

IPhO 1972

Теоретические задачи и решения · Бухарест, Румыния · 4 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1972/

Задача 1: Три цилиндра на наклонной плоскости

Три цилиндра одинаковой массы, одинаковой длины и одинакового внешнего радиуса первоначально покоятся на наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения о наклонную плоскость μ известен и одинаков для всех цилиндров. Первый цилиндр полый (труба), второй — сплошной однородный, а третий имеет такую же полость, как первый, но закрыт двумя крышками пренебрежимо малой массы и заполнен жидкостью, плотность которой равна плотности материала стенок цилиндра. Трение между жидкостью и стенкой цилиндра считается пренебрежимо малым. Плотность материала первого цилиндра в n раз больше плотности материала второго или третьего цилиндра.

Определите:

- a) Линейные ускорения цилиндров при отсутствии проскальзывания. Сравните все ускорения.
- b) Условие для угла α наклона плоскости, при котором ни один из цилиндров не проскальзывает.
- c) Взаимные отношения угловых ускорений при качении с проскальзыванием всех трёх цилиндров. Сравните эти ускорения.
- d) Силу взаимодействия между жидкостью и стенками цилиндра при его скольжении, если масса жидкости равна m_l .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть R — общий внешний радиус, а β_i — угловое ускорение твёрдой части цилиндра i . Пусть $\hat{e}_{\parallel}$ направлен вниз вдоль плоскости, а $\hat{e}_{\perp}$ — по нормали от плоскости. В приведённых ниже сравнениях предполагается, что полости имеют ненулевой объём, $n > 1$, и $0 < \alpha < \pi/2$.

- **a)** Ускорения вниз вдоль плоскости равны

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1}g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2+2n-1}g \sin \alpha$$

и

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

- **b)** Если заданный коэффициент μ также является коэффициентом предельного трения покоя,

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

Предельное условие определяется цилиндром 1. Если μ обозначает исключительно коэффициент трения скольжения, то для точного условия отсутствия проскальзывания необходимо дополнительно знать коэффициенты трения покоя.

- **c)** При ненулевом трении скольжения

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Эквивалентно, величины, обратные ускорениям, удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n^2}.$$

- **d)** Равнодействующая сил, с которыми стенки действуют на жидкость, равна

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

Следовательно, модуль силы взаимодействия равен

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Сила, действующая на жидкость, образует угол $\arctan \mu$ с нормалью, направленной от плоскости, и отклонена от неё в сторону подъёма. Сила, действующая на стенки, равна ей по модулю и противоположна по направлению.

Решение

Пусть общая для всех цилиндров полная масса равна M , общая длина — L , а радиус полости цилиндров 1 и 3 — r . Обозначим плотность цилиндра 2, стенок цилиндра 3 и находящейся в нём жидкости через ρ . Плотность цилиндра 1 равна $n\rho$.

Из равенства масс следует

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

Следовательно,

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Поэтому масса оболочки третьего цилиндра и масса находящейся в нём жидкости равны

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n-1}{n}.$$

Будем считать цилиндры абсолютно твёрдыми, пренебрегать сопротивлением качению и рассматривать полностью заключённую в цилиндре жидкость как несжимаемую и невязкую. Вращение круговой стенки не сообщает этой жидкости тангенциального движения. Силы давления не создают момента относительно оси цилиндра, поэтому первоначально невращающаяся жидкость движется поступательно вместе с цилиндром, не вращаясь.

Таким образом, вся масса M участвует в поступательном движении, но вклад в момент инерции цилиндра 3 вносит только оболочка. Используя момент инерции однородного полого цилиндра относительно его оси $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n}, \\ I_2 &= \frac{1}{2}MR^2, \\ I_3 &= \frac{1}{2} \frac{M}{n}(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Здесь I_3 обозначает момент инерции вращающейся оболочки.

Введём безразмерные моменты инерции

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

а) Линейные ускорения при отсутствии проскальзывания

Пусть f_i — сила трения покоя, направленная вверх вдоль плоскости. Второй закон Ньютона в проекции на направление вдоль плоскости и уравнение вращательного движения относительно оси цилиндра дают

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

При качении без проскальзывания

$$a_i = R\beta_i.$$

Следовательно,

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = M k_i a_i,$$

и поэтому

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

Подставляя моменты инерции трёх цилиндров, получаем

$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.$

При $n > 1$

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

Поскольку a_i уменьшается с увеличением k_i ,

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

Цилиндр, заполненный жидкостью, имеет наибольшее ускорение, поскольку жидкость увеличивает массу, участвующую в поступательном движении, не увеличивая момент инерции вращающейся части.

