak $a = \varepsilon_r - 1 > 0$ tanımını yapalım. h_* ,

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

denkleminin negatif olmayan tek çözümü olsun. $h_* < H$ olduğunda denge yüksekliği $h = h_*$ olur. Sıvı,

$$E \geq E_c = \varepsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}}.$$

olduğunda aralığı en üste kadar doldurur; ideal yaklaşımda $h = H$ olur.

- **Soru 3 — Açıklama ve tartışma:** Kutuplanma, yukarı yönlü bir elektriksel kuvvet oluşturur. Sıvının levhaların üst ucuna ulaşmadığı bir yükselme dengesinde bu kuvvetin oluşturduğu basınç, hidrostatik basıncı dengeler:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\varepsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

Bu denge tektir ve kararlıdır. $E = 0$ veya $\varepsilon_r = 1$ ise yükselme olmaz.

- **Soru 3 — Sabit gerilim seçeneği:** Bunun yerine bir kaynak başlangıç gerilimini sabit tutarsa sonuç

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2\rho g} \right\}.$$

olur.

Çözüm

Soru 3. *Başlangıçtaki* alana atıfta bulunulması ve bir gerilim kaynağının belirtilmemiş olması, serbest yükü sabit kalan, yalıtılmış bir kondansatörün kastedildiğini düşündürür. Önce bu durumu çözelim.

Levhaların genişliği b , aralarındaki uzaklık d ve dışarıdaki sıvı yüzeyinin konumu $z = 0$ olsun. Sıvı haznesini, bu düzeyin sabit kalmasını sağlayacak kadar büyük kabul ediyoruz. Sıvı doğrusal, homojen ve sıkıştırılmaz bir dielektriktir; havanın elektriksel geçirgenliği ε_0 'dır. d , levha boyutlarından çok daha küçük olduğu için sığaya ilişkin kenar etkisi düzeltmeleri ihmal edilir.

Yükselme sırasında sığa ve alan. Sıvı $h < H$ yüksekliğine kadar yükseldiğinde, sıvıyla dolu ve havayla dolu kısımlar paralel bağlı iki kondansatör oluşturur. Dolayısıyla

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b (H - h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

burada

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

Başlangıçta $V_0 = Ed$ olduğundan korunan yük

$$Q = C_0 Ed.$$

olur. Buna göre yükselme sonrasındaki alan

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \boxed{\frac{E}{1 + ah/H}}.$$

olur. Dolayısıyla sıvı yalıtılmış kondansatöre girdikçe alan azalır.

Denge yüksekliği. Yük sabitken elektriksel enerji

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

olur.

Sıvıyı hazneden levhalar arasındaki aralığa yükseltmek için gereken kütleçekim potansiyel enerjisi

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

olur.

Statik dengede toplam enerji minimumdur. Bu nedenle

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = b d \left[\rho g h - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\rho g h = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

ya da eşdeğer olarak,

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2 \rho g}}.$$

Bu üçüncü dereceden denklem, verilen büyüklüklerden denge yüksekliğini belirler. Hem b hem de d sadeleşir; bu da değerlerinin neden gerekli olmadığını açıklar.

Fiziksel açıklama. Dielektriğin içeri girmesi sığayı artırır ve sabit yükte elektriksel enerjiyi azaltır. Buna karşılık gelen yukarı yönlü kuvvet

$$F_e = - \left. \frac{dU_e}{dh} \right|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

olur. Dolayısıyla bu kuvvetin oluşturduğu elektriksel basınç

$$p_e = \frac{F_e}{b d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

olur. Sıvı, bu basınç yükselmiş sıvı sütunundan kaynaklanan $\rho g h$ hidrostatik basıncını dengeleyene kadar yükselir.

Başlangıç ve son toplam enerjileri eşitlemek, genellikle statik dengeyi değil, hareket sırasında olası bir geri dönüş noktasını tanımlar. Denge koşulu, yukarıda kullanıldığı gibi enerji türevinin sıfır olmasıdır.

Tartışma.

$a > 0$ için

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

tanımını yapalım. $h \geq 0$ için

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

Dolayısıyla negatif olmayan yalnızca bir çözüm vardır. Bu çözüm karardır: h 'nin artması, aşağı yönlü kütleçekim kuvvetini artırırken yukarı yönlü elektriksel kuvveti azaltır. Açıkça,

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = bd \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

Bu türetim, levhaların alt ve üst uçları arasında bulunan bir sıvı yüzeyi için geçerlidir. Denge denkleminde $h = H$ yerine konursa

$$H\varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_c^2}{2\rho g},$$

elde edilir; bu da yukarıda belirtilen E_c eşliğini verir. $E > E_c$ ise üst ucun altında kısmi bir yükselme dengesi yoktur: aralık tamamen dolar. Üst kenarların yakınında veya üzerinde yüzeyin ayrıntılı biçimini belirlemek için, paralel levha yaklaşımının belirleyemediği kenar alanları gerekir.

Sığa yalnızca çok az değiştiğinde,

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

alan yaklaşık olarak başlangıç değerinde kalır ve

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g}.$$

Özellikle, $E \rightarrow 0$ veya $\varepsilon_r \rightarrow 1$ iken yükselme sıfıra yaklaşır.