б) Условие качения всех цилиндров без проскальзывания

Ускорение по нормали к плоскости отсутствует, поэтому для каждого цилиндра нормальная реакция равна

$$N = Mg \cos \alpha.$$

Сила трения покоя, необходимая для качения, равна

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

откуда

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

Чтобы явно различать трение покоя и трение скольжения, обозначим через $\mu_{s,i}$ коэффициент предельного трения покоя для цилиндра i . Все три цилиндра могут катиться без проскальзывания тогда и только тогда, когда

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2+2n-1}{2n-1} \right\}.$$

В обычной идеализированной модели с единым коэффициентом трения $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$. Поскольку $k_1 > k_2 > k_3$, для цилиндра 1 требуется наибольшее отношение силы трения к нормальной реакции, и поэтому именно он определяет ограничение:

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{или} \quad \alpha \leq \arctan \left(\mu \frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

Равенство соответствует предельному трению покоя для цилиндра 1.

с) Отношения угловых ускорений при проскальзывании всех трёх цилиндров

В рассматриваемом режиме цилиндры проскальзывают относительно плоскости вниз по ней. Сила трения скольжения направлена вверх вдоль плоскости и имеет одинаковый модуль для каждого цилиндра:

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

Поэтому их поступательные ускорения равны:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Их угловые ускорения определяются уравнением

$$I_i \beta_i = fR,$$

без использования условия отсутствия проскальзывания $a = R\beta$. Следовательно,

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

Сокращая общий множитель, получаем

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n - 1) : n^2.$$

Взаимные отношения равны

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n - 1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n - 1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

При $n > 1$

$$2n - 1 > n, \quad n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2 > 0,$$

поэтому

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Для проверки согласованности отметим, что проскальзывание вниз по плоскости при движении из состояния покоя требует выполнения условия $a_{sl} - R\beta_i > 0$. В модели с единым коэффициентом трения это условие выполняется для всех трёх цилиндров при

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}.$$

При увеличении угла наклона цилиндр 3 начинает проскальзывать последним.

d) Сила взаимодействия между жидкостью и стенками

Центр масс жидкости движется с ускорением вниз вдоль плоскости вместе со скользящим цилиндром:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Пусть $F_{\parallel}$ и $F_{\perp}$ — компоненты равнодействующей сил, с которыми стенки действуют на жидкость; положительными считаются направления вниз вдоль плоскости и по нормали от плоскости. Применяя второй закон Ньютона только к жидкости, получаем

$$\begin{aligned} F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha &= m_l a_{sl}, \\ F_{\perp} - m_l g \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

Эти компоненты обусловлены равнодействующей сил давления; наличие компоненты, направленной вверх вдоль плоскости, не требует вязкого трения между жидкостью и стенкой. Поэтому

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$$

и

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Угол её отклонения от нормали, направленной от плоскости, в сторону подъёма равен

$$\theta = \arctan \mu.$$

По третьему закону Ньютона жидкость действует на стенки с противоположной силой.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Аргон и кислород в двух цилиндрах с соединёнными поршнями

В двух цилиндрах А и В одинакового диаметра находятся два поршня пренебрежимо малой массы, соединённые жёстким стержнем. Поршни могут свободно перемещаться. Стержень представляет собой короткую трубку с клапаном. Вначале клапан закрыт (рис. 2.1).

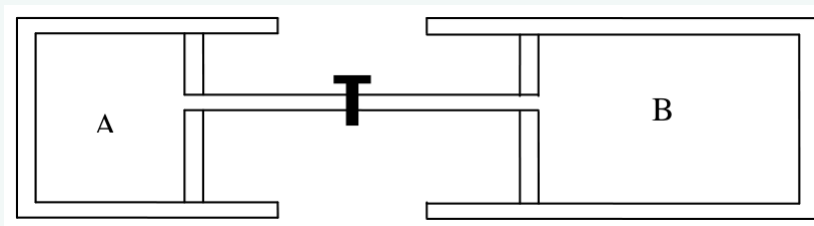


Рис. 2.1

Цилиндр А и его поршень адиабатически изолированы, а цилиндр В находится в тепловом контакте с термостатом, температура которого равна $\theta = 27^\circ\text{C}$.

Вначале поршень цилиндра А закреплён, а внутри цилиндра находится аргон массой $m = 32\text{ kg}$ под давлением, превышающим атмосферное. В цилиндре В находится некоторое количество кислорода при нормальном атмосферном давлении.

После освобождения поршня цилиндра А он движется достаточно медленно (квазистатически), и при установлении равновесия объём газа в этом цилиндре увеличивается в восемь раз, а плотность кислорода в цилиндре В увеличивается в два раза. Зная, что термостат получил количество теплоты $Q' = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$, выполните следующие задания:

- На основе кинетической теории газов, рассматривая упругие столкновения молекул с поршнем, установите, что термическое уравнение процесса, происходящего в цилиндре А, имеет вид $TV^{2/3} = \text{постоянная}$.
- Вычислите параметры p , V и T аргона в начальном и конечном состояниях.
- После открытия клапана, разделяющего два цилиндра, вычислите конечное давление смеси газов.

Киломолярная масса аргона равна $\mu = 40\text{ kg/kmol}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Ниже приведены формальные результаты, полученные из требуемого адиабатического соотношения, условия конечного механического равновесия и закона сохранения энергии для всей системы. Указание на квазистатичность процесса приводит к физическому противоречию: в момент освобождения поршня давление аргона равно $64p_0$, а давление кислорода — лишь p_0 , поэтому система поршней пренебрежимо малой массы не может двигаться квазистатически.

- а) $TV^{2/3} = \text{постоянная}$, или, что эквивалентно, $pV^{5/3} = \text{постоянная}$.
- б) Состояния аргона до открытия клапана:

Состояние	Давление p	Объём V	Температура T
Начальное	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6 \text{ Па}$	1.03 м^3	$1.00 \times 10^3 \text{ К}$
Конечное	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5 \text{ Па}$	8.20 м^3	250 К

- с) После открытия клапана и установления теплового равновесия

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75}p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Па}.$$

Здесь p_0 — нормальное атмосферное давление.

Решение

Будем считать оба газа идеальными и пренебрежём объёмом короткой соединительной трубки. Используем значения

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Па}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ К}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ Дж кмоль}^{-1} \text{ К}^{-1}.$$

Количество вещества аргона равно

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ кмоль}.$$

Индексы 1 и 2 обозначают начальное состояние и равновесное состояние, достигнутое при ещё закрытом клапане.

а) Вывод на основе столкновений молекул

Пусть поршень цилиндра с аргоном имеет площадь S и движется наружу со скоростью u , малой по сравнению со скоростями теплового движения молекул. Рассмотрим атом аргона массой m_0 , приближающийся к поршню с нормальной к поршню составляющей скорости v_x .

В мгновенной системе отсчёта покоя поршня упругое столкновение меняет знак нормальной составляющей скорости. Поэтому в лабораторной системе отсчёта

$$v'_x = 2u - v_x.$$

Остальные составляющие скорости не изменяются. Следовательно, изменение энергии атома равно

$$\Delta \varepsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0 u (v_x - u).$$

Импульс, переданный поршню, равен

$$I = 2m_0(v_x - u),$$

так что

$$\Delta\varepsilon = -uI.$$

При суммировании по всем столкновениям молекул импульс, передаваемый за единицу времени, равен силе $p_A S$. Следовательно,

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

или

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

Для равновесного одноатомного идеального газа кинетическая теория даёт

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

Отсюда

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

Предположение о медленном движении позволяет межмолекулярным столкновениям поддерживать изотропное равновесное распределение скоростей.