Yalıtılmış bir kondansatörde elektriksel geçirgenliğin artırılması yükselmeyi her zaman artırmaz, çünkü alanı da azaltır. Sabit E, H için büyük elektriksel geçirgenlik limiti

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2\rho g(\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

olur. Daha nicel bir inceleme için

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

tanımlarını yapalım. Denge denklemi

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla $h \leq H$ geometrik sınırı uygulanmadan önce, elektriksel geçirgenliğe göre maksimum yükseklik

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

olup bu değere $x = 1$, yani $a = 2/\sqrt{B}$ olduğunda ulaşılır. Bu maksimum H 'yi aşarsa bir elektriksel geçirgenlik aralığında tam dolma mümkündür.

Son olarak, bir gerilim kaynağı bağlı kalırsa $V = Ed$ ve $\mathcal{E} = E$ sabit kalır. Kaynak hesaba katıldığında etkin elektriksel potansiyel enerji $-CV^2/2$ olur. Bu durumda denge koşulu

$$\rho gh = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2,$$

eşitliğini verir ve Cevaplar bölümündeki sabit gerilim sonucuna ulaşılır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 4: İki ortam arasındaki düzlem-dışbükey mercek; Billet yarık merceği

Çapı $2r$, eğrilik yarıçapı R ve kırılma indisi n_o olan ince bir düzlem-dışbükey mercek, sol tarafında hava ($n_1 = 1$), sağ tarafında ise kırılma indisi $n_2 \neq 1$ olan saydam bir ortam bulunacak şekilde yerleştirilmiştir. Merceğin dışbükey yüzü havaya dönüktür. Havada, asal optik eksen üzerinde ölçüldüğünde mercekten s_1 uzaklıkta, tek renkli ışık yayan noktasal bir kaynak bulunmaktadır.

a) Gauss yaklaşımını kullanarak, mercekten s_2 uzaklığıyla verilen görüntü konumu ile ışık kaynağının konumu arasında şu bağıntının bulunduğunu gösteriniz:

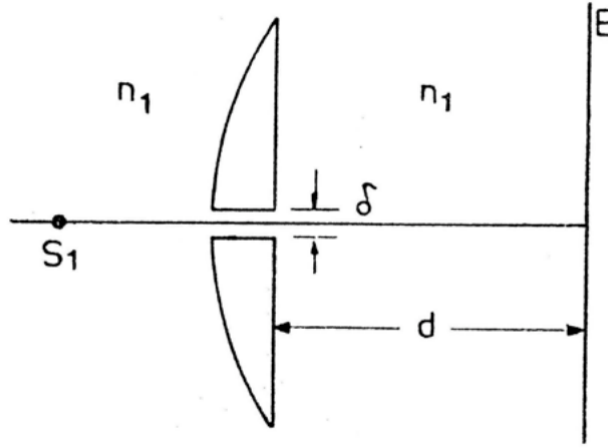
$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

Burada f_1 ve f_2 , merceğin sırasıyla havadaki ve kırılma indisi n_2 olan ortamdaki odak uzaklıklarıdır.

Not: Tüm kırılma indisleri mutlak kırılma indisleridir.

b) Mercek, düzlem yüzüne dik olarak iki eşit parçaya kesilir. Bu parçalar, aralarında $\delta \ll r$ uzaklığı olacak şekilde birbirinden uzaklaştırılır (Billet merceği). Elde edilen sistemin simetri eksenine, s_1 uzaklıkta ($s_1 > f_1$) noktasal bir ışık kaynağı yerleştirilir (Şek. 4.1). Merceğin sağ tarafında, d uzaklıkta bir E ekranı bulunmaktadır. Ekran, merceğin düzlem yüzüne paraleldir. Merceğin sağ tarafında hava bulunması durumunda bu ekranda N girişim saçacağı oluşmaktadır.

N 'yi dalga boyunun fonksiyonu olarak belirleyiniz.



Şek. 4.1

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **a)** Odak uzaklıkları ve görüntü denklemi şöyledir:

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}, \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

- **b)** Şu tanımları yapalım:

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f}.$$

Açıklığın dış kenarlarının girişim şeridini sınırlamadığı olağan ekran konumu için,

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2 (s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - f s_1]}.$$

Bunun için şu koşullar gereklidir:

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Burada N , örtüşme genişliğinin saçak aralığına bölünmesiyle elde edilen alışılmış sayıdır.