Подстановка в уравнение изменения энергии даёт

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = - \frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

Следовательно,

$$\frac{dT_A}{T_A} = - \frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

Интегрируя, получаем

$$T_A V_A^{2/3} = \text{постоянная}.$$

Совместно с $p_A V_A = n_A R T_A$ это также даёт

$$p_A V_A^{5/3} = \text{постоянная}.$$

b) Начальное и конечное состояния аргона

Согласно условию, при расширении аргона

$$V_{A2} = 8V_{A1}.$$

Используя результат пункта а), получаем

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$T_{A2} = \frac{1}{4} T_{A1}.$$

До открытия клапана масса кислорода не изменяется. Поэтому удвоение его плотности означает, что

$$V_{B2} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

В обоих равновесных состояниях — начальном и конечном — температура кислорода равна температуре термостата T_0 . Тогда уравнение состояния идеального газа даёт

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2p_0.$$

В конечном состоянии механического равновесия силы, действующие на систему соединённых поршней, уравниваются. Силы атмосферного давления взаимно компенсируются, поскольку площади поршней одинаковы, и остаётся

$$p_{A2} = p_{B2} = 2p_0.$$

Теперь адиабатическое соотношение для аргона даёт

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

Для определения температур рассмотрим оба газа вместе. Равные перемещения поршней и равные площади поперечного сечения означают, что

$$dV_A = -dV_B.$$

Таким образом, суммарный объём газов постоянен, а суммарная работа против атмосферного давления равна нулю. Работа, передаваемая через стержень, является внутренней для объединённой системы. Поскольку в начальном и конечном состояниях поршни покоятся, закон сохранения энергии для всей системы даёт

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

Начальная и конечная температуры кислорода одинаковы, поэтому для идеального газа

$$\Delta U_B = 0.$$

Следовательно,

$$Q' = \frac{3}{2} n_A R (T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8} n_A R T_{A1}.$$

При $Q' = 7.479 \times 10^6 \text{ J}$

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

и

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

Наконец,

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

и

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

С точностью до трёх значащих цифр

$$(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})$$

и

$$(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K}).$$

с) Конечное давление после открытия клапана

Из геометрии расположения поршней следует

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

Используя $V_{A2} = 8V_{A1}$ и $V_{B2} = V_{B1}/2$, получаем

$$7V_{A1} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

Отсюда

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

а постоянный суммарный объём равен

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

После открытия клапана газы смешиваются и в конце концов достигают температуры термостата T_0 . Хотя цилиндр А теплоизолирован, находящийся в нём газ может обмениваться энергией с газом в цилиндре В через открытое соединение.

Сохраняющееся количество вещества кислорода удовлетворяет соотношению

$$n_B RT_0 = p_0 V_{B1} = 14p_0 V_{A1}.$$

Для аргона

$$n_A RT_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2p_0 V_{A1}.$$

Применяя уравнение состояния идеального газа к конечной смеси, получаем

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B)RT_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14)p_0 V_{A1}}{15V_{A1}}.$$

Следовательно,

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75}p_0 = 2.2133p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Подъём диэлектрической жидкости между обкладками заряженного конденсатора

Плоский конденсатор с прямоугольными обкладками закреплён вертикально так, что его нижняя часть соприкасается с диэлектрической жидкостью (рис. 3.1).

Определите высоту h подъёма жидкости между обкладками и объясните это явление.

Капиллярными эффектами пренебречь.

Предполагается, что расстояние между обкладками намного меньше их линейных размеров.

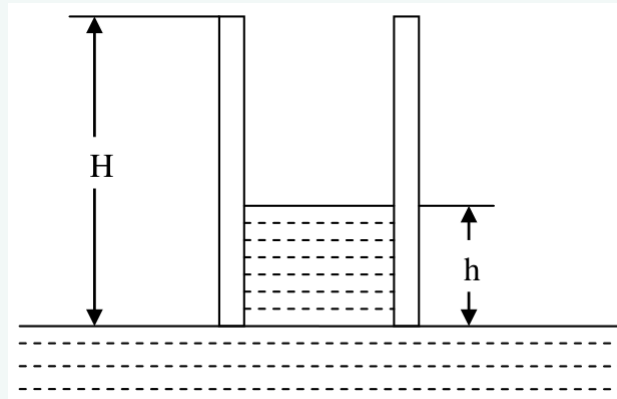


Рис. 3.1

Известны: начальная напряжённость электрического поля заряженного конденсатора E , плотность ρ и относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r жидкости, а также высота H обкладок конденсатора.

Проведите обсуждение результата.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 3 — Высота:** Предполагая, что заряженный конденсатор изолирован, положим $a = \epsilon_r - 1 > 0$. Пусть h_* — единственное неотрицательное решение уравнения

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

Равновесная высота равна $h = h_*$, если $h_* < H$. Жидкость заполняет зазор до самого верха, то есть в идеализированном приближении $h = H$, если

$$E \geq E_c = \epsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}}.$$

- **Задача 3 — Объяснение и обсуждение:** Поляризация создаёт направленную вверх электрическую силу. При равновесии с частичным заполнением зазора создаваемое ею давление уравнивает гидростатическое давление:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\epsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

Это равновесие единственно и устойчиво. При $E = 0$ или $\epsilon_r = 1$ подъёма нет.

- **Задача 3 — Вариант с постоянным напряжением:** Если вместо этого источник поддерживает начальное напряжение, результат имеет вид

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g} \right\}.$$

Решение

Задача 3. Указание на *начальную* напряжённость поля при отсутствии упоминания источника напряжения позволяет предположить, что конденсатор изолирован и его свободный заряд остаётся постоянным. Сначала решим задачу для этого случая.

Пусть ширина обкладок равна b , расстояние между ними — d , а внешняя поверхность жидкости находится на уровне $z = 0$. Будем считать резервуар достаточно большим, чтобы этот уровень оставался неизменным. Жидкость представляет собой линейный однородный несжимаемый диэлектрик; диэлектрическая проницаемость воздуха равна ε_0 . Поправками к ёмкости, обусловленными краевыми эффектами, пренебрегаем, поскольку d намного меньше размеров обкладок.

Ёмкость и напряжённость поля при подъёме. Когда жидкость поднялась на высоту $h < H$, заполненная жидкостью и заполненная воздухом части образуют два параллельно соединённых конденсатора. Поэтому

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b(H - h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

где

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

Изначально $V_0 = Ed$, поэтому сохраняющийся заряд равен

$$Q = C_0 Ed.$$

Следовательно, напряжённость поля после подъёма равна

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \boxed{\frac{E}{1 + ah/H}}.$$

Таким образом, по мере поступления жидкости в изолированный конденсатор напряжённость поля уменьшается.

Равновесная высота. При постоянном заряде энергия электрического поля равна

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

Гравитационная потенциальная энергия, необходимая для подъёма жидкости из резервуара в зазор, равна

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

Статическому равновесию соответствует минимум полной энергии. Следовательно,

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = bd \left[\rho gh - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

Поэтому

$$\boxed{\rho gh = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

или, что эквивалентно,

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}}.$$

Это кубическое уравнение определяет равновесную высоту через заданные величины. Величины b и d сокращаются, что объясняет, почему их значения не требуются.

Физическое объяснение. Введение диэлектрика увеличивает ёмкость и уменьшает энергию электрического поля при постоянном заряде. Соответствующая направленная вверх сила равна

$$F_e = - \left. \frac{dU_e}{dh} \right|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

Таким образом, создаваемое ею электрическое давление равно

$$p_e = \frac{F_e}{bd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

Жидкость поднимается до тех пор, пока это давление не уравнивает гидростатическое давление ρgh , создаваемое поднятым столбом жидкости.

Приравнивание начальной и конечной полных энергий в общем случае описывало бы возможную точку поворота при движении, а не статическое равновесие. Условием равновесия является использованное выше равенство нулю производной энергии.

Обсуждение.

При $a > 0$ определим функцию

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

При $h \geq 0$

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

Таким образом, существует ровно одно неотрицательное решение. Оно соответствует устойчивому равновесию: при увеличении h направленная вниз сила тяжести увеличивается, а направленная вверх электрическая сила уменьшается. В явном виде

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = bd \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

Этот вывод применим, когда поверхность жидкости находится между нижними и верхними краями обкладок. Подстановка $h = H$ в уравнение равновесия даёт

$$H \varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E_c^2}{2\rho g},$$

откуда получается указанное выше пороговое значение E_c . При $E > E_c$ равновесие с частичным заполнением зазора ниже верхних краёв невозможно: зазор заполняется полностью. Для определения точной формы поверхности вблизи верхних краёв или выше них необходимо учитывать краевые поля, которые не описываются приближением плоского конденсатора.

Когда ёмкость изменяется лишь незначительно,

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

напряжённость поля остаётся приблизительно равной начальному значению, и

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g}.$$

В частности, высота подъёма стремится к нулю при $E \rightarrow 0$ или $\varepsilon_r \rightarrow 1$.