Sonlu açıklığın sınırlayıcı etkisi de hesaba katıldığında, karşılık gelen sayı şöyledir:

$$\bar{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max \left\{ 0, \min \left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0 \right] \right\}, & d > v. \end{cases}$$

Örtüşme genişliği pozitif olduğunda, sınırdaki maksimumlar da dahil olmak üzere aydınlık maksimumların tam sayı sayısı şöyledir:

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\bar{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Çözüm

a) İki yüzeyde kırılma

İnce mercek ve Gauss yaklaşımlarını kullanalım: iki yüzey arasındaki uzaklığı ihmal edelim ve ışın yükseklikleri ile açılarındaki yalnızca birinci mertebeden terimleri turalım. Yayılma yönünü soldan sağa alalım; gerçek kaynak için s_1 , gerçek görüntü için s_2 pozitif olsun.

y yüksekliğinde gelen bir ışını ele alalım. Optik eksenle yaptığı açı şöyledir:

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

Eğrilik merkezi dışbükey yüzeyin sağında olduğundan, yüzey normalinin açısı şöyledir:

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

Mercek içindeki ışının açısı θ_o olsun. Küçük açı yaklaşımında Snell yasası şu bağıntıyı verir:

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

Buradan

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

Normali optik eksene paralel olan düzlem yüzde,

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

Eksen üzerindeki görüntüye ulaşan bir ışın için,

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

Bu denklemleri birleştirip y 'yi sadeleştirince şu sonuç elde edilir:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}.$$

Ön odak uzaklığı, çıkan ışınları paralel hâle getiren kaynak uzaklığıdır. $s_2 \rightarrow \infty$ alındığında,

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Arka odak uzaklığı, paralel gelen ışınlar için görüntü uzaklığıdır. $s_1 \rightarrow \infty$ alındığında,

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

Dolayısıyla görüntü denklemini $(n_o - 1)/R$ 'ye bölünce şu bağıntı elde edilir:

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

s_2 işaretli bir uzaklık olarak ele alınırsa aynı bağıntı sanal görüntüleri de kapsar.

b) İki yarının oluşturduğu görüntüler

Artık her iki dış ortam da havadır; dolayısıyla odak uzaklığı şöyledir:

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Her yarı, boyuna doğrultuda v uzaklığında bir görüntü oluşturur; burada

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f} > 0.$$

Enine koordinat y 'yi kesime dik seçelim. Şekilde gösterilen aralığın tamamı δ olduğundan, iki yarının eksenleri şu konumlardadır:

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

Bir yarım merceğin eksenine göre kaynak yüksekliği $-c_{\pm}$ 'dir. Enine büyütme $-v/s_1$ olduğundan görüntü konumları şöyle bulunur:

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

Sonuç olarak, iki görüntü arasındaki uzaklık şöyledir:

$$b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}.$$

Bu görüntüler eşevreli ikincil kaynaklar gibi davranır. Yansıma simetrisi fazlarının eşit olmasını sağlar; dolayısıyla merkezî saçak aydınlıktır.

Saçak aralığı

Görüntü düzleminin ötesindeki bir ekran için şu tanıımı yapalım:

$$L = d - v > 0.$$

Ekranın y koordinatında, iki görüntüden gelen ışınların paraksiyal yaklaşımdaki yol farkı şöyledir:

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

Böylece aydınlık saçaklar şu koşulu sağlar:

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

ve aralıkları şöyledir:

$$\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d - v)}{\delta v}.$$

Paraksiyal yaklaşımda bunlar kesime paralel doğrulardır.

Örtüşen demetlerin genişliği

Geometrik ışın demeti zarflarını kullanıyor ve açıklık kenarlarındaki kırınımı ihmal ediyoruz.

Her yarının optik merkezinden geçen ışın sapmaz. Bu iki ışın ekrana şu konumlarda ulaşır:

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1}\right).$$

Açıklığın dış kenarlarının örtüşmeyi sınırlamaması koşuluyla, örtüşme genişliği dolayısıyla şöyledir:

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Bu genişliği saçak aralığına bölünce şu sonuç elde edilir:

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

$v = fs_1/(s_1 - f)$ yerine konulduğunda,

$$N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}.$$

Geometri ve kırılma indisi sabitken bu ifade $1/\lambda$ ile orantılıdır.

Sonlu açıklık koşulları

Soru metni ekranın görüntü düzlemine göre konumunu belirtmediğinden, örtüşme koşulları da kontrol edilmelidir.

Üst yarıdan y_0 yüksekliğinde geçen bir ışın, bu yarının y_+ yüksekliğindeki görüntüsünden geçer. Ekrandaki yüksekliği şöyledir:

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v} \right) y_0 + \frac{d}{v} y_+.$$

Üst yarı şu aralığı kaplar:

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

$d > v$ için şu tanıımı yapalım:

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

Ekranın merkezî kesitinde üst demet şu aralığı kaplar:

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

alt demet ise şu aralığı kaplar:

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

Örtüşmeleri $y = 0$ 'a göre simetrik ve genişliği şöyledir:

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

Dolayısıyla alışılmış N_0 ifadesi şu koşulda geçerlidir:

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Kısmi örtüşme durumunda,

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

Bu, Cevaplar bölümünde $\overline{N} = W/\beta$ için verilen genel ifadeyi kanıtlar. $d \leq v$ için iki geometrik ışın demeti simetri ekseninin karşıt taraflarında kalır ve örtüşmez.

Son olarak, $W > 0$ olduğunda aydınlık maksimumlar şu koşulu sağlayan tam sayılarda oluşur:

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

Tam sınır üzerinde bulunan maksimumlar da dahil edildiğinde şu sonuç elde edilir:

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.