Для изолированного конденсатора увеличение диэлектрической проницаемости не всегда приводит к увеличению высоты подъёма, поскольку оно также уменьшает напряжённость поля. При фиксированных E, H в пределе большой диэлектрической проницаемости

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2\rho g(\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

Для более точного количественного анализа положим

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

Из уравнения равновесия следует

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

Таким образом, до учёта геометрического ограничения $h \leq H$ максимальная высота при варьировании диэлектрической проницаемости равна

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

и достигается при $x = 1$, или $a = 2/\sqrt{B}$. Если этот максимум превышает H , полное заполнение возможно в некотором диапазоне значений диэлектрической проницаемости.

Наконец, если источник напряжения остаётся подключённым, $V = Ed$ и $\mathcal{E} = E$ остаются постоянными. С учётом источника эффективная электрическая потенциальная энергия равна $-CV^2/2$. Тогда условие равновесия даёт

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2,$$

что приводит к результату для постоянного напряжения, приведённому в разделе «Ответы».

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 4: Плосковыпуклая линза между двумя средами; разрезная линза Бийе

Тонкая плосковыпуклая линза диаметром $2r$, с радиусом кривизны R и показателем преломления n_o расположена так, что слева от неё находится воздух ($n_1 = 1$), а справа — прозрачная среда с показателем преломления $n_2 \neq 1$. Выпуклая поверхность линзы обращена к воздуху. В воздухе на главной оптической оси на расстоянии s_1 от линзы находится точечный источник монохроматического света.

а) Покажите в приближении Гаусса, что положение изображения, задаваемое расстоянием s_2 от линзы, и положение источника света связаны соотношением:

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

где f_1 и f_2 — фокусные расстояния линзы в воздухе и в среде с показателем преломления n_2 соответственно.

Примечание: все показатели преломления являются абсолютными.

б) Линзу разрезают на две равные части плоскостью, перпендикулярной её плоской поверхности. Эти части раздвигают на расстояние $\delta \ll r$ (линза Бийе). На оси симметрии полученной системы на расстоянии s_1 ($s_1 > f_1$) помещают точечный источник света (рис. 4.1). Справа от линзы на расстоянии d находится экран Е. Экран параллелен плоской поверхности линзы. Если справа от линзы находится воздух, на этом экране наблюдается N интерференционных полос.

Определите N в зависимости от длины волны.

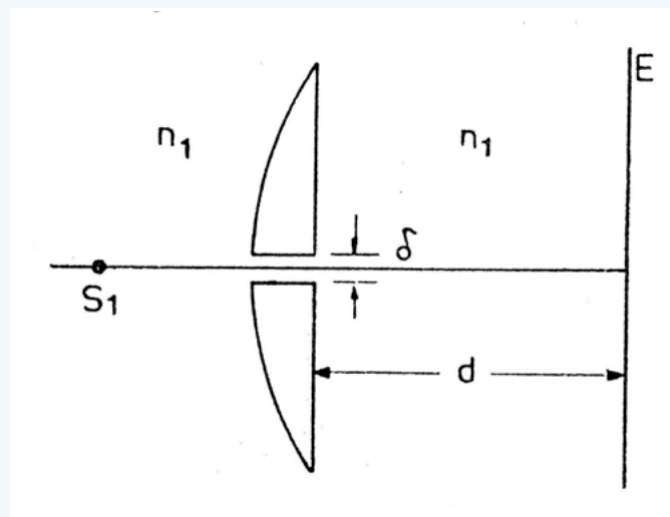


Рис. 4.1

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- а) Фокусные расстояния и уравнение, определяющее положение изображения, имеют вид

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}, \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

- б) Положим

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f}.$$

При обычном положении экрана, когда внешние края апертуры не ограничивают область интерференции,

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2 (s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - f s_1]}.$$

Для этого необходимо выполнение условий

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Здесь N — обычная оценка числа полос, получаемая делением ширины области перекрытия на расстояние между соседними полосами.

С учётом ограничения пучков конечной апертурой соответствующее число полос равно

$$\bar{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max \left\{ 0, \min \left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0 \right] \right\}, & d > v. \end{cases}$$

При положительной ширине области перекрытия целое число светлых максимумов, включая максимумы на границе, равно

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\bar{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Решение

а) Преломление на двух поверхностях

Используем приближения тонкой линзы и Гаусса: пренебрегаем расстоянием между двумя поверхностями и сохраняем только члены первого порядка по высотам и углам лучей. Считаем, что свет распространяется слева направо, причём s_1 положительно для действительного источника, а s_2 положительно для действительного изображения.

Рассмотрим луч, падающий на линзу на высоте y . Его угол с оптической осью равен

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

Поскольку центр кривизны находится справа от выпуклой поверхности, нормаль к поверхности составляет с осью угол

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

Обозначим через θ_o угол луча внутри линзы. Закон Снеллиуса в приближении малых углов даёт

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

откуда

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

На плоской поверхности, нормаль к которой параллельна оптической оси,

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

Для луча, приходящего в изображение на оси,

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

Объединяя эти уравнения и сокращая на y , получаем

$$\boxed{\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}}.$$

Переднее фокусное расстояние равно расстоянию до источника, при котором выходящие лучи параллельны. Полагая $s_2 \rightarrow \infty$, получаем

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Заднее фокусное расстояние равно расстоянию до изображения при параллельных падающих лучах. Полагая $s_1 \rightarrow \infty$, получаем

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

Таким образом, деление уравнения, определяющего положение изображения, на $(n_o - 1)/R$ даёт

$$\boxed{\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1}.$$

То же соотношение применимо и к мнимым изображениям, если рассматривать s_2 как расстояние с учётом знака.

б) Изображения, создаваемые двумя половинами

Теперь с обеих сторон линзы находится воздух, поэтому фокусное расстояние равно

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Каждая половина создаёт изображение на продольном расстоянии v , где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f} > 0.$$

Выберем поперечную координату y перпендикулярно разрезу. Полная ширина зазора, показанного на рисунке, равна δ , поэтому оси двух половин расположены при

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

Относительно оси каждой половины линзы высота источника равна $-c_{\pm}$. Поперечное увеличение равно $-v/s_1$, что даёт следующие положения изображений:

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

Следовательно, расстояние между двумя изображениями равно

$$b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}.$$

Эти изображения служат когерентными вторичными источниками. В силу зеркальной симметрии их фазы одинаковы, поэтому центральная полоса светлая.

Расстояние между соседними полосами

Для экрана, расположенного за плоскостью изображений, положим

$$L = d - v > 0.$$

В точке экрана с координатой y разность хода лучей от двух изображений в параксиальном приближении равна

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

Таким образом, положения светлых полос удовлетворяют соотношению

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а расстояние между соседними полосами равно

$$\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d - v)}{\delta v}.$$

В параксиальном приближении полосы представляют собой прямые, параллельные разрезу.

Ширина области перекрытия пучков

Используем геометрические границы пучков и пренебрегаем дифракцией на краях апертуры.

Луч, проходящий через оптический центр каждой половины, не отклоняется. Эти два луча достигают экрана в точках

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1}\right).$$

Поэтому, если внешние края апертуры не ограничивают область перекрытия, её ширина равна

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1}\right).$$

Деление этой ширины на расстояние между соседними полосами даёт

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1}\right).$$

Подставляя $v = fs_1/(s_1 - f)$, получаем

$$N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}.$$

При фиксированных геометрии системы и показателе преломления эта величина пропорциональна $1/\lambda$.

Условия, связанные с конечной апертурой

В условии не указано положение экрана относительно плоскости изображений, поэтому необходимо также проверить условия перекрытия.

Луч, проходящий через верхнюю половину на высоте y_0 , проходит через создаваемое ею изображение на высоте y_+ . Его высота на экране равна

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v}\right)y_0 + \frac{d}{v}y_+.$$

Верхняя половина занимает область

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

При $d > v$ введём обозначение

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

В центральном сечении экрана верхний пучок занимает область

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

а нижний пучок — область

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

Область их перекрытия симметрична относительно $y = 0$ и имеет ширину

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

Таким образом, обычное выражение N_0 применимо при условии

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

В случае частичного перекрытия

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

Тем самым доказано общее выражение для $\bar{N} = W/\beta$, приведённое в разделе «Ответы». При $d \leq v$ два геометрических пучка остаются по разные стороны от оси симметрии и не перекрываются.

Наконец, при $W > 0$ светлым максимумам соответствуют целые числа, удовлетворяющие условию

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

С учётом максимумов, лежащих точно на границе, получаем

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